Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Бабин, О разрешимости проблемы полноты для специальных систем автоматных функций, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 4, 79–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm542>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:21:56

О разрешимости проблемы полноты для специальных систем автоматных функций

© 1996 г. Д. Н. Бабин

Рассматриваются системы автоматных функций вида $M = \Phi \cup \nu$, где Φ — некоторый класс Поста, а ν — конечная система автоматных функций. Показано, что если $\Phi = M, D, C, F^2$, то проблема полноты и A -полноты для системы M алгоритмически разрешима.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 95-01-01102.

1. Введение

Известно, что решение задачи о полноте относительно операций суперпозиции и обратной связи для систем автоматных функций наталкивается на существенные трудности. Так, в [1] установлена континуальность всякой критериальной системы для этой задачи, а позднее в [2] установлена ее алгоритмическая неразрешимость для конечных систем автоматных функций. Вместе с тем, для систем автоматов, содержащих все булевы функции, указанная задача алгоритмически разрешима [3]. Естественно исследовать на полноту системы вида $M = \Phi \cup \nu$, где Φ — некоторый класс Поста, а ν — конечная система автоматных функций.

Проблема A -полноты для систем автоматных функций алгоритмически неразрешима в общей постановке [4] и разрешима для систем, содержащих все булевы функции [5]. В [10] было показано, что для классов Поста Φ типа F^∞ , S , P и O проблема полноты и проблема A -полноты алгоритмически неразрешима. Из результата настоящей работы следует, что для

$$\Phi \in \{M_1, M_2, M_3, M_4, D_1, D_2, D_3, C_1, C_2, C_3, C_4, F_i^2, i = 1, 2, \dots, 8\}$$

проблема полноты и A -полноты алгоритмически разрешима.

2. Основные понятия и результаты

Мы будем использовать обозначения из работ [6, 7]. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$, E_2^* — множество всех слов $a(1)a(2)\dots a(s)$, где $a(j) \in E_2$, $j = 1, 2, \dots, s$, E_2^τ — множество всех слов $a(1)\dots a(\tau)$ длины τ . Пусть $f: (E_2^*)^n \rightarrow (E_2^*)^m$ — автоматная функция

(a -функция), т.е. она задается рекуррентно соотношениями

$$\begin{aligned} q(1) &= q_1, \\ q(t+1) &= \varphi(q(t), a_1(t), \dots, a_n(t)), \\ b_j(t) &= \psi_j(q(t), a_1(t), \dots, a_n(t)), \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1)$$

где $q \in Q = \{q_1, \dots, q_r\}$. Параметр q называется состоянием a -функции f , q_1 ее начальным состоянием, вектор-буквы $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_m)$ называются входной и выходной буквами, а сверхслова $a(1)a(2)\dots$ и $b(1)b(2)\dots$ входным и выходным сверхсловами, соответственно. Класс всех a -функций обозначим через P . В этом классе обычным образом введем операции суперпозиции и обратной связи. Для суперпозиции будем использовать модификации операций из [8]:

$$\begin{aligned} (\gamma f)(x_1, \dots, x_n) &= f(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1), \\ (\epsilon f)(x_1, \dots, x_n) &= f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n), \\ (\Omega f)(x_1, \dots, x_{n-1}) &= f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \\ (\nabla f)(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) &= f(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) \\ (f * g)(x_1, x_2, \dots, x_{m+n-1}) &= f(g(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1}). \end{aligned}$$

Операция обратной связи (о.с.), примененная к i -й входной и j -й выходной переменным a -функции $f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$, задает a -функцию $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m)$, вычисляемую алгоритмически следующим образом. Считаем, что о.с. применима к f в состоянии q , если ψ_j в уравнении (1) фиктивно зависит от a_i при $q(t) = q$, а вычисление $b_s(t)$ осуществляется по схеме

$$\begin{aligned} q(1) &= q_1, \\ q(t+1) &= \varphi(q(t), a_1(t), \dots, a_{i-1}(t), \psi_j(q(t), a_1(t), \dots, a_{i-1}(t), \\ &\quad a_{i+1}(t), \dots, a_n(t)), a_{i+1}(t), \dots, a_n(t)), \\ b_s(t) &= \psi_s(q(t), a_1(t), \dots, a_{i-1}(t), \psi_j(q(t), a_1(t), \dots, a_{i-1}(t), \\ &\quad a_{i+1}(t), \dots, a_n(t)), a_{i+1}(t), \dots, a_n(t)), \quad s = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, m. \end{aligned}$$

Считаем, что о.с. применима к f , если она применима в начальном состоянии q_1 , и из ее применимости в состоянии $q(t)$ следует применимость в состоянии $q(t+1)$. Пусть $M \subseteq P$, обозначим через $[M]$ множество всех a -функций, получающихся из M с помощью операций суперпозиции и обратной связи. Множество M называется полным, если $[M] = P$. Проблема полноты для P состоит в описании всех полных множеств M .

Пусть τ — натуральное число, $f(x_1, \dots, x_n)$ — некоторая автоматная функция, $f^\tau: (E_2^\tau)^n \rightarrow (E_2^\tau)^m$ — ограничение этой функции на множество слов длины τ . Скажем, что a -функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_n)$ τ -равны, если $f^\tau = g^\tau$. Обозначим через $[M]_\tau$ множество всех a -функций, τ -равных получающимся из M с помощью операций суперпозиции и обратной связи. Известно [7], что результат применения о.с. τ -равен τ применениям суперпозиции. Множество M называется τ -полным, если $[M]_\tau = P$. Множество M называется A -полным, если $[M]_\tau = P$ при всех τ . Положим $[M]_A = \bigcap [M]_\tau$. Проблема A -полноты для P состоит в описании всех A -полных множеств M . Очевидно, что полное множество

M является A -полным. Обозначим через $P^{(i)}$ класс всех a -функций с не более, чем i состояниями.

Известно, что $[P^{(2)}] = P$, $[P^{(1)}] = P^{(1)}$. Истинностными называются a -функции из $P^{(1)}$. Как отмечалось, для систем a -функций вида $P^{(1)} \cup \nu$, где ν — конечное множество, проблема полноты [3] и A -полноты [5] алгоритмически разрешимы. Пусть Φ — замкнутый класс истинностных функций из $P^{(1)}$. Рассмотрим проблемы полноты и A -полноты для систем вида $\Phi \cup \nu$, которые мы будем называть проблемами Φ -полноты и Φ - A -полноты, соответственно. В данной работе рассматривается случай, когда Φ является классом Поста типа M , D , C , F^2 . Классы типа M суть M_1, M_2, M_3, M_4 , типа C суть C_1, C_2, C_3, C_4 , типа D суть D_1, D_2, D_3 , типа F^2 суть $F_i^2, i = 1, 2, \dots, 8$ [6], где

$$\begin{aligned} M_1 &= [\{xy, x \vee y, 0, 1\}], & M_2 &= [\{xy, x \vee y, 1\}], \\ M_3 &= [\{xy, x \vee y, 0\}], & M_4 &= [\{xy, x \vee y\}], \\ C_1 &= P^{(1)}, & C_2 &= [\{xy, x + y + 1\}], \\ C_3 &= [\{xy, x + y\}], & C_4 &= [\{x \vee y, x(y + z + 1)\}], \\ D_1 &= [\{xy \vee x\bar{z} \vee y\bar{z}\}], & D_2 &= [\{xy \vee xz \vee yz\}], \\ D_3 &= [\{x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}\}], & & \\ F_1^2 &= [\{x \vee y\bar{z}, h(x, y, z)\}], & F_2^2 &= [\{x \vee yz, h(x, y, z)\}], \\ F_3^2 &= [\{1, h(x, y, z)\}], & F_4^2 &= [\{x \vee \bar{y}, h(x, y, z)\}]; \end{aligned}$$

Классы $F_5^2, F_6^2, F_7^2, F_8^2$ двойственны к классам $F_1^2, F_2^2, F_3^2, F_4^2$, соответственно, $h(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Проблема Φ -полноты для каждого класса Φ типа M, C, D, F^2 алгоритмически разрешима.

Теорема 2. Проблема Φ - A -полноты для каждого класса Φ типа M, C, D, F^2 алгоритмически разрешима.

Заметим, что если проблема Φ -полноты (Φ - A -полноты) алгоритмически разрешима для $\Phi = F_1$, то она разрешима для всякого замкнутого класса $F_2 \supseteq F_1$ и двойственного к F_1 замкнутого класса F_1^* . Отсюда следует, что для доказательства теорем достаточно установить их справедливость для $\Phi = D_2$.

3. Основные леммы

Через N обозначим множество натуральных чисел. Положим

$$h(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3,$$

и через $\bar{X}, 1, 0, H$ обозначим автоматные интерпретации соответствующих истинностных функций $\bar{x}, 1, 0, h$. Для натуральных D, N автоматную функцию с уравнениями (1), где

$$m = n = D + N, \quad Q = \{1, \dots, D + N\},$$

и для любого $a \in E_2^{D+N}$

$$\begin{aligned}\varphi(i, a) &= i + 1, & i < D + N, \\ \varphi(D + N, a) &= D,\end{aligned}$$

$\psi(i, a) = 0 \dots 010 \dots 0$, где 1 стоит на i -м месте, назовем (D, N) -счетчиком и обозначим через $B_{D, N}$. Если же при этом $\psi(i, (a_1, \dots, a_{D+N})) = a_i$, где $a_1, \dots, a_{D+N} \in E_2$, то назовем ее (D, N) -селектором и обозначим через $C_{D, N}$.

Без ограничения общности, будем исследовать на полноту и A -полноту системы вида $\{H, f\}$ состоящие из двух a -функций. Пусть j и s — натуральные числа, $j \leq s$. Последовательность

$$(a, b), (a(1), b(1)), \dots, (a(s), b(s)), \quad (2)$$

где $a, a(1), \dots, a(s) \in E_2^n$, $q(1), \dots, q(s) \in Q$, $b, b(1), \dots, b(s) \in E_2^m$, $b(i) = \psi(q(i), a(i))$, $i = 1, \dots, s$, $q(i+1) = \varphi(q(i), a(i))$, $i = 1, \dots, s-1$, $b = \psi(q(j), a)$, $q(1) = q_1$, назовем (s, j) -экспериментом с a -функцией f . Если, кроме того, $\varphi(q(s), a(s)) = q(D)$, $1 \leq D \leq s$, то назовем (2) (D, s, j) -экспериментом с a -функцией f .

Будем использовать знаки $\wedge$ для обозначения покомпонентной конъюнкции, $\vee$ для дизъюнкции произвольного числа векторов из E_2^k при произвольном k . Для обозначения наборов $11 \dots 1$ и $00 \dots 0$ произвольной длины, там где это не приводит к недоразумению, будем использовать, соответственно, 1 и 0 . Для $a \in E_2^k$ и $\delta \in E_2$ определим a^δ и $a\delta \in E_2^k$, полагая

$$a^\delta = \begin{cases} 1 & \text{при } \delta = 0, \\ a & \text{при } \delta = 1, \end{cases} \quad a\delta = \begin{cases} 0 & \text{при } \delta = 0, \\ a & \text{при } \delta = 1. \end{cases}$$

Пусть $\xi, \eta \in E_2^s$. Скажем, что a -функция f сохраняет на (D, s, j) -экспериментах $((s, j)$ -экспериментах) прямую зависимость с коэффициентами (ξ, η) , если для любого эксперимента (2) с a -функцией f

$$\begin{aligned}\left(\left(a \vee \bigwedge_1^s a(i)^{\xi(i)} \right) = 1 \right) \wedge \left(\bar{a} \left(\bigvee_1^s a(i)\eta(i) \right) = 0 \right) \\ \Rightarrow \left(\left(b \vee \bigwedge_1^s b(i)^{\xi(i)} \right) = 1 \right) \wedge \left(\bar{b} \left(\bigvee_1^s b(i)\eta(i) \right) = 0 \right) \quad (3)\end{aligned}$$

Скажем, что a -функция f сохраняет на (D, s, j) -экспериментах $((s, j)$ -экспериментах) двойственную зависимость с коэффициентами (ξ, η) , если для любого эксперимента (2) с a -функцией f

$$\begin{aligned}\left(a \left(\bigvee_1^s a(i)\xi(i) \right) = 0 \right) \wedge \left(\left(\bar{a} \vee \bigwedge_1^s a(i)\eta(i) \right) = 1 \right) \\ \Rightarrow \left(b \left(\bigvee_1^s b(i)\xi(i) \right) = 0 \right) \wedge \left(\left(\bar{b} \vee \bigwedge_1^s b(i)\eta(i) \right) = 1 \right)\end{aligned}$$

Скажем, что a -функция f сохраняет 1 на экспериментах (2), если $a = 1 \Rightarrow b = 1$; сохраняет 0 , если $a = 0 \Rightarrow b = 0$.

Пусть $1 \leq i, j \leq s$; скажем, что a -функция f сохраняет на (D, s, j) экспериментах $((s, j)$ -экспериментах) тождественную зависимость в i -й момент, если для любого указанного эксперимента (2) $a = a(i) \Rightarrow b = b(i)$, сохраняет инверсную зависимость в i -й момент, если для любого эксперимента (2) $a = \bar{a}(i) \Rightarrow b = \bar{b}(i)$.

Предложение 1. Для любых фиксированных натуральных $D, s, j, i, 1 \leq i, j \leq s, D \leq s, \xi, \eta \in E_2^s$ для экспериментов (2) свойства a -функций сохранять прямую зависимость с коэффициентами (ξ, η) , двойственную зависимость с коэффициентами (ξ, η) , тождественную зависимость в i -й момент инверсную зависимость в i -й момент не нарушаются при операциях суперпозиции и обратной связи. A -функция H также сохраняет на всех экспериментах (2) указанные зависимости.

Пусть $Q_t \subseteq Q$ — множество состояний a -функции f , достижимых из начального состояния q_1 за t тактов. Для $p_1, p_2 \in Q$ и натурального s обозначим через $L(p_1, p_2, s)$ множество слов $\beta \in (E_2^{m+n})^s$ вида

$$\beta = \beta(1)\beta(2)\dots\beta(s), \quad \beta(i) = (a(i), b(i)), \quad a(i) \in E_2^n, \quad b(i) \in E_2^m, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

при условии, что

$$\varphi(p_1, a(1), \dots, a(s)) = p_2, \quad b(1), b(2), \dots, b(s) = \bar{\psi}(p_1, a(1), a(2), \dots, a(s)).$$

Пусть $\xi \in E_2^s, \beta(1), \dots, \beta(s) \in (E_2^{m+n})^s$; положим $\mu(\beta, \xi) = \beta(l)$, где l — позиция первой в слове ξ единицы, $\mu(\beta, 0 \dots 0) = \Lambda$, где Λ — пустая буква. Для $\xi, \eta \in E_2^s$ положим

$$\begin{aligned} X(p_1, p_2, \xi, \eta) &= \left\{ \left(\bigwedge_1^s \beta(i)^{\xi(i)}, \bigvee_1^s \beta(i)\eta(i) \right) \mid \beta(1) \dots \beta(s) \in L(p_1, p_2, s) \right\}, \\ Y(p_1, p_2, \xi, \eta) &= \left\{ \left(\bigvee_1^s \beta(i)\xi(i), \bigwedge_1^s \beta(i)^{\eta(i)} \right) \mid \beta(1) \dots \beta(s) \in L(p_1, p_2, s) \right\}, \\ Z(p_1, p_2, \xi) &= \{ \mu(\beta, s) \mid \beta(1) \dots \beta(s) \in L(p_1, p_2, s) \}. \end{aligned}$$

Определим полные графы $GX(\xi, \eta)$, $GY(\xi, \eta)$ и $GZ(\xi)$ с метками на ребрах и множеством вершин Q . В графе $GX(\xi, \eta)$ ребро (p_1, p_2) имеет метку $X(p_1, p_2, \xi, \eta)$, в графе $GY(\xi, \eta)$ метка равна $Y(p_1, p_2, \xi, \eta)$, а в графе $GZ(\xi)$ она равна $Z(p_1, p_2, \xi)$. Пусть

$$\begin{aligned} \widehat{GX} &= \{ GX(\xi, \eta) \mid (\xi, \eta) \in (E_2^s)^* \}, \\ \widehat{GY} &= \{ GY(\xi, \eta) \mid (\xi, \eta) \in (E_2^s)^* \}, \\ \widehat{GZ} &= \{ GZ(\xi) \mid \xi \in E_2^* \}. \end{aligned}$$

Определим автоматы без выхода

$$\begin{aligned} \widehat{AX} &= (E_2^2, \widehat{GX}, \phi_X, G_0), \\ \widehat{AY} &= (E_2^2, \widehat{GY}, \phi_Y, G_0), \\ \widehat{AZ} &= (E_2, \widehat{GZ}, \phi_Z, G_0), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\phi_X(GX(\xi, \eta), (x, y)) &= GX(\xi x, \eta y), \\ \phi_Y(GY(\xi, \eta), (x, y)) &= GY(\xi x, \eta y), \\ \phi_Z(GZ(\xi), x) &= GZ(\xi x), \quad x, y \in E_2,\end{aligned}$$

пусть G_0 — полный граф с пустыми метками. Функции ϕ_X , ϕ_Y и ϕ_Z определены корректно. Обозначим через GX_t , GY_t и GZ_t множества состояний автоматов $\widehat{AX}$, $\widehat{AY}$ и $\widehat{AZ}$, соответственно, достижимых из начального состояния за t тактов. Последовательности $G_0, GX_1, GX_2, \dots$, $G_0, GY_1, GY_2, \dots$ и $G_0, GZ_1, GZ_2, \dots$ периодичны и, без ограничения общности, имеют период и предпериод ρ .

Пусть $\tilde{j}, \tilde{D}, \tilde{s} \in \mathbb{N}$, $\tilde{j} < \tilde{D}$, и α -функция f на $(\tilde{D}, \tilde{s}, \tilde{j})$ -экспериментах сохраняет прямую зависимость с коэффициентами $(\tilde{\xi}_1 \tilde{\xi}_2 \tilde{\xi}_3, \tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2 \tilde{\eta}_3)$, $|(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1)| = \tilde{j}$, $|(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2)| = \tilde{D} - \tilde{j}$, $|(\tilde{\xi}_3, \tilde{\eta}_3)| = \tilde{s} - \tilde{D}$.

Пусть коэффициенты $(\xi_1 \xi_2 \xi_3, \eta_1 \eta_2 \eta_3)$ таковы, что

$$\begin{aligned}\phi_X(G_0, (\xi_1, \eta_1)) &= \phi_X(G_0, (\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1)) = G_1, \\ \phi_X(G_0, (\xi_2, \eta_2)) &= \phi_X(G_0, (\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2)) = G_2, \\ \phi_X(G_0, (\xi_3, \eta_3)) &= \phi_X(G_0, (\tilde{\xi}_3, \tilde{\eta}_3)) = G_3, \\ |(\xi_1, \eta_1)| &= j, \quad |(\xi_2, \eta_2)| = D - j, \quad |(\xi_3, \eta_3)| = s - D;\end{aligned}$$

тогда α -функция f по построению автомата $\widehat{AX}$ сохраняет прямую зависимость с коэффициентами $(\xi_1 \xi_2 \xi_3, \eta_1 \eta_2 \eta_3)$ на (D, s, j) -экспериментах. Сказанное справедливо как для случая $j \geq \tilde{D}$, так и для двойственной зависимости.

Пусть LX — множество троек (G_1, G_2, G_3) состояний автомата $\widehat{AX}$ ($\widehat{AY}$), для любых (ξ_1, η_1) , (ξ_2, η_2) , (ξ_3, η_3) обладающих свойством

$$\phi_X(G_0, (\xi_1, \eta_1)) = G_1, \quad \phi_X(G_0, (\xi_2, \eta_2)) = G_2, \quad \phi_X(G_0, (\xi_3, \eta_3)) = G_3;$$

α -функция f сохраняет прямую (двойственную) зависимость с коэффициентами $(\xi_1 \xi_2 \xi_3, \eta_1 \eta_2 \eta_3)$ на $(|\xi_1 \xi_2|, |\xi_1 \xi_2 \xi_3|, |\xi_1|)$ -экспериментах, RX (RY) — аналогичное множества троек состояний автомата $\widehat{AX}$ ($\widehat{AY}$) для сохранения прямой (двойственной) зависимости с коэффициентами $(\xi_1 \xi_2 \xi_3, \eta_1 \eta_2 \eta_3)$ на $(|\xi_1|, |\xi_1 \xi_2 \xi_3|, |\xi_1 \xi_2|)$ -экспериментах.

Пусть TL (IL) — множество троек G_1, G_2, G_3 состояний автомата $\widehat{AZ}$ таких, что для ξ_1, ξ_2, ξ_3 :

$$\phi_Z(G_0, \xi_l) = G_l, \quad l = 1, 2, 3, \quad \xi_1 \xi_2 \xi_3 = 0 \dots 010 \dots 0$$

на всех $(|\xi_1 \xi_2|, |\xi_1 \xi_2 \xi_3|, |\xi_1|)$ -экспериментах сохраняется тождественная (инверсная) зависимость в i -й момент, где i — позиция первой единицы в слове $\xi_1 \xi_2 \xi_3$. TR , IR — аналогичные множества для $(|\xi_1|, |\xi_1 \xi_2 \xi_3|, |\xi_1 \xi_2|)$ -экспериментов.

Пусть $D, k, N \in \mathbb{N}$; положим

$$\Omega_1(N, D, k) = \bigcup_{j=1}^{D-1} \{(G_1, G_2, G_3) \in LX \mid G_1 \in GX_j, G_2 \in GX_{D-j}, G_3 \in GX_{kN}\},$$

$$\Omega_2(N, D, k) = \bigcup_{j=1}^{D-1} \{(G_1, G_2, G_3) \in LY \mid G_1 \in GY_j, G_2 \in GY_{D-j}, G_3 \in GY_{kN}\},$$

$$\Omega_3(N, D, k) = \bigcup_{j=D}^{D+kN} \{(G_1, G_2, G_3) \in RX \mid G_1 \in GX_D, G_2 \in GX_{j-D}, G_3 \in GX_{kN-j+D}\},$$

$$\Omega_4(N, D, k) = \bigcup_{j=D}^{D+kN} \{(G_1, G_2, G_3) \in RY \mid G_1 \in GY_D, G_2 \in GY_{j-D}, G_3 \in GY_{kN-j+D}\},$$

$$\Omega_5(N, D, k) = \bigcup_{j=1}^{D-1} \{(G_1, G_2, G_3) \in TL \mid G_1 \in GZ_j, G_2 \in GZ_{D-j}, G_3 \in GZ_{kN}\},$$

$$\Omega_6(N, D, k) = \bigcup_{j=D}^{D+kN} \{(G_1, G_2, G_3) \in TR \mid G_1 \in GZ_D, G_2 \in GZ_{j-D}, G_3 \in GZ_{kN-j+D}\},$$

$$\Omega_7(N, D, k) = \bigcup_{j=1}^{D-1} \{(G_1, G_2, G_3) \in IL \mid G_1 \in GZ_j, G_2 \in GZ_{D-j}, G_3 \in GZ_{kN}\},$$

$$\Omega_8(N, D, k) = \bigcup_{j=D}^{D+kN} \{(G_1, G_2, G_3) \in IR \mid G_1 \in GZ_D, G_2 \in GZ_{j-D}, G_3 \in GZ_{kN-j+D}\}.$$

Пусть R — число, кратное длинам всех простых циклов в диаграмме автомата $\widehat{AZ}$, большее, чем число $|\widehat{GX}|$.

Предложение 2. Функция $\Omega_l(N, D, k)$, $l = 1, 2, \dots, 8$, периодична с периодом $R\rho$ по каждому из своих аргументов.

Лемма 1. Система $\{H, f\}$ полна тогда и только тогда, когда для любого натурального N существуют такие D и k , что $\Omega_l(N, D, k) = \emptyset$, $l = 1, \dots, 8$, и для любого $j \leq D + kN$ f не сохраняет $\mathbf{1}$ и не сохраняет $\mathbf{0}$ на (D, s, j) -экспериментах.

Проведем аналогичное построение для A -полноты. Пусть ALX (ALY) — множество пар (G_1, G_2) состояний автомата $\widehat{AX}$ ($\widehat{AY}$) таких, что для любых (ξ_1, η_1) , (ξ_2, η_2) , обладающих свойством

$$\phi_X(G_0, (\xi_1, \eta_1)) = G_1, \quad \phi_X(G_0, (\xi_2, \eta_2)) = G_2$$

α -функция f сохраняет прямую (двойственную) зависимость с коэффициентами $(\xi_1 \xi_2, \eta_1 \eta_2)$ на $(|\xi_1 \xi_2|, |\xi_1|)$ -экспериментах. Пусть AT (AI) — множество пар (G_1, G_2) , состояний $\widehat{AZ}$ таких, что для

$$\xi_1 \xi_2 = 0 \dots 010 \dots 0, \quad \phi_Z(G_0, \xi_1) = G_1, \quad \phi_Z(G_0, \xi_2) = G_2$$

на всех $(|\xi_1 \xi_2|, |\xi_1|)$ -экспериментах сохраняется тождественная (инверсная) зависимость в i -й момент, где i — позиция единственной в слове $\xi_1 \xi_2$ единицы. Положим

$$\omega_1(s) = \bigcup_{j=1}^s \{(G_1, G_2) \in ALX \mid G_1 \in GX_j, G_2 \in GX_{s-j}\},$$

$$\omega_2(s) = \bigcup_{j=1}^s \{(G_1, G_2) \in ALY \mid G_1 \in GY_j, G_2 \in GY_{s-j}\},$$

$$\omega_3(s) = \bigcup_{j=1}^s \{(G_1, G_2) \in AT \mid G_1 \in GZ_j, G_2 \in GZ_{s-j}\},$$

$$\omega_4(s) = \bigcup_{j=1}^s \{(G_1, G_2) \in AI \mid G_1 \in GZ_j, G_2 \in GZ_{s-j}\}.$$

Предложение 3. Для любого натурального s

$$\omega_l(s + R\varrho) = \omega_l(s), \quad l = 1, 2, 3, 4.$$

Лемма 2. Система $\{H, f\}$ A -полна тогда и только тогда, когда $\omega_l(s) = \emptyset$, $l = 1, 2, 3, 4$, для любого s , и f не сохраняет **1** и не сохраняет **0** на (s, j) -экспериментах для любого $j \leq s$.

Из лемм 1, 2 и утверждений 1, 2 и 3 следует доказательство теорем 1 и 2.

4. Доказательства лемм

Доказательство предложения 1. Пусть $f_1 = f_2(f_3)$ и для f_2 и f_3 выполнено (3), тогда для всякого (D, s, j) -эксперимента с f_1 также будет выполнено (3).

Пусть a -функция f получилась операцией обратной связи из a -функции g и при этом эксперимент (2) получился из эксперимента (4)

$$((a, e), (b, e))((a(1), e(1)), (b(1), e(1))), \dots ((a(s), e(s)), (b(s), e(s))). \quad (4)$$

Пусть для (2) справедливо равенство

$$a \left(\bigvee_1^s a(i) \xi(i) \right) = 0, \quad \bar{a} \vee \bigwedge_1^s a(i)^{\eta(i)} = 1.$$

Рассмотрим эксперимент

$$((a, 1), (\tilde{b}, \tilde{e}))((a(1), e(1)), (b(1), e(1))), \dots ((a(s), e(s)), (b(s), e(s))).$$

Для него выполнено соотношение (3), значит

$$\tilde{b} \left(\bigvee_1^s b(i) \xi(i) \right) = 0, \quad \bar{\tilde{b}} \vee \bigwedge_1^s b(i)^{\eta(i)} = 1.$$

По определению операции обратной связи $\tilde{e} = e$, значит и $\tilde{b} = b$, то есть a -функция f сохраняет (3) на (D, s, j) -экспериментах. Случаи сохранения двойственной, тождественной и инверсной зависимости доказываются аналогично. Предложение доказано.

Доказательство леммы 1. Докажем необходимость. Пусть через H и f выражена α -функция g , реализующая $\bar{X}$, тогда существуют такие натуральные D_1, N_1 , что для любых $k_1, j, 1 \leq j \leq D_1 + N_1 k_1 = s_1$, и любых $(\xi, \eta), \eta \neq 0 \dots 0, |(\xi, \eta)| = s_1$, на (D_1, s_1, j) -эксперименте вида $(1, 0), (0, 1), (0, 1) \dots (0, 1)$ не сохраняется прямая зависимость с коэффициентами (ξ, η) . Взяв в качестве g функцию от одного переменного, равную нулю, получим, что найдутся D_2, N_2 такие, что для всех $k_2, j, 1 \leq j \leq D_2 + N_2 k_2 = s_2$, и любого $\xi \in E_2^{s_2}$ на (D_2, s_2, j) -эксперименте вида $(1, 0)(0, 0) \dots (0, 0)$ не сохраняется прямая зависимость с коэффициентами $(\xi, 0 \dots 0)$. Проведя аналогичные рассуждения для двойственной зависимости получим, что для любого N найдутся k_0, D_0 такие, что для всех k и всех $D \geq D_0$

$$\Omega_1(N, D, k_0 k) = \Omega_2(N, D, k_0 k) = \Omega_3(N, D, k_0 k) = \Omega_4(N, D, k_0 k) = \emptyset.$$

Пусть $\Omega_6(N, D, k) \neq \emptyset$ для N и для любых D, k . Без ограничения общности предположим, что $(G_1, G_2, G_3) \in \Omega_6(N, D, k)$ для бесконечного числа D, k , и в каждом из этих случаев сохраняется тождественная зависимость в момент $i(D, k)$, $D \leq i(D, k) \leq j(D, k)$, на $(D, D + kN, j(D, k))$ -экспериментах. Это означает, что для некоторых $\beta = 0 \dots 0, \xi_1 = 0 \dots 0, \xi_2 = 0 \dots 010 \dots 0, \xi_3 = 0 \dots 0, |\beta|, |\xi_l| \leq |GZ|, l = 1, 2, 3, |\beta| = r, |\xi_2 \xi_3| = R$, справедливы равенства

$$\phi_Z(G_0, \xi_1) = \phi_Z(G_0, \xi_1 \beta) = G_1,$$

$$\phi_Z(G_0, \xi_2) = \phi_Z(G_0, \xi_2 \beta) = G_2,$$

$$\phi_Z(G_0, \xi_3) = \phi_Z(G_0, \xi_3 \beta) = G_3.$$

Пусть $N_0 = 2k_0 N r R$ и α -функция g , реализующая счетчик B_{D, N_0} , выражена через H и f ; тогда найдутся L_0, D_0 такие, что для $s = D_0 + L_0 N$ и всех $j = D_0, \dots, D_0 + L_0 N$ найдется (D, s, j) -эксперимент, на котором не сохраняется тождественная зависимость в i -й момент для $|i - j| < L_0 N$. Но тогда и для коэффициентов $\xi_1, \xi_2, \hat{\xi}_3 = 0 \dots 0, |\xi_2 \hat{\xi}_3| = L_0 N_0$, сохраняется тождественная зависимость на всех $(D_0, D_0 + L_0 N, j')$ -экспериментах в i' -й момент и $|i' - j'| < N_0$, что противоречит предположению о выразимости α -функции g . Для $\xi_3 = 0 \dots 010 \dots 0$ получается сохранение тождественной зависимости в момент i' и $|j' + L_0 N - i'| < N$, что также противоречит предположению о выразимости α -функции g . Следовательно, $\Omega_6(N, D_0, L_0) = \emptyset$. Случаи $\Omega_5, \Omega_7, \Omega_8$ рассматриваются аналогично. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Зафиксируем N и построим из α -функций f, H α -функцию счетчик $B_{D_0, N}$ для некоторого D_0 . По условию леммы найдутся такие D и k , что при $s = D + kN$ для любого $1 \leq j \leq s$ и любых $(\xi, \eta) \in (E_2^2)^s$ найдется (D, s, j) эксперимент с f , на котором не выполнена прямая зависимость с коэффициентами (ξ, η) , найдется (D, s, j) -эксперимент с f , на котором не выполнена двойственная зависимость с коэффициентами (ξ, η) , а также для любых $i, j, 1 \leq i, j \leq s$, найдется указанный эксперимент, не сохраняющий инверсную зависимость в i -й момент и (при $i \neq j$) тождественную зависимость.

Зафиксируем D, s, j ; пусть R_j — число разных (D, s, j) -экспериментов, f_j — параллельное соединение $R > R_j$ копий f . Пусть (D, s, j) -эксперимент (2) α -функции f_j — это декартово произведение всех разных (D, s, j) -экспериментов α -функции f . Можно считать (за счет добавки фиктивных входов к f_j), что $m+n$ четно и каждое из $(a(i), b(i))$ содержит ровно $(m+n)/2$ единиц, и среди наборов $(a(i), b(i))$ нет попарно двойственных. Зафиксируем в (2) $(a(1), b(1)), \dots (a(s), b(s))$,

тогда для переменного a справедливо следующее утверждение. Для (ξ, η) найдутся $a_{(\xi, \eta)}, \tilde{a}_{(\xi, \eta)}$ такие, что при $a = a_{(\xi, \eta)}$ (2) не сохраняет прямую зависимость с коэффициентами (ξ, η) , при $a = \tilde{a}_{(\xi, \eta)}$ (2) не сохраняет двойственную зависимость с коэффициентами (ξ, η) , кроме того, если $a = a(i)$, то $b \neq b(i)$ при $i \neq j$; если $a = 0$ то $b \neq 0$; если $a = 1$ то $b \neq 1$; если $a = \tilde{a}(i)$, то $b \neq \tilde{b}(i)$.

Пусть $F \subset E_2^{m+n}$, $F = \{a(i), b(i) \mid i = 1, \dots, s\}$, $\tilde{F}$ — множество наборов длины $m + n$, содержащих меньше, чем $(m + n)/2$ единиц, $\hat{F}$ — множество наборов, содержащее больше $(m + n)/2$ единиц, и множество F' содержит ровно $(m + n)/2$ единиц. Пусть

$$M = \{(a, b) \mid a \in E_2^n, b \in E_2^m, b = \psi(q(j), a)\}.$$

Определим $h_1: E_2^{m+n} \rightarrow E_2^n$, $h_1 \in \{H\}$, полагая

$$h_1(x, y) = \begin{cases} x, & (x, y) \in F, \\ a(j), & (x, y) \in (F' \setminus F) \cap M, \\ 1, & (x, y) \in \hat{F} \cap M, \\ 0, & (x, y) \in \tilde{F} \cap M. \end{cases}$$

Пусть $g_0(X) = h_1(X, f_j(X))$. Для a -функции

$$g_1(X) = (g_0(X), f_j(g_0(X)))$$

рассмотрим (D, s, j) -эксперимент при переменном $a \in E_2^n$

$$(a, (c, d)), (a(1), (a(1), b(1))), \dots, (a(s), (a(s), b(s))).$$

Тогда $(c, d) \in \{(a(j), b(j)), (1, d_1), (0, d_0)\}$, где $d_1 = \psi(q(j), 1)$, $d_0 = \psi(q(j), 0)$. Пусть

$$I_1 = \{i \mid (a(i), b(i)) \vee (1, d_1) = 1\}, \\ J_1 = \{i \mid (a(i), b(i)) \leq (1, d_1)\}.$$

Если I_1 и J_1 одновременно не пусты, то определим $h_2: E_2^{m+n} \rightarrow E_2^n$, $h_2 \in [\{H\}]$, полагая

$$h_2(x, y) = \begin{cases} x, & (x, y) \in F', \\ a_{(\xi_1, \eta_1)}, & (x, y) = (1, d_1), \\ 0, & (x, y) = (0, d_0), \end{cases}$$

где $\xi_1(i) = 1$ при $i \in I_1$, $\xi_1(i) = 0$ при $i \notin I_1$, $\eta_1(i) = 1$ при $i \in J_1$, $\eta_1(i) = 0$ при $i \notin J_1$. Для a -функции

$$g_2(X) = (g_1(X), h_2(g_1(X)), f_j(h_2(g_1(X))))$$

рассмотрим (D, s, j) -эксперимент при переменном a

$$(a, c, d, e, f)(a(1), a(1), b(1), a(1), b(1)), \dots, (a(s), a(s), b(s), a(s), b(s));$$

тогда $(c, d, e, f) \in \{(a(j), b(j), a(j), b(j)), (1, d_1, a_{(\xi_1, \eta_1)}, d_2), (0, d_0, 0, d_0)\}$, где $d_2 = \psi(q(j), a_{(\xi_1, \eta_1)})$. Пусть

$$I_2 = \{i \mid (a(i), b(i), a(i), b(i)) \vee (1, d_1, a_{(\xi_1, \eta_1)}, d_2) = 1\}, \\ J_2 = \{i \mid (a(i), b(i), a(i), b(i)) \leq (1, d_1, a_{(\xi_1, \eta_1)}, d_2)\}.$$

Тогда либо $J_2 \subset J_1$, либо $I_2 \subset I_1$. Если I_2 и J_2 одновременно не пусты, то определим $h_3: E_2^{m+n} \times E_2^{m+n} \rightarrow E_2^n$, полагая

$$h_3(x, y, u, v) = \begin{cases} x, & (x, y, x, y) \in F \times F, \\ a_{(\xi_2, \eta_2)}, & (x, y, u, v) = (1, d_1, a_{(\xi_1, \eta_1)}, d_2), \\ 0, & (x, y, u, v) = (0, d_0, 0, d_0), \end{cases}$$

где $\xi_2(i) = 1$ при $i \in I_2$, $\xi_2(i) = 0$ при $i \notin I_2$, $\eta_2(i) = 1$ при $i \in J_2$, $\eta_2(i) = 0$ при $i \notin J_2$, и рассмотрим

$$g_3(X) = (g_2(X), h_3(g_2(X)), f_j(h_3(g_2(X))))$$

и множества

$$I_3 = \{i \mid (a(i), b(i), a(i), b(i), a(i), b(i))) \vee (1, d_1, a_{(\xi_1, \eta_1)}, d_2, a_{(\xi_2, \eta_2)}, d_3) = 1\},$$

$$J_3 = \{i \mid (a(i), b(i), a(i), b(i), a(i), b(i))) \leq (1, d_1, a_{(\xi_1, \eta_1)}, d_2, a_{(\xi_2, \eta_2)}, d_3)\}$$

для которых либо $I_3 \subset I_2$, либо $J_3 \subset J_2$. Этот процесс закончится, когда $I_{l+1} = \emptyset$, $J_{l+1} = \emptyset$ для некоторого l , и функция $h_{l+1}: (E_2^{m+n})^l \rightarrow E_2^n$, $h_{l+1} \in [\{H\}]$, удовлетворяет условиям $h_{l+1}(x, y, x, y, \dots, x, y) = x$ при $(x, y) \in F$, $h_{l+1}(1, d_1, a_{(\xi_1, \eta_1)}, d_2, \dots, a_{(\xi_l, \eta_l)}, d_l) = a(j)$, $h_{l+1}(0, d_0, \dots, 0, d_0) = 0$.

A -функция $g(X) = g_{l+1}(X)$ имеет (D, s, j) -путь (2) такой, что

$$\{\psi(q(j), a) \mid a \in E_2^n\} = \{0, a(j)\}.$$

Пусть

$$\tilde{J}_1 = \{i \mid (a(i), b(i)) \geq (0, d_0)\},$$

$$\tilde{I}_1 = \{i \mid ((a(i), b(i)) \wedge (0, d_0)) = 0\}.$$

Аналогично предыдущему, построим цепочку множеств

$$\tilde{I}_1 \supset \tilde{I}_2 \supset \dots \supset \tilde{I}_k = \emptyset, \quad \tilde{J}_1 \supset \tilde{J}_2 \supset \dots \supset \tilde{J}_k = \emptyset,$$

где вместо a -функции f будет использоваться a -функция g . Полученная таким способом из g , H a -функция C_j имеет (D, s, j) -эксперимент (2) такой, что $\psi(q(j), a) = a(j)$ при всех $a \in E_2^n$. A -функция $C = f(C_1(C_2(\dots C_s(x) \dots)))$ имеет (D, s, j) -эксперимент (2), в каждом состоянии l , $l = 1, 2, \dots, s$, которого реализуется константа $(a(l), b(l))$. Применив к этой a -функции операцию обратной связи, получим константную a -функцию Ω с выходным словом $(a(1), b(1)) \dots (a(s), b(s))(a(D), b(D)) \dots (a(s), b(s)) \dots$. Найдется $\delta \in [\{H\}]$ такая, что $\delta(a(j), b(j)) = 0 \dots 010 \dots 0$ для всех j , где 1 стоит на j -том месте, следовательно, $B_{D,N} \in [\{\delta, f\}]$. Найдутся также такие $\delta_0, \delta_1 \in [\{H\}]$, что $\delta_0(a(j), b(j)) = 0$, $\delta_1(a(j), b(j)) = 1$, $j = 1, 2, \dots, s$. Значит, из a -функции f можно получить все константные a -функции, в том числе константы 0 и 1.

Система $\{0, 1, H\}$ порождает все монотонные функции, в том числе

$$\delta_0(x_1, \dots, x_{D+N}, y_1, \dots, y_{D+N}) = x_1 y_1 \vee \dots \vee x_{D+N} y_{D+N},$$

$$x_1, \dots, x_{D+N} \in E_2^k, \quad y_1, \dots, y_{D+N} \in E_2.$$

Для любого k можно получить a -функцию (D, N) -селектор

$$C_{D,N}(X_1, \dots, X_{D+N}) = \delta_0(X_1, \dots, X_{D+N}, B_{D,N}).$$

Зафиксируем j , $1 \leq j \leq D + N$. Для (ξ, η) , где $\xi = 0 \dots 0, \eta = 0 \dots 010 \dots 0$, где 1 стоит на j -м месте, несохранение прямой зависимости означает, что для некоторого a в (3) $\bar{a}a(j) = 0, \bar{b}b(j) \neq 0$, т.е. $a \geq a(j), b \not\geq b(j)$. Пусть $\delta_{3,j}, \delta_{4,j}$ — монотонные вектор-функции $\delta_{3,j}: E_2 \rightarrow E_2^n, \delta_{4,j}: E_2^m \rightarrow E_2$, такие, что $\delta_{3,j}(0) = a(j), \delta_{3,j}(1) = a, \delta_{4,j}(b) = 0, \delta_{4,j}(b(j)) = 1$. Пусть $f'_j: E_2^* \rightarrow (E_2^n)^*, f''_j: (E_2^m)^* \rightarrow E_2^*, v_j: E_2^* \rightarrow E_2^*$ таковы, что

$$f'_j(X) = C_{D,N}(a(1), \dots, a(j-1), \delta_{3,j}(X), a(j+1), \dots, a(D+N)),$$

$$f''_j = C_{D,N}(0, \dots, 0, \delta_{4,j}, 0, \dots, 0), \quad v_j = f''_j(f'_j).$$

Тогда a -функция v_j имеет (D, s, j) -эксперимент вида

Выбрав $\delta'_{3,j}(1) = a(j), \delta'_{3,j}(0) = a, \delta'_{4,j}(b) = 1, \delta'_{4,j}(b(j)) = 0$, получим w_j , имеющую (D, s, j) -эксперимент вида

Пусть a -функция u_j выразима через $C_{D,N}, B_{D,N}, H, 0, 1$ и имеет диаграмму

Тогда $\Delta_j(X, Y) = w_j(X \vee Y) \vee (v_j(X \wedge Y) \wedge u_j(Y))$ после применения обратной связи ко входу Y даст $\Gamma_j(X)$ с диаграммой

Положим

$$\Gamma(X) = \bigvee_1^s \Gamma_j(X) = \bar{X}.$$

Согласно [3], система $\{f, H\}$ полна. Лемма доказана.

Лемма 2 доказывается аналогично.

Список литературы

1. Кудрявцев В. Б. О мощности множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами. *Пробл. киберн.* (1965) **13**, 45–74.
2. Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов. *Докл. АН СССР* (1964) **155**, №1, 35–37.
3. Бабин Д. Н. Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций. *Дискретная математика* (1992) **4**, №4, 41–45.
4. Буевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания A -полноты. *Матем. заметки* (1972) **12**, №6, 687–697.
5. Буевич В. А. *Условия A -полноты для конечных автоматов*. Изд-во МГУ, Москва, 1986.
6. Кудрявцев В. Б., Гаврилов Г. П., Яблонский С. В. *Функции алгебры логики и классы Поста*. Наука, Москва, 1966.
7. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
8. Мальцев А. И. *Итеративные алгебры Поста*. Изд-во ИМСО АН СССР, Новосибирск, 1976.
9. Мальцев А. И. *Алгоритмы и рекурсивные функции*. Наука, Москва, 1986.
10. Бабин Д. Н. Неразрешимость проблемы полноты и A -полноты некоторых систем a -функций. *Дискретная математика* (1995) **7**, №1, 52–65.

Статья поступила 04.01.95.