Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Андреев, И. А. Вихлянцев, О сложности нумерующих операторов, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 4, 44–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm541>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:34:42

О сложности нумерующих операторов

© 1996 г. А. Е. Андреев, И. А. Вихлянецв

Рассмотрены операторы, которые ставят в соответствие элементам заданного конечного множества A из E^n числа (номера) от 1 до $|A|$. Для таких нумераций построены асимптотически оптимальные схемы из функциональных элементов в базисе из всех двуместных функций.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 93-011-16005.

1. Введение

В задачах синтеза реальных схем часто встречается ситуация, когда необходимо занумеровать множество булевых наборов, которое не имеет регулярной структуры. При этом необходимо, чтобы возникающие номера шли подряд, без пропуска.

Например, эта задача возникает при реализации системы команд в микропроцессоре. Представление команды является достаточно избыточным, а для минимизации дешифраторов необходимо преобразовать это представление в более компактную форму. Наиболее компактной формой является нумерация. При этом совершенно не важно в каком порядке нумеруются множества, главное, чтобы номера шли подряд.

Обозначим через $E(m)$ множество наборов длины $\lceil \log_2 m \rceil$, являющихся двоичными записями всех целых чисел от 0 до $m - 1$, а через E^n множество всех булевых наборов длины n .

Пусть $A \subseteq E^n$, причем $|A| = m$ (здесь и далее $|A|$ означает мощность конечного множества A). Взаимно однозначное отображение $f: A \rightarrow E(m)$ назовем нумерующим оператором (или нумератором) множества A . Множество всех нумерующих операторов множества A обозначим через $\text{NUM}(A)$.

Множество операторов назовем (n, m) -нумерующим, если для всех A таких, что $A \subseteq E^n$, $|A| \leq m$, найдется нумерующий A оператор из этого множества.

Сложность нумерации множества A определим как

$$L(A) = \min_{f \in \text{NUM}(A)} L(f),$$

где $L(f)$ — сложность функции f при реализации схемами из функциональных элементов в базисе P_2^2 , состоящем из всех двуместных булевых функций.

Определим функцию Шеннона для сложности нумерации множеств

$$L(n, m) = \max_{A \subseteq E^n, |A| \leq m} L(A).$$

Основная цель данной работы состоит в получении асимптотики для этого функционала.

2. Нижняя оценка

Лемма 1. Если множество F является (n, m) -нумерующим, то

$$|F| \gtrsim \frac{e^m}{\sqrt{2\pi m}}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный оператор $f: E^n \rightarrow E(m)$ из (n, m) -нумерующего множества F . Оценим, для какого числа множеств из E^n мощности, не превосходящей m , оператор f является нумерующим.

Очевидно, что если оператор f принимает не все m значений, то число нумеруемых им множеств может только уменьшиться.

С другой стороны, так как задача максимизации произведения $x_1 x_2 \dots x_m$ при условии $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 2^n$ имеет решение $x_i = 2^n/m$, где $i = 1, \dots, m$, в худшем случае максимальное количество множеств A , нумеруемых оператором f , не превосходит $(2^n/m)^m$.

Учитывая, что совокупное число множеств мощности m равно

$$\binom{2^n}{m} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \left(\frac{e 2^n}{m} \right)^m,$$

в итоге получаем, что

$$|F| \geq \binom{2^n}{m} / (2^n/m)^m \sim \frac{e^m}{\sqrt{2\pi m}},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. Если $n = o(m/\log_2 m)$, то

$$L(n, m) \gtrsim \frac{m \log_2 e}{\log_2 m}.$$

Доказательство. Число операторов из любого (n, m) -нумерующего множества F не может быть больше числа схем из функциональных элементов сложности $L(n, m)$. В силу результатов О. Б. Лупанова [1], число схем сложности $L(n, m)$ не превосходит

$$(16(n + L(n, m)))^{n+L(n, m)+3},$$

поэтому в силу леммы 1

$$\frac{e^m}{\sqrt{2\pi m}} \lesssim |F| \leq (16(n + L(n, m)))^{n+L(n, m)+3}.$$

Из последнего неравенства и следует искомый результат.

3. Верхние оценки

3.1. Мощность нумерующего множества

Лемма 3. Для $m \leq 2$ существует такое (n, m) -нумерующее множество F , что

$$|F| \leq 4n\sqrt{m}e^m.$$

Доказательство. Обозначим через $\lambda(m)$ долю нумерующих операторов множеств A , мощность которых не превосходит m , среди всех операторов из A в $E(m)$. Найдем $\lambda(m)$. Так как нумерующие операторы являются взаимно однозначными, то их число

$$\sum_{i=0}^m i! > m!.$$

Общее число операторов из A в $E(m)$ равно

$$\sum_{i=0}^m m^i = \frac{m^{m+1} - 1}{m - 1} \leq 2m^m$$

при $m \geq 2$. Таким образом,

$$\lambda(m) > \frac{m!}{2m^m} \sim \frac{\sqrt{\pi m/2}}{e^m}.$$

Теперь рассмотрим задачу о покрытии таблицы, k строкам которой соответствуют всевозможные множества $A \subseteq E^n$, $|A| \leq m$, где

$$k = \sum_{i=1}^m \binom{2^n}{i} \leq (4 \cdot 2^n)^m,$$

а столбцам соответствуют всевозможные операторы из A в $E(m)$. На пересечении строки и столбца ставится единица в том и только том случае, когда соответствующий этому столбцу оператор является нумерующим для множества, соответствующего данной строке. Ясно, что доля единиц в любой строке этой таблицы равна $\lambda(m)$.

Каждому покрытию этой таблицы соответствует некоторое (n, m) -нумерующее множество F , причем с помощью градиентного алгоритма (см. конструкцию леммы 1.7 в [2], а также [3], лемма 9, с. 136–137) можно построить F так, что

$$|F| \leq \left\lceil \frac{\ln k}{\lambda(m)} \right\rceil.$$

Так как

$$\ln k \leq m(n+2) \leq 3mn,$$

то

$$|F| \leq \frac{3mn}{\sqrt{\pi m/2}} e^m + 1 \leq 3n\sqrt{m}e^m + 1 < 4n\sqrt{m}e^m,$$

что и требовалось доказать.

3.2. Порядок функции Шеннона

Лемма 4. *Справедлива оценка*

$$L(n, m) \asymp \frac{m}{\log_2 m}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество $A = \{a_0, a_1, \dots\}$ из E^n , $|A| \leq m$. Не теряя общности, считаем, что $a_0 < a_1 < \dots$. Все наборы a_i этого множества закодируем последовательными двоичными наборами a'_i длины $\lceil \log_2 m \rceil$ и рассмотрим $(\lceil \log_2 m \rceil, \lceil \log_2 m \rceil)$ -оператор F такой, что

$$F(a'_i) = i, \quad i = 0, 1, \dots, |A| - 1.$$

Если $|A| < m$, то наборы длины $\lceil \log_2 |A| \rceil$ дополняем до наборов длины $\lceil \log_2 m \rceil$ нулями слева.

Ясно, что оператор F является монотонным и нумерует множество A . Поэтому, в силу результатов О. Б. Лупанова [4] для монотонных операторов, получаем, что

$$L(A) \leq L(F) \lesssim \frac{2^{\lceil \log_2 m \rceil + 1}}{\lceil \log_2 m \rceil}.$$

Отсюда, в силу леммы 2, следует искомым результат.

3.3. Нумерация равномерно ограниченных множеств

Множество A из E^n назовем (k, r) -равномерно ограниченным, если найдутся такие k переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$, что для любого фиксированного набора значений этих k переменных в A входит не более r таких наборов. Класс всех (k, r) -равномерно ограниченных множеств из E^n обозначим через $Q(n, k, r)$ и введем соответствующий функционал сложности

$$L(n, k, r) = \max_{A \in Q(n, k, r)} L(A).$$

Лемма 5. *Если $\sqrt{n} \leq r \leq n/2$ и $k \geq n - n^{1/4}$, то*

$$L(n, k, r) \lesssim \frac{2^k r \log_2 e}{k}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное (k, r) -равномерно ограниченное множество A из E^n и зафиксируем k переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$, где $k \leq n$. Не теряя общности, считаем $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ первыми k переменными.

Множеству A сопоставим таблицу $T = \|t_{ij}\|$ размера $2^k \times 2^{n-k}$, 2^k строкам которой соответствуют всевозможные наборы значений фиксированных переменных, а 2^{n-k} столбцам всевозможные наборы оставшихся $n - k$ переменных, причем

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (\sigma_1, \dots, \sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n) \in A, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

		$j :$		
	0	σ_{k+1}	1	$x_{i_{k+1}}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0	σ_n	1	x_{i_n}
0 ... 0				
$i : \sigma_1 \dots \sigma_k$				
		t_{ij}		
1 ... 1				
$x_{i_1} \dots x_{i_k}$				

Рис. 1. Таблица T

где

$$i = \sum_{l=1}^k \sigma_l 2^{k-l}, \quad j = \sum_{l=k+1}^n \sigma_l 2^{n-l}.$$

В силу (k, r) -равномерной ограниченности множества A , переменные $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ можно подобрать так, что в каждой строке таблицы будет не более r элементов множества A , т.е. для любого $i = 0, 1, \dots, 2^k - 1$

$$\sum_{j=0}^{2^{n-k}-1} t_{ij} \leq r.$$

Построим схему, реализующую некоторую нумерацию множества A , следующим образом. Зафиксируем $(n-k, r)$ -нумерующее множество F .

Обозначим через F_1 такой $(k, \lfloor \log_2 m \rfloor)$ -оператор, что

$$F_1(\sigma_1, \dots, \sigma_k) = \sum_{i \leq p} \sum_{j=0}^{2^{n-k}-1} t_{ij},$$

где

$$p = \sum_{l=1}^k \sigma_l 2^{k-l}.$$

По определению, значение $F_1(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ равно суммарному числу единиц (элементов множества A) в первых p строках таблицы T . Ясно, что оператор F является монотонным.

Так как для любого $i = 0, 1, \dots, 2^k - 1$

$$\sum_{j=0}^{2^{n-k}-1} t_{ij} \leq r,$$

справедливо равенство

$$\sum_{j=0}^{2^{n-k}-1} t_{ij} = \sum_{l=1}^{\lfloor \log_2 r \rfloor} y_l^i 2^{\lfloor \log_2 r \rfloor - l},$$

где все $y_l^i \in \{0, 1\}$.

Обозначим через f_s такой (k, k) -оператор, что

$$f_s(\sigma_1, \dots, \sigma_k) = \sum_{i=1}^p y_s^i,$$

где

$$p = \sum_{l=1}^k \sigma_l 2^{k-l}, \quad s = 1, 2, \dots, \lfloor \log_2 r \rfloor.$$

Отметим, что $f_s \leq p$ для всех s , где p представляется с помощью k двоичных разрядов.

Таким образом, для набора $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$, где $p = \sum_{l=1}^k \sigma_l 2^{k-l}$, f_1 суммирует старшие разряды числа единиц с первой по p -ю строки таблицы T включительно, f_2 суммирует следующие разряды и т. д., $f_{\lfloor \log_2 r \rfloor}$ суммирует младшие разряды числа единиц с первой по p -ю строки таблицы T . Ясно, что все операторы f_s являются монотонными. Поэтому в силу результатов О. Б. Лупанова [4] для монотонных операторов

$$L(f_s) \lesssim \frac{2^{k+1}}{k},$$

для любого $s = 1, 2, \dots, \lfloor \log_2 r \rfloor$.

Значение исходного оператора F_1 мы теперь можем получить из значений операторов f_s , $s = 1, 2, \dots, \lfloor \log_2 r \rfloor$, с помощью операций двоичного сдвига и суммирования. Таким образом,

$$L(F_1) \lesssim \frac{2^{k+1}}{k} \lfloor \log_2 r \rfloor + O(k \log_2 r),$$

и окончательно

$$L(F_1) \lesssim \frac{2 \cdot 2^k \log_2 r}{k}.$$

Через F_2 обозначим $(k, \lfloor \log_2 |F| \rfloor)$ -оператор, зависящий от переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$, который для данной строки таблицы T вычисляет номер функции из $(n - k, r)$ -нумерующего множества F . Очевидно, что

$$L(F_2) \lesssim \frac{2^k}{k} \lfloor \log_2 |F| \rfloor.$$

В силу леммы 3

$$|F| \leq 4(n - k) \sqrt{re}^r,$$

Рис. 2. Схема нумератора множества A

поэтому

$$L(F_2) \lesssim \frac{2^k}{k} \left(r \log_2 e + \log_2(n-k) + \frac{1}{2} \log_2 r + 3 \right).$$

Через F_3 обозначим $(n-k+]\log_2 |F|[,]\log_2 r[)$ -оператор, который по номеру функции, найденному на выходе F_2 , и набору значений переменных $x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}$ вычисляет значение данной нумерующей функции. Очевидно, что

$$L(F_3) \lesssim \frac{2^{n-k+]\log_2 |F|}[}{n-k+]\log_2 |F|}[]\log_2 r[.$$

Через Σ обозначим $(]\log_2 m[+]\log_2 r[,]\log_2 m[)$ -оператор, который суммирует значения операторов F_1 и F_3 . Очевидно, что

$$L(\Sigma) \lesssim]\log_2 m[+]\log_2 r[.$$

Ясно, что значение

$$\Sigma(F_1(\sigma_1, \dots, \sigma_k), F_3(F_2(\sigma_1, \dots, \sigma_k), \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n))$$

является номером набора $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in A$. Таким образом, схему для нумерации множества A можно построить так, как показано на рис. 2, и

$$L(A) \leq L(F_1) + L(F_2) + L(F_3) + L(\Sigma).$$

Отсюда, учитывая ограничения на k и r , получаем искомый результат.

3.4. Общий случай

Лемма 6. Если k — целое число, $1 \leq k \leq n$, $t \geq 1$ и $m \geq 2^{k+1}$, то

$$L(n, m) \leq L(n, k, m2^{-k} + t) + L\left(n, \frac{m2^{-k} + t}{t^2}m\right) + O(\log_2 m) + O(n^2) + O\left(\frac{2^k}{k}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное m -элементное множество A из E^n . Для этого множества в силу результатов А. Е. Андреева [3, лемма 3] найдется такой линейный сохраняющий ноль (n, n) -оператор $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$, где $\mathcal{L}_1$ — линейный (n, k) -оператор с независимыми компонентами, что для множеств

$$A_1 = \{a' \mid a' = \mathcal{L}(a), a = (a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) \in A, h(a_1, \dots, a_k) = 0\},$$

$$A_2 = \{a' \mid a' = \mathcal{L}(a), a = (a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) \in A, h(a_1, \dots, a_k) = 1\},$$

где для $\alpha \in E^k$ и $\mathcal{L}^{-1}(\alpha) = |\{a \mid a \in A: \mathcal{L}_1(a) = \alpha\}|$

$$h(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathcal{L}^{-1}(\alpha) > m2^{-k} + t, \\ 0, & \text{если } \mathcal{L}^{-1}(\alpha) \leq m2^{-k} + t \end{cases}$$

справедливы равенства

$$A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset,$$

причем A_1 — $(s, m2^{-s} + t)$ -равномерно ограничено в силу построения, а

$$|A_2| \leq \left(\frac{m2^{-s} + t}{t^2}\right)m.$$

Построим схему для нумерации множества A , как показано на рис.3. Схема NA_1 реализует нумерацию множества A_1 и

$$L(NA_1) = L(n, k, m2^{-k} + t).$$

Схема NA_2 реализует нумерацию множества A_2 и

$$L(NA_2) = L(n, |A_2|) \leq L\left(n, \frac{m2^{-k} + t}{t^2}m\right).$$

Так как h зависит от k переменных,

$$L(h) \leq O\left(\frac{2^k}{k}\right).$$

$(\lfloor \log_2 |A_2| \rfloor, \lfloor \log_2 m \rfloor)$ -оператор Σ суммирует число $|A_1|$ элементов множества A_1 с номерами элементов множества A_2 и выдает на выходе номера от $|A_1| + 1$ до m . Очевидно, что

$$L(\Sigma) \leq O(\log_2 m).$$

Таким образом, сложность нумерации множества A

$$\begin{aligned} L(A) &\leq L(NA_1) + L(NA_2) + L(\mathcal{L}) + L(h) + L(\Sigma) + O(n) + O(\log_2 m) \\ &\leq L(n, k, m2^{-k} + t) + L\left(n, \frac{m2^{-k} + t}{t^2}m\right) + O(\log_2 m) + O(n^2) + O\left(\frac{2^k}{k}\right). \end{aligned}$$

Отсюда и следует искомым результат.

Рис. 3.

Лемма 7. Если s — целое число, $1 \leq s \leq n$, $m \leq 2^s$, то

$$L(n, m) \leq L(s, m) + O\left(\frac{sn}{\log_2 n}\right) + O(n) + O(\log_2 m) + O(2^{-s}m^2n).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное m -элементное множество A из E^n . Для этого множества в силу результатов А. Е. Андреева [3, лемма 4] найдется такой линейный сохраняющий ноль (n, s) -оператор $\mathcal{L}$ с независимыми компонентами, что для A можно построить множества

$$B_1 = \{\alpha \mid \alpha \in E^s : \exists \text{ единственный элемент } a \in A : \mathcal{L}(a) = \alpha\},$$

$$A_2 = \{a \mid a \in A : \exists a' \in A : a' \neq a \text{ и } \mathcal{L}(a') = \mathcal{L}(a)\},$$

причем

$$|A| = |B_1| + |A_2|, \quad |B_1| \leq m, \quad |A_2| \leq 2^{-s}m^2.$$

Построим схему для нумерации множества A , как показано на рис. 4. Схема NB_1 реализует нумерацию множества B_1 и

$$L(NB_1) = L(s, |B_1|) \leq L(s, m).$$

Схема NA_2 реализует нумерацию множества A_2 и в силу леммы 4 может быть построена таким образом, что

$$L(NA_2) \leq \frac{|A_2|}{\log_2 |A_2|} \leq O(2^{-s}m^2).$$

Характеристическую функцию h множества $|A_2|$ реализуем в виде совершенной д.н.ф. Поэтому

$$L(h) \leq n|A_2| \leq 2^{-s}m^2n.$$

$(\lfloor \log_2 |A_2| \rfloor, \lfloor \log_2 m \rfloor)$ -оператор Σ , как и в предыдущей лемме, суммирует число $|B_1|$ элементов множества B_1 с номерами элементов множества A_2 и выдает на выходе номера от $|B_1| + 1$ до m . Очевидно, что

$$L(\Sigma) \leq O(\log_2 m).$$

Таким образом, сложность нумерации множества A

$$\begin{aligned} L(A) &\leq L(NB_1) + L(NA_2) + L(\mathcal{L}) + L(h) + L(\Sigma) + O(n) + O(\log_2 m) \\ &\leq L(s, m) + O\left(\frac{sn}{\log_2 n}\right) + O(n) + O(\log_2 m) + O(2^{-s}m^2n). \end{aligned}$$

Отсюда и следует искомый результат.

Лемма 8. Если $m \geq 2^{n-n^{1/8}}$, то

$$L(n, m) \lesssim \frac{m \log_2 e}{\log_2 m}.$$

Рис. 4.

Доказательство. Считаем, что n достаточно велико. Выберем целое k таким образом, что

$$\frac{n}{8} \leq m2^{-k} \leq \frac{n}{4}.$$

Тогда $k \geq \log_2 m - \log_2 n/4 \geq n - n^{1/4}$.

Положим $t = n^{7/8}$. Если $r = m2^{-k} + t$, то $\sqrt{n} \leq r \leq n/2$. Следовательно, в силу леммы 5

$$L(n, k, m2^{-k} + t) \lesssim \frac{2^k(m2^{-k} + t) \log_2 e}{k} \lesssim \frac{m \log_2 e}{\log_2 m}. \quad (1)$$

При рассматриваемых значениях параметров

$$\left(\frac{m2^{-k} + t}{t^2} \right) m \leq \frac{n/4 + n^{7/8}}{n^{14/8}} m \leq \frac{2}{n^{3/4}} m. \quad (2)$$

Учитывая (1) и (2), с помощью леммы 6 получаем, что

$$L(n, m) \lesssim \frac{m \log_2 e}{\log_2 m} + L\left(n, \left\lceil \frac{2}{n^{3/4}} m \right\rceil\right) + O(n^2) + O\left(\frac{2^k}{k}\right). \quad (3)$$

В силу леммы 5

$$L\left(n, \left\lceil \frac{2}{n^{3/4}} m \right\rceil\right) \lesssim \frac{m}{n^{3/4} \log_2 m}. \quad (4)$$

Учитывая (3) и (4), окончательно имеем

$$L(n, m) \lesssim \frac{m \log_2 e}{\log_2 m} + O\left(\frac{m}{n^{3/4} \log_2 m}\right),$$

т.е. получен искомый результат.

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$L(n, m) \sim \frac{m \log_2 e}{\log_2 m} + O(n).$$

Доказательство. Пусть $m \geq 2^{n/4}$. Положим $s = \lfloor \log_2(mn^3) \rfloor$. В этом случае

$$s \geq \frac{n}{4}, \quad m \geq 2^{s-3 \log_2 n} \geq 2^{s-s^{1/8}}$$

при достаточно большом n . В силу лемм 7 и 8

$$\begin{aligned} L(n, m) &\leq L(s, m) + O\left(\frac{sn}{\log_2 n}\right) + O(n) + O(\log_2 m) + O(2^{-s} m^2 n) \\ &\lesssim \frac{m \log_2 e}{\log_2 m} + O(n) + O\left(\frac{m}{n^2}\right) \lesssim \frac{m \log_2 e}{\log_2 m}. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть теперь $2 \leq m < 2^{n/4}$. Положим $s = \lceil 2 \log_2 m \rceil$. Очевидно, что $m \geq 2^{s/4}$. Тогда в силу (5) и леммы 7

$$\begin{aligned} L(n, m) &\leq L(s, m) + O\left(\frac{n \log_2 m}{\log_2 n}\right) + O(n) + O(\log_2 m) + O\left(\frac{1}{m^2} m^2 n\right) \\ &\lesssim \frac{m \log_2 e}{\log_2 m} + O(n). \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу леммы 2 при $n = o(m/(\log_2 m))$

$$L(n, m) \gtrsim \frac{m \log_2 e}{\log_2 m}.$$

Поэтому

$$L(n, m) \gtrsim \frac{m \log_2 e}{\log_2 m} + O(n),$$

и теорема полностью доказана.

Список литературы

1. Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем. *Пробл. киберн.* (1963) **10**, 63–97.
2. Нечипорук Э. И. О топологических принципах самокорректирования. *Пробл. киберн.* (1969) **21**, 5–102.
3. Яблонский С. В., Лупанов О. Б. (ред.) *Дискретная математика и математические вопросы кибернетики*, т.1. Наука, Москва, 1974.
4. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования. *Пробл. киберн.* (1965) **14**, 31–110.
5. Андреев А. Е. О сложности реализации частичных булевых функций схемами из функциональных элементов. *Дискретная математика* (1989) **1**, №4, 36–45.

Статья поступила 20.09.95.