Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Бувеч, Вариант доказательства критерия полноты для функций k -значной логики, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 4, 11–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm544>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:19:30

Вариант доказательства критерия полноты для функций k -значной логики

© 1996 г. В. А. Буюевич

Приводится вариант доказательства критерия полноты в терминах предполных классов для функций k -значной логики. В основе его по-прежнему лежит идея сохранения этими функциями отношений (предикатов), предложенная Е. Постом и позже развитая С. В. Яблонским, А. В. Кузнецовым, И. Розенбергом, Ло Чжу-каем, В. Б. Кудрявцевым, Е. Ю. Захаровой и др. Суть нашего рассмотрения состоит в несколько ином подходе к процессу выделения из множества всех отношений тех из них, классы сохранения которых совпадают с предполными. Этот подход возник при изучении задачи об r -полноте в классе детерминированных функций. Использование его позволяет сделать короче известное доказательство И. Розенберга.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 93-01-00382.

1. Семейства отношений Z, D, J, L, M, S

Пусть $k \geq 3$, $E_k = \{0, \dots, k-1\}$. Пусть P_k — множество всех функций k -значной логики, т.е. функций $f(x_1, \dots, x_n)$ таких, что их аргументы и они сами принимают значения из E_k . На P_k обычным образом вводятся операции суперпозиции, понятия замыкания и замкнутого множества [1, 2]. Пусть $\mathcal{M} \subseteq P_k$. Замыкание множества $\mathcal{M}$ будем обозначать $[\mathcal{M}]$. Множество $\mathcal{M}$ называется полным, если $[\mathcal{M}] = P_k$. Пусть $\mathcal{N} \subset P_k$. Множество $\mathcal{N}$ называется предполным классом в P_k , если $[\mathcal{N}] \neq P_k$, но для любой функции $f \notin \mathcal{N}$ имеет место равенство $[\mathcal{N} \cup \{f\}] = P_k$.

Пусть $h \geq 1$. Через $E_k(h)$ обозначим множество всех наборов длины h , составленных из элементов E_k . Произвольное непустое подмножество $\rho \subseteq E_k(h)$ называется отношением, заданным на E_k , а число h — арностью этого отношения. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ сохраняет отношение ρ , если для любой совокупности $(\alpha_1^1, \dots, \alpha_h^1), \dots, (\alpha_1^n, \dots, \alpha_h^n)$ элементов из ρ набор $(f(\alpha_1^1, \dots, \alpha_h^1), \dots, f(\alpha_1^n, \dots, \alpha_h^n))$ также принадлежит ρ . Множество $\mathcal{M}$ сохраняет отношение ρ , если каждая функция из $\mathcal{M}$ сохраняет это отношение. Множество всех функций, сохраняющих некоторое отношение ρ , обозначим $U(\rho)$.

Дадим определения шести семейств отношений, классы сохранения которых совпадают с предполными.

Пусть $h \geq 1$, $\rho \subseteq E_k(h)$. Отношение ρ называется рефлексивным, если либо $h = 1$, либо $h \geq 2$ и любой неразнозначный набор принадлежит отношению ρ . Отношение ρ называется симметричным, если либо $h = 1$, либо $h \geq 2$ и для

всякого набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$, принадлежащего ρ , и любой подстановки σ чисел $1, \dots, h$ набор $(\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(h)})$ принадлежит отношению ρ . Множество $C_\rho \subseteq E_k$ называется центром симметричного отношения ρ , если для всякого $\beta \in C_\rho$ и любых $\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}$ набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}, \beta)$ принадлежит ρ . В качестве центра любого унарного отношения будем рассматривать само это отношение.

Семейство отношений Z . Пусть $h \geq 1$. Отношение ρ арности h принадлежит подсемейству Z_h семейства Z тогда и только тогда, когда ρ рефлексивно, симметрично и имеет непустой центр, отличный от множества E_k . Семейство отношений Z есть объединение семейств Z_h , взятое по всем h , принадлежащим множеству $\{1, \dots, k-1\}$.

Семейство отношений D . Бинарное отношение ρ принадлежит D лишь в том случае, если для некоторого m , $2 \leq m \leq k-1$, существует разбиение E_k на подмножества $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m$ и справедливо следующее: набор (α_1, α_2) принадлежит ρ тогда и только тогда, когда существует $q \in \{1, \dots, m\}$ такое, что $\alpha_1 \in \mathcal{E}_q$, $\alpha_2 \in \mathcal{E}_q$.

Пусть $h \geq 3$. Отношение ρ будем называть h -элементарным в том случае, если существует разбиение λ_ρ множества E_k на подмножества $\mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_{h-1}$ такое, что набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ принадлежит ρ тогда и только тогда, когда существуют i, j, l из $\{0, \dots, h-1\}$ такие, что $i \neq j$, $\{\alpha_{i+1}, \alpha_{j+1}\} \subseteq \mathcal{E}_l$. Пусть $s \geq 1$, $P = \{\rho_1, \dots, \rho_s\}$ — система h -элементарных отношений, при этом отношения $\rho_1, \dots, \rho_s$ задаются соответственно с помощью разбиений

$$\lambda_{\rho_1}: E_k = \mathcal{E}_0^1 \cup \dots \cup \mathcal{E}_{h-1}^1, \dots, \lambda_{\rho_s}: E_k = \mathcal{E}_0^s \cup \dots \cup \mathcal{E}_{h-1}^s.$$

Систему отношений P назовем J -совместимой, если либо $s = 1$, либо $s \geq 2$ и для любых $i_1, \dots, i_s$ из $\{0, \dots, h-1\}$ имеет место соотношение $\mathcal{E}_{i_1}^1 \cap \dots \cap \mathcal{E}_{i_s}^s \neq \emptyset$.

Семейство отношений J . Пусть $h \geq 3$. Отношение ρ арности h принадлежит подсемейству J_h семейства J тогда и только тогда, когда существуют число $s \geq 1$ и J -совместимая система $\{\rho_1, \dots, \rho_s\}$ h -элементарных отношений такие, что

$$\rho = \bigcap_{i=1}^s \rho_i.$$

Семейство отношений J есть объединение семейств J_h , взятое по всем h , принадлежащим множеству $\{3, \dots, k\}$.

Пусть $k = p^m$, где p — простое число, $m \geq 1$. Абелева группа $G = \langle E_k, \oplus \rangle$ называется элементарной p -группой, если каждый ее ненулевой элемент имеет порядок p [1, 5].

Семейство отношений L . Пусть $k = p^m$, p — простое число, $m \geq 1$. Отношение ρ арности четыре принадлежит семейству L лишь в том случае, если существует элементарная p -группа $G = \langle E_k, \oplus \rangle$ такая, что справедливо следующее: набор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ принадлежит ρ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 \oplus \alpha_2 = \alpha_3 \oplus \alpha_4$.

Семейство отношений M . Бинарное отношение ρ принадлежит семейству M лишь в том случае, если для некоторого отношения частичного порядка $\preceq$, определенного на множестве E_k и имеющего в точности один минимальный и один максимальный элементы, справедливо следующее: набор (α_1, α_2) принадлежит ρ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 \preceq \alpha_2$.

Семейство отношений S . Бинарное отношение ρ принадлежит семейству S лишь в том случае, если существует подстановка σ , определенная на E_k , которая разлагается в произведение циклов одинаковой простой длины $p \geq 2$, и справедливо следующее: набор (α_1, α_2) принадлежит ρ тогда и только тогда, когда $\alpha_2 = \sigma(\alpha_1)$.

Целью данной работы является доказательство следующей теоремы [1, 3, 4].

Теорема 1. Множество $\mathcal{M} \subseteq P_k$ является полным тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ не сохраняет ни одного отношения из объединения семейств Z, D, J, L, M, S .

Кроме того, имеет место следующая теорема [1, 3, 4].

Теорема 2. Множество $\mathcal{N} \subseteq P_k$ является предполным классом тогда и только тогда, когда существует $\rho \in Z \cup D \cup J \cup L \cup M \cup S$ такое, что $\mathcal{N} = U(\rho)$.

2. Тупиковые отношения, отношение предпорядка $\preceq$, семейства отношений $\mathcal{P}, \tilde{L}, \tilde{M}, \tilde{S}$

Пусть $S = \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots\}$ — система замкнутых подмножеств P_k . Систему S назовем критериальной, если справедливо следующее: множество $\mathcal{M} \subseteq P_k$ является полным тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ целиком не содержится ни в одном из множеств системы S .

Пусть P_k^1 — множество всех функций из P_k , зависящих не более чем от одной переменной.

Теорема 3 (критерий Слупецкого-Яблонского [1, 2]). Пусть $\mathcal{M} \subseteq P_k$, причем $P_k^1 \subseteq \mathcal{M}$. Множество $\mathcal{M}$ является полным тогда и только тогда, когда в $\mathcal{M}$ содержится функция, существенно зависящая более, чем от одной переменной, множество значений которой совпадает с E_k .

Используя утверждение теоремы 3 легко доказать, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Совокупность классов сохранения всех отношений ρ арности k таких, что $U(\rho) \neq P_k$, образует критериальную систему в P_k .

Пусть $h \geq 1$, $h' \geq 1$, ρ, ρ' — отношения арностей h и h' соответственно. Отношения ρ и ρ' назовем эквивалентными, если $U(\rho) = U(\rho')$. Отношение ρ назовем приведенным, если ρ является собственным подмножеством множества $E_k(h)$ и при $h \geq 2$ для любых i, j из $\{1, \dots, h\}$, $i \neq j$, в ρ существует набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ такой, что $\alpha_i \neq \alpha_j$.

Легко видеть, что имеют место следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть $h \geq 2$, $\rho \in E_k(h)$, ρ не является приведенным, $U(\rho) \neq P_k$. Существует приведенное отношение, которое эквивалентно ρ .

Лемма 2. Пусть ρ — приведенное отношение. Тогда $U(\rho) \neq P_k$.

Пусть $h \geq 1$, $\rho \in E_k(h)$. Отношение ρ назовем тупиковым, если ρ — приведенное отношение и при $h \geq 2$ для любых $i \in \{1, \dots, h\}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_h$ существует α такое, что набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_h)$ принадлежит ρ .

Лемма 3. Пусть $h \geq 2$, $\rho \in E_k(h)$, ρ — приведенное отношение. Существует тупиковое отношение $\tilde{\rho}$ арности, не превосходящей h , такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Из теоремы 4 и лемм 1, 2, 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Совокупность классов сохранения всех тупиковых отношений, арность которых не превосходит k , образует критериальную систему в P_k .

Лемма 4. Пусть $h \geq 2$, $\rho \in E_k(h)$, ρ — тупиковое отношение. Для любых $i \in \{1, \dots, h\}$, набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_h)$ из $E_k(h) \setminus \rho$ существует $\alpha'_i \in E_k$ такое, что $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha'_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_h)$ принадлежит ρ .

Пусть $h \geq 1$. Расширим область определения функций из P_k , полагая, что переменные $x_1, \dots, x_n$ функции $f(x_1, \dots, x_n)$ принимают значения из $E_k(h)$. Пусть переменные $x_1, \dots, x_n$ принимают значения $A_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_h^1), \dots, A_n = (\alpha_1^n, \dots, \alpha_h^n)$ соответственно. Тогда $f(A_1, \dots, A_n) = A$, где $A = (f(\alpha_1^1, \dots, \alpha_h^1), \dots, f(\alpha_1^n, \dots, \alpha_h^n))$.

Пусть $h \geq 2$, $\rho \in E_k(h)$. Отношение ρ_s арности h назовем симметрическим ядром отношения ρ , если справедливо следующее: набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ принадлежит ρ_s тогда и только тогда, когда для любой подстановки σ чисел $1, \dots, h$ набор $(\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(h)})$ принадлежит ρ .

Лемма 5. Пусть $h \geq 2$, $\rho \in E_k(h)$, ρ_s — симметрическое ядро отношения ρ , $\rho_s \neq \emptyset$. Тогда $U(\rho) \subseteq U(\rho_s)$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная функция из $U(\rho)$, $A_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_h^1), \dots, A_n = (\alpha_1^n, \dots, \alpha_h^n)$ — произвольный набор элементов из ρ_s , $f(A_1, \dots, A_n) = A$, где $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ и σ — произвольная подстановка чисел $1, \dots, h$. В силу определения отношения ρ_s наборы $A_1^\sigma = (\alpha_{\sigma(1)}^1, \dots, \alpha_{\sigma(h)}^1), \dots, A_n^\sigma = (\alpha_{\sigma(1)}^n, \dots, \alpha_{\sigma(h)}^n)$ принадлежат ρ . Пусть $A^\sigma = (\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(h)})$. Очевидно, $f(A_1^\sigma, \dots, A_n^\sigma) = A^\sigma$. Так как $A_1^\sigma \in \rho, \dots, A_n^\sigma \in \rho, f(x_1, \dots, x_n) \in U(\rho)$, то справедливо включение $A^\sigma \in \rho$. Из произвольности выбора подстановки σ следует, что $A \in \rho_s$. Таким образом, $U(\rho) \subseteq U(\rho_s)$.

Из лемм 2 и 5 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть $h \geq 2$, $\rho \in E_k(h)$, ρ рефлексивно. Тогда справедливы следующие утверждения.

- (а) Пусть $h \geq 3$. Тогда существует рефлексивное и симметричное отношение $\tilde{\rho}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$, $U(\tilde{\rho}) \neq P_k$.

- (б) Пусть $h = 2$, существуют α, β такие, что $\alpha \neq \beta$, $(\alpha, \beta) \in \rho$, $(\beta, \alpha) \in \rho$. Тогда существует рефлексивное и симметричное отношение $\tilde{\rho}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$, $U(\tilde{\rho}) \neq P_k$.

В качестве $\tilde{\rho}$ рассмотрим симметричное ядро ρ . Очевидно, $\tilde{\rho}$ рефлексивно, симметрично и является приведенным. Поэтому $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$, $U(\tilde{\rho}) \neq P_k$.

Пусть $h \geq 2$. На множестве $E_k(h)$ введем отношение предпорядка $\preceq$ [5]. Пусть $A' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_h)$, $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_h)$; $A' \preceq A$ тогда и только тогда, когда для любых i, j из $\{1, \dots, h\}$ из равенства $\alpha_i = \alpha_j$ следует равенство $\alpha'_i = \alpha'_j$; $A' \prec A$, если $A' \preceq A$ и существуют i, j из $\{1, \dots, h\}$ такие, что $\alpha'_i = \alpha'_j$, но $\alpha_i \neq \alpha_j$. Наборы A', A из $E_k(h)$ совпадают по отношению предпорядка $\preceq$, если $A' \preceq A$, $A \preceq A'$.

Лемма 6. Пусть $A' \preceq A$. Существует функция $f(x)$ такая, что $f(A) = A'$.

Пусть $h \geq 2$, $A \in E_k(h)$. Множество всех A' из $E_k(h)$ таких, что $A' \preceq A$, обозначим через $\pi(A)$.

Лемма 7. Пусть $h \geq 2$, $A \in E_k(h)$, $f(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная функция из P_k . Пусть $A_1 \in \pi(A), \dots, A_n \in \pi(A)$. Тогда $f(A_1, \dots, A_n) \in \pi(A)$.

Доказательство. Пусть $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_h)$, $A_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_h^1), \dots, A_n = (\alpha_1^n, \dots, \alpha_h^n)$, $f(A_1, \dots, A_n) = A'$, $A' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_h)$. Если $A' \notin \pi(A)$, то существуют i, j из $\{1, \dots, h\}$ такие, что $\alpha_i = \alpha_j$, но $\alpha'_i \neq \alpha'_j$. Вместе с тем, так как $A_1 \preceq A, \dots, A_n \preceq A$, то $\alpha_i^1 = \alpha_j^1, \dots, \alpha_i^n = \alpha_j^n$. Кроме того, $\alpha'_i = f(\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^n)$, $\alpha'_j = f(\alpha_j^1, \dots, \alpha_j^n)$. Поэтому $\alpha'_i = \alpha'_j$. Из полученного противоречия следует утверждение леммы.

Следствие 3. Пусть $h \geq 2$, $\rho \subseteq E_k(h)$, $A \in E_k(h)$, $\tilde{\rho} = \rho \cap \pi(A)$. Тогда, если $\tilde{\rho} \neq \emptyset$, то $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Рассмотрим четыре семейства отношений: семейства $\mathcal{P}, \tilde{M}, \tilde{L}, \tilde{S}$.

Семейство $\mathcal{P}$ состоит из всех тупиковых, рефлексивных и симметричных отношений.

Семейство $\tilde{M}$ состоит из всех рефлексивных бинарных отношений ρ , симметрическое ядро которых совпадает с $\{(0, 0), \dots, (k-1, k-1)\}$, но для некоторых α, β , $\alpha \neq \beta$, $(\alpha, \beta) \in \rho$.

Семейство $\tilde{L}$ состоит из всех тупиковых отношений ρ арности $h \geq 3$, для которых справедливо следующее: существует набор длины h , составленный из двух различных элементов E_k , не принадлежащий ρ ; если некоторый набор A с данным свойством не принадлежит ρ , то всякий набор, совпадающий с A по отношению предпорядка $\preceq$ также не принадлежит ρ ; любой набор длины h , составленный из единственного элемента E_k , принадлежит отношению ρ .

Семейство $\tilde{S}$ состоит из всех тупиковых бинарных отношений ρ таких, что для любого α набор (α, α) не принадлежит ρ .

Теорема 5. Пусть $h \geq 1$, ρ — произвольное тупиковое отношение арности h . Существует $\tilde{\rho} \in \mathcal{P} \cup \tilde{M} \cup \tilde{L} \cup \tilde{S}$ такое, что арность $\tilde{\rho}$ не больше h и $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Доказательство. Если ρ — унарное отношение, то $\rho \in \mathcal{P}$ по определению. Пусть $h \geq 2$. Так как ρ — тупиковое отношение, $\rho \subset E_k(h)$. Зафиксируем некоторый элемент $B = (\beta_1, \dots, \beta_h)$, не принадлежащий ρ , для которого справедливо следующее. Пусть $B' \notin \rho$. Тогда либо $B \preceq B'$, либо B и B' не сравнимы по отношению предпорядка $\preceq$. Действительно, в противном случае в качестве исходного можно было бы выбрать B' . Рассмотрим возникающие случаи.

(А) Пусть $h \geq 3$, существуют j, i, l из $\{1, \dots, h\}$ такие, что $\beta_i \neq \beta_j$, $\beta_i \neq \beta_l$, $\beta_j \neq \beta_l$. Пусть $\rho' = \rho \cap \pi(B)$. Тогда $U(\rho) \subseteq U(\rho')$. Элемент B выбран так, что $\rho' \neq \emptyset$, $\rho' \neq E_k(h)$ и любой элемент $B' \prec B$ принадлежит ρ' . Поэтому существует приведенное рефлексивное отношение $\tilde{\rho}'$, эквивалентное ρ' , арность которого не меньше трех (лемма 1). В силу следствия 3 существует отношение $\tilde{\rho}$ такое, что $\tilde{\rho} \in P$, $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

(Б) Пусть $h \geq 2$, набор B составлен из двух различных элементов, причем существует набор $\tilde{B}$, совпадающий с B по отношению предпорядка $\preceq$ и принадлежащий ρ . Пусть $\tilde{B}$ составлен из α и β . Пусть $\rho' = \rho \cap \pi(B)$. Тогда $U(\rho) \subseteq U(\rho')$ и существует приведенное, рефлексивное бинарное отношение $\tilde{\rho}'$, эквивалентное ρ' , такое, что либо $(\alpha, \beta) \in \tilde{\rho}'$, либо $(\beta, \alpha) \in \tilde{\rho}'$ (лемма 1). Возможны два подслучая случая Б.

(Б1) Существуют α', β' такие, что $\alpha' \neq \beta'$, $(\alpha', \beta') \in \tilde{\rho}'$, $(\beta', \alpha') \in \tilde{\rho}'$. Пусть $\tilde{\rho}$ — симметрическое ядро $\tilde{\rho}'$. В силу следствия 3 $\tilde{\rho} \in P$, $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

(Б2) Для любых α', β' таких, что $\alpha' \neq \beta'$, либо (α', β') принадлежит $\tilde{\rho}'$, но (β', α') не принадлежит $\tilde{\rho}'$, либо наоборот. Тогда $\tilde{\rho}' \in \tilde{M}$ в силу определения семейства $\tilde{M}$.

(В) Пусть $h \geq 2$, набор B составлен из двух различных элементов и любой набор $\tilde{B}$, совпадающий с B по отношению предпорядка $\preceq$, не принадлежит ρ . Пусть $h = 2$. Тогда $\rho = \{(0, 0), \dots, (k-1, k-1)\}$, что противоречит тупиковости ρ . Поэтому $h \geq 3$. Если существуют наборы $B', \tilde{B}'$, каждый из которых составлен из двух различных элементов, совпадающие по отношению предпорядка $\preceq$ и такие, что $B' \in \rho$, $\tilde{B}' \notin \rho$, то в силу Б существует $\tilde{\rho} \in P \cup \tilde{M}$, такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$. В противном случае, как нетрудно видеть, $\rho \in \tilde{L}$, что следует из определения семейства отношений $\tilde{L}$.

(Г) Пусть $h \geq 2$, набор B составлен из одного элемента, т.е. $\beta_1 = \dots = \beta_h$. Так как ρ — тупиковое отношение, в ρ существует $\tilde{B} = (\beta_1, \dots, \beta_{h-1}, \tilde{\beta}_h)$, где $\tilde{\beta}_h \neq \beta_h$ (лемма 4). Рассмотрим отношение $\rho' = \rho \cap \pi(\tilde{B})$. Если $h > 2$, то путем вычеркивания первых $h-2$ компонент из каждого набора, принадлежащего ρ' , получим бинарное приведенное отношение $\tilde{\rho}'$, эквивалентное ρ' (лемма 1). Отношение $\tilde{\rho}'$, вообще говоря, может не быть тупиковым. Но тогда существует унарное отношение $\tilde{\rho} \in P$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$ (лемма 3). Если ρ' — тупиковое отношение, то $\rho' \in \tilde{S}$. Рассмотрены все случаи. Теорема доказана.

Из теорем 4 и 5 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. Совокупность классов сохранения отношений, принадлежащих объединению семейств $\mathcal{P}, \tilde{M}, \tilde{L}, \tilde{S}$ образует критериальную систему в P_k .

Пусть $h \geq 1$. Подсемейства семейств отношений $\mathcal{P}$ и $\tilde{L}$, состоящие из всех отношений арности h , будем обозначать соответственно $\mathcal{P}_h$ и $\tilde{L}_h$.

3. Понятие $(\rho, \tilde{h}, h', M)$ -отношения

Пусть $h \geq 1$, ρ — отношение арности h , причем $U(\rho) \neq P_k$. Пусть $\tilde{h} \geq 1$, $h' \geq \tilde{h}$, $s \geq 1$, $M = (i_1^1, \dots, i_h^1), \dots, (i_1^s, \dots, i_h^s)$ — множество наборов длины h , составленных из элементов $\{1, \dots, h'\}$.

Определим $(\rho, \tilde{h}, h', M)$ -отношение $\tilde{\rho}$ следующим образом.

- (a) Отношение $\tilde{\rho}$ имеет арность $\tilde{h}$.
- (b) Пусть $\tilde{h} < h'$. Набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{\tilde{h}})$ принадлежит $\tilde{\rho}$ тогда и только тогда, когда существуют $\alpha_{\tilde{h}+1}, \dots, \alpha_{h'}$ такие, что для любого $q \in \{1, \dots, s\}$ набор $(\alpha_{i_1^q}, \dots, \alpha_{i_h^q})$ принадлежит ρ .
- (c) Пусть $\tilde{h} = h'$. Набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{\tilde{h}})$ принадлежит $\tilde{\rho}$ тогда и только тогда, когда для любого $q \in \{1, \dots, s\}$ набор $(\alpha_{i_1^q}, \dots, \alpha_{i_h^q})$ принадлежит ρ .

Пусть $\tilde{h} \geq 1$, $\tilde{\rho}$ — непустое отношение арности $\tilde{h}$, отличное от $E_k(\tilde{h})$. Функцию f назовем $\tilde{\rho}$ -существенной, если множество значений функции f включает в себя значения $\alpha_1, \dots, \alpha_{\tilde{h}}$ такие, что $(\alpha_1, \dots, \alpha_{\tilde{h}})$ не принадлежит $\tilde{\rho}$.

Теорема 6. Пусть $h \geq 1$, $\rho \subset E_k(h)$, $U(\rho) \neq P_k$. Пусть для некоторых $\tilde{h} \geq 1$, $h' \geq \tilde{h}$, M $\tilde{\rho}$ — $(\rho, \tilde{h}, h', M)$ -отношение, причем $\tilde{\rho}$ не пусто. Тогда $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Доказательство. Пусть $\tilde{h} < h'$, $s \geq 1$, $M = \{(i_1^1, \dots, i_h^1), \dots, (i_1^s, \dots, i_h^s)\}$. Очевидно, если $\tilde{\rho} = E_k(\tilde{h})$, то $U(\tilde{\rho}) = P_k$, $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$. Пусть $\tilde{\rho} \neq E_k(\tilde{h})$. Нетрудно видеть, что любая функция, которая не является $\tilde{\rho}$ -существенной, принадлежит $U(\tilde{\rho})$. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная $\tilde{\rho}$ -существенная функция из $U(\rho)$. Пусть наборы $(\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1), \dots, (\alpha_{\tilde{h}}^1, \dots, \alpha_h^n)$ таковы, что набор $(f(\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1), \dots, f(\alpha_{\tilde{h}}^1, \dots, \alpha_h^n))$ не принадлежит $\tilde{\rho}$. Пусть $f(\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) = \alpha_1, \dots, f(\alpha_{\tilde{h}}^1, \dots, \alpha_h^n) = \alpha_{\tilde{h}}$. Покажем, что существует $l \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $(\alpha_1^l, \dots, \alpha_{\tilde{h}}^l)$ не принадлежит $\tilde{\rho}$. Предположим противное. Тогда по определению $(\rho, \tilde{h}, h', M)$ -отношения существуют $\alpha_{\tilde{h}+1}^1, \dots, \alpha_{h'}^1, \dots, \alpha_{\tilde{h}+1}^n, \dots, \alpha_{h'}^n$ такие, что для любых $j \in \{1, \dots, n\}$, $q \in \{1, \dots, s\}$ набор $(\alpha_{i_1^q}^j, \dots, \alpha_{i_h^q}^j)$ принадлежит ρ . Пусть $f(\alpha_{\tilde{h}+1}^1, \dots, \alpha_{h'}^n) = \alpha_{\tilde{h}+1}, \dots, f(\alpha_{\tilde{h}+1}^n, \dots, \alpha_{h'}^n) = \alpha_{h'}$. Так как $f(x_1, \dots, x_n) \in U(\rho)$, для всякого $q \in \{1, \dots, s\}$ набор $(\alpha_{i_1^q}, \dots, \alpha_{i_h^q})$ принадлежит ρ . Но тогда $(\alpha_1, \dots, \alpha_{\tilde{h}})$ должен принадлежать $\tilde{\rho}$. Однако это противоречит выбору этого набора. Таким образом, $(\alpha_1^l, \dots, \alpha_{\tilde{h}}^l)$ для некоторого $l \in \{1, \dots, n\}$ не принадлежит $\tilde{\rho}$. Отсюда, а также из произвольности выбора функции f из $U(\rho)$, следует, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$. Аналогично рассматривается случай, когда $\tilde{h} = h'$. Теорема доказана.

Следствие 5. Пусть $\tilde{h} \geq 3$, $(\rho, \tilde{h}, h', M)$ -отношение $\tilde{\rho}$ отлично от $E_k(\tilde{h})$. Пусть $\hat{h} \geq 2$, $\hat{h} < \tilde{h}$. Пусть любой набор из $E_k(\hat{h})$, составленный не более, чем из $\hat{h}$ различных элементов E_k , принадлежит $\tilde{\rho}$. Тогда существует ρ' из P , арность которого больше $\hat{h}$, такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Доказательство. Очевидно, существует набор A из $E_k(\tilde{h})$, не принадлежащий $\tilde{\rho}$ и такой, что любой набор $A' \prec A$ принадлежит $\tilde{\rho}$. Легко видеть, что A составлен более, чем из $\hat{h}$ различных элементов. Пусть $\rho'' = \tilde{\rho} \cap \pi(A)$. В силу следствия 3 $U(\tilde{\rho}) \subseteq U(\rho'')$. Из лемм 1, 5 легко следует, что существует $\rho' \in P$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\rho')$. Очевидно, арность ρ' больше $\hat{h}$.

Следствие 6. Пусть $\tilde{h} \geq 2$, $(\rho, \tilde{h}, h', M)$ -отношение $\tilde{\rho}$ отлично от $E_k(\tilde{h})$. Пусть для любого α набор $(\alpha, \dots, \alpha)$ длины $\hat{h}$ принадлежит $\tilde{\rho}$, существуют β, γ такие, что $\beta \neq \gamma$ и любой набор, составленный только из β и γ , принадлежит $\tilde{\rho}$. Тогда существует $\rho' \in P$, арность которого не меньше двух, такое, что $U(\rho) \subseteq U(\rho')$.

Доказательство. Если любой набор, составленный из двух различных элементов, принадлежит $\tilde{\rho}$, то воспользуемся следствием 5. Пусть существуют β', γ' такие, что $\beta' \neq \gamma'$ и некоторый набор A , составленный только из β', γ' , не принадлежит $\tilde{\rho}$. Пусть $\rho'' = \tilde{\rho} \cap \pi(A)$. В силу следствия 3 $U(\tilde{\rho}) \subseteq U(\rho'')$. Нетрудно видеть, что существует приведенное и рефлексивное бинарное отношение ρ''' , эквивалентное ρ'' , причем $(\beta, \gamma) \in \rho'''$, $(\gamma, \beta) \in \rho'''$, но либо (β', γ') , либо (γ', β') не принадлежит ρ''' (лемма 1). Таким образом, в силу следствия 2 существует бинарное отношение $\rho' \in P$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\rho')$.

Следствие 7. Пусть $h \geq 2$, ρ — тупиковое отношение арности h , $i \in \{1, \dots, h\}$. Пусть для любых $\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_h$ существует β_i такое, что набор $(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_h)$ не принадлежит ρ . Пусть $\gamma \in E_k$, $\sigma \in E_k$, $\gamma \neq \sigma$ и для некоторых $\beta'_1, \dots, \beta'_{i-1}, \beta'_{i+1}, \dots, \beta'_h$ наборы $(\beta'_1, \dots, \beta'_{i-1}, \gamma, \beta'_{i+1}, \dots, \beta'_h)$, $(\beta'_1, \dots, \beta'_{i-1}, \sigma, \beta'_{i+1}, \dots, \beta'_h)$ принадлежат ρ . Тогда существует $\rho' \in P$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\rho')$.

Доказательство. Рассмотрим $(\rho, k, k + h - 1, M)$ -отношение $\tilde{\rho}$, где

$$M = \{(k+1, \dots, k+i-1, 1, k+i, \dots, k+h-1), \dots, \\ (k+1, \dots, k+i-1, k, k+i, \dots, k+h-1)\}.$$

Нетрудно видеть, что набор $(0, 1, \dots, k-1)$ не принадлежат $\tilde{\rho}$. Вместе с тем, любой набор, составленный только из γ, σ , принадлежит $\tilde{\rho}$. Кроме того, из тупиковости ρ следует, что для любого α набор $(\alpha, \dots, \alpha)$ длины k принадлежит $\tilde{\rho}$. В силу следствия 6 существует бинарное отношение $\rho' \in P$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\rho')$.

4. Семейство отношений $\mathcal{P}$ и семейства отношений Z, D, J

Теорема 7. Пусть $\rho \in \mathcal{P}$. Существует отношение $\tilde{\rho}$, принадлежащее объединению семейств Z, D, J такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Из определения семейства $\mathcal{P}$ следует, что $\mathcal{P}_1 \subset Z$. Поэтому всюду в дальнейшем будем считать, что $h \geq 2$.

Пусть $\rho \in \mathcal{P}_h$. Для любого $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ из $E_k(h) \setminus \rho$ через $C(A)$ обозначим подмножество E_k , состоящее из всех α таких, что для любого $i \in \{1, \dots, h\}$ набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_h)$ принадлежит ρ . Отношение $\rho \in \mathcal{P}$ назовем однородным, если для любого $A \in E_k(h) \setminus \rho$ множество $C(A)$ пусто [1, 3].

Теорема 8. Пусть $\rho \in \mathcal{P}_h$. Существует отношение $\tilde{\rho}$, либо принадлежащее Z , либо однородное, такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Лемма 8. Пусть $\rho \in \mathcal{P}_h$, ρ не является однородным, но существует $\tilde{A} \in E_k(h) \setminus \rho$ такое, что $C(\tilde{A}) = \emptyset$. Тогда существует $\tilde{\rho} \in \mathcal{P}_h$ такое, что $\rho \subset \tilde{\rho}$, $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$, $U(\tilde{\rho}) \neq P_k$.

Доказательство. Рассмотрим $(\rho, h, h+1, M)$ -отношение $\tilde{\rho}$, где

$$M = \{(h+1, 2, \dots, h), \dots, (1, \dots, h-1, h+1)\}.$$

Пусть $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ — произвольный набор такой, что либо $A \in \rho$, либо $A \notin \rho$, но $C(A) \neq \emptyset$. Тогда будем считать, что в первом случае $\alpha_{h+1} = \alpha_1$, а во втором $\alpha_{h+1} \in C(A)$. Очевидно, $A \in \tilde{\rho}$. Пусть $\tilde{A} = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_h)$ не принадлежит ρ и $C(\tilde{A}) = \emptyset$. Тогда для любого α существует $i \in \{1, \dots, h\}$ такое, что $(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{i-1}, \alpha, \tilde{\alpha}_{i+1}, \dots, \tilde{\alpha}_h)$ не принадлежит ρ . Поэтому $\tilde{A} \notin \tilde{\rho}$. В силу теоремы 6 $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$. Очевидно, $\rho \subset \tilde{\rho}$, $U(\tilde{\rho}) \neq P_k$.

Пусть $\rho \in \mathcal{P}_h$. Через C_ρ обозначим пересечение множеств $C(A)$, взятое по всем A из $E_k(h) \setminus \rho$.

Лемма 9. Пусть $\rho \in \mathcal{P}_h$, $C(A) \neq \emptyset$ для любого $\tilde{A} \in E_k(h) \setminus \rho$, но $C_\rho = \emptyset$. Тогда существуют $\tilde{h} > h$, $\tilde{\rho} \in \mathcal{P}_h$ такие, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$, $U(\tilde{\rho}) \neq P_k$.

Доказательство. Рассмотрим $(\rho, k, k+1, M)$ -отношение $\tilde{\rho}'$, где M определяется следующим образом. Пусть M — множество всех наборов $(l_1, \dots, l_h)$ чисел из $\{1, \dots, k\}$ таких, что $(l_1 - 1, \dots, l_h - 1)$ не принадлежит ρ . Тогда M — объединение множеств $\{(k+1, l_2, \dots, l_h), \dots, (l_1, \dots, l_{h-1}, k+1)\}$, взятое по всем наборам $(l_1, \dots, l_h)$ из M . Пусть $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} = \{\alpha_{m_1}, \dots, \alpha_{m_{h'}}\}$, где $\alpha_{m_1}, \dots, \alpha_{m_{h'}}$ попарно различны. Покажем, что $A \in \tilde{\rho}'$ при $h' \leq h$. Действительно, если $h' < h$ или $h' = h$, но $A' = (\alpha_{m_1}, \dots, \alpha_{m_h})$ принадлежит ρ , то будем считать, что $\alpha_{k+1} = \alpha_1$. Если $h' = h$ и $A' \notin \rho$, то будем считать, что $\alpha_{k+1} \in C(A')$. Нетрудно видеть, что для любого $(l_1, \dots, l_h)$ из M каждый из наборов $(\alpha_{k+1}, \alpha_{l_2}, \dots, \alpha_{l_h}), \dots, (\alpha_{l_1}, \dots, \alpha_{l_{h-1}}, \alpha_{k+1})$ принадлежит ρ и, следовательно, $A \in \tilde{\rho}'$. Пусть $A_0 = (0, \dots, k-1)$. Так как $C_\rho = \emptyset$, то, очевидно, что для любого α существуют $(l_1, \dots, l_h)$ из M , $j \in \{1, \dots, h\}$ такие, что набор $(l_1 - 1, \dots, l_{j-1} - 1, \alpha, l_{j+1} - 1, \dots, l_h - 1)$ не принадлежит ρ . Поэтому $A_0 \notin \tilde{\rho}$. Таким образом, в силу следствия 5 существуют $\tilde{h} > h$ и $\tilde{\rho} \in \mathcal{P}_h$ такие, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$, $U(\tilde{\rho}) \neq P_k$.

Доказательство теоремы 8. Очевидно, если $C_\rho \neq \emptyset$, то $\rho \in Z$, причем C_ρ — центр отношения ρ . Если $C(A) = \emptyset$ для любого $A \notin \rho$, то ρ — однородное отношение по определению. В остальных случаях утверждение теоремы 8 получается в результате многократного применения утверждений лемм 8 и 9, при этом следует учитывать, что арность любого отношения из $\mathcal{P}$ не превосходит k , а число различных отношений арности h не превосходит 2^{k^h} .

Пусть ρ — однородное отношение из $\mathcal{P}_h$. На множестве E_k определим отношение μ_ρ -эквивалентности: α μ_ρ -эквивалентно α' , если для любых $\alpha_2, \dots, \alpha_h$ наборы $(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_h), (\alpha', \alpha_2, \dots, \alpha_h)$ одновременно либо принадлежат, либо не принадлежат ρ .

Лемма 10. Пусть ρ — однородное отношение из $\mathcal{P}_h$. Справедливы следующие утверждения.

- (а) Пусть $(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ не принадлежит ρ , α'_i μ_ρ -эквивалентно α_i , $i = 1, \dots, h$. Тогда $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_h)$ также не принадлежит ρ .
- (б) Пусть α, α' не являются μ_ρ -эквивалентными. Тогда при $h = 2$ (α, α') не принадлежит ρ , при $h \geq 3$ существуют $\alpha_3, \dots, \alpha_h$ такие, что $(\alpha, \alpha', \alpha_3, \dots, \alpha_h)$ не принадлежит ρ .
- (с) Пусть α μ_ρ -эквивалентно α' . Тогда при $h = 2$ (α, α') принадлежит ρ , при $h \geq 3$ для любых $\alpha_3, \dots, \alpha_h$ элемент $(\alpha, \alpha', \alpha_3, \dots, \alpha_h)$ принадлежит ρ .

Доказательство. Для доказательства п. (а) леммы достаточно рассмотреть последовательность

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h), (\alpha'_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h), \dots, (\alpha'_1, \dots, \alpha'_{h-1}, \alpha_h), (\alpha'_1, \dots, \alpha'_h).$$

Докажем п. (б). Пусть $h = 2$ и $\tilde{\alpha}$ — произвольный элемент такой, что $(\alpha, \tilde{\alpha})$ не принадлежит ρ . Если (α, α') принадлежит ρ , то из однородности ρ следует, что $(\alpha', \tilde{\alpha})$ не принадлежит ρ . Но тогда в силу произвольности выбора $\tilde{\alpha}$ элементы α и α' должны быть μ_ρ -эквивалентны. Однако это противоречит условию п. (б) леммы. Аналогично рассматривается случай, когда $h \geq 3$. Справедливость п. (с) леммы прямо следует из определения отношения μ_ρ -эквивалентности.

Теорема 9. Пусть ρ — бинарное однородное отношение такое, что $U(\rho) \neq P_k$. Тогда $\rho \in D$.

Доказательство. Исходя из определения отношения μ_ρ -эквивалентности и пп. (б), (с) леммы 10 легко видеть, что отношения μ_ρ и ρ совпадают. Разбиение λ_ρ , определяющее принадлежность ρ к семейству D совпадает с разбиением E_k на классы μ_ρ -эквивалентности. Так как $U(\rho) \neq P_k$, существуют α, α' такие, что $\alpha \neq \alpha'$, но $(\alpha, \alpha') \in \rho$, т.е. α и α' принадлежат одному и тому же классу μ_ρ -эквивалентности.

В дальнейшем всюду в §§4, 5 будем считать, что $h \geq 3$.

Пусть ρ — однородное отношение из $\mathcal{P}_h$. Для любых $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ из $E_k(h) \setminus \rho$, $i \in \{1, \dots, h\}$, определим множество $Q_i(A) \subset E_k$, полагая, что $\alpha \in Q_i(A)$ тогда и только тогда, когда для любого $j \in \{1, \dots, h\}$ такого, что $j \neq i$, набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_h)$ принадлежит ρ .

Лемма 11. Пусть ρ — однородное отношение из $\mathcal{P}_h$, наборы $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_h)$, $A' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_h)$ не принадлежат ρ , причем для некоторой подстановки σ чисел $1, \dots, h$

$$\alpha'_1 = \alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha'_h = \alpha_{\sigma(h)}.$$

Тогда для любых i, j из $\{1, \dots, h\}$

$$Q_i(A) \neq \emptyset, \quad Q_i(A) \cap Q_j(A) = \emptyset, \quad i \neq j,$$

и $Q_i(A) = Q_j(A')$, если $\alpha_i = \alpha'_j$.

Доказательство. Очевидно, $\alpha_i \in Q_i(A)$. Пусть $\alpha \in Q_i(A) \cap Q_j(A)$. В силу однородности отношения ρ и определения множества $Q_i(A)$ набор $\tilde{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_h)$ не может принадлежать ρ . Вместе с тем, $\alpha \in Q_j(A)$, $j \neq i$, и по определению множества $Q_j(A)$ набор $\tilde{A}$ принадлежит ρ . Отсюда следует, что $Q_i(A) \cap Q_j(A) = \emptyset$. Пусть $\alpha_i = \alpha'_j$, т.е. $i = \sigma(j)$. Пусть $\alpha \in Q_i(A)$. Очевидно, в силу симметричности ρ и равенств $\alpha_i = \alpha'_j$

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_h\} = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_h\}$$

для любого $l \in \{1, \dots, h\}$, $l \neq j$, набор $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{l-1}, \alpha, \alpha'_{l+1}, \dots, \alpha'_h)$ принадлежит ρ . Поэтому $\alpha \in Q_j(A')$, т.е. $Q_i(A) \subseteq Q_j(A')$. Аналогично, легко показать, что $Q_j(A') \subseteq Q_i(A)$, т.е. $Q_i(A) = Q_j(A')$.

Пусть ρ — однородное отношение из $\mathcal{P}_h$. Отношение ρ назовем сильно однородным, если для всякого A из $E_k(h) \setminus \rho$ и для любых $\alpha_1 \in Q_1(A), \dots, \alpha_h \in Q_h(A)$ набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ не принадлежит ρ [1, 3].

Теорема 10. Пусть ρ — однородное отношение. Существует отношение $\bar{\rho}$, либо принадлежащее $Z \cup D$, либо сильно однородное, такое, что $U(\rho) \subseteq U(\bar{\rho})$.

Лемма 12. Пусть ρ — однородное отношение из $\mathcal{P}_h$, которое не является сильно однородным. Пусть существует $\tilde{A} \in E_k(h) \setminus \rho$ такое, что $(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ не принадлежит ρ для любых $\alpha_1 \in Q_1(\tilde{A}), \dots, \alpha_h \in Q_h(\tilde{A})$. Тогда существует $\bar{\rho} \in \mathcal{P}_h$ такое, что $\rho \subset \bar{\rho}$, $U(\rho) \subseteq U(\bar{\rho})$, $U(\bar{\rho}) \neq P_k$.

Доказательство. Рассмотрим $(\rho, h, 2h, M)$ -отношение $\bar{\rho}$, где M определяется следующим образом: набор $(h+1, \dots, 2h)$ принадлежит M ; для любых i, j из $\{1, \dots, h\}$ таких, что $i \neq j$, набор $(1, \dots, i-1, h+j, i+1, \dots, h)$ принадлежит M ; других наборов в M нет. Пусть $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ — произвольный набор. Если $A \in \rho$, то будем считать, что $\alpha_{h+1} = \alpha_1, \dots, \alpha_{2h} = \alpha_h$. Тогда, очевидно, $A \in \bar{\rho}$. Пусть $A \notin \rho$, но существуют $\alpha'_1 \in Q_1(A), \dots, \alpha'_h \in Q_h(A)$ такие,

что $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_h)$ принадлежит ρ . Так как отношение ρ не является сильно однородным, наборы A с данным свойством существуют. В этом случае будем считать, что $\alpha_{h+1} = \alpha'_1, \dots, \alpha_{2h} = \alpha'_h$. Тогда $(\alpha_{h+1}, \dots, \alpha_{2h}) \in \rho$. Из определения множеств $Q_1(A), \dots, Q_h(A)$ и выбора $\alpha'_1, \dots, \alpha'_h$ следует, что для любых i, j из $\{1, \dots, h\}$ набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{h+j}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_h)$ принадлежит ρ , если $i \neq j$. Поэтому $A \in \tilde{\rho}$. Таким образом, $\rho \subset \tilde{\rho}$. Покажем, что набор $\tilde{A}$ (см. формулировку леммы) не принадлежит $\tilde{\rho}$. Пусть $\tilde{A} = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_h)$, $\alpha_{h+1}, \dots, \alpha_{2h}$ — произвольные элементы такие, что для любых i, j из $\{1, \dots, h\}$, $i \neq j$, набор $(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{i-1}, \tilde{\alpha}_{h+j}, \tilde{\alpha}_{i+1}, \dots, \tilde{\alpha}_h)$ принадлежит ρ . Но тогда выполняются соотношения $\alpha_{h+1} \in Q_1(\tilde{A}), \dots, \alpha_{2h} \in Q_h(\tilde{A})$ и по условию леммы $(\alpha_{h+1}, \dots, \alpha_{2h})$ не принадлежит ρ . Поэтому $\tilde{A} \notin \tilde{\rho}$. Таким образом, $\rho \subset \tilde{\rho}$, $\tilde{\rho} \neq E_k(h)$. Очевидно, $U(\tilde{\rho}) \neq P_k$. В силу теоремы 6 $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Лемма 13. Пусть ρ — однородное отношение из $\mathcal{P}_h$, которое не является сильно однородным. Пусть для любого $\tilde{A} \in E_k(h) \setminus \rho$ существуют $\alpha_1 \in Q_1(\tilde{A}), \dots, \alpha_h \in Q_h(\tilde{A})$ такие, что $(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ принадлежит ρ . Тогда существуют $\tilde{h} > h$, $\tilde{\rho} \in \mathcal{P}_{\tilde{h}}$ такие, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$, $U(\tilde{\rho}) \neq P_k$.

Доказательство. Рассмотрим $(\rho, k, 2k, M)$ -отношение $\tilde{\rho}'$, где M определяется следующим образом. Пусть $\tilde{M}$ — множество всех наборов $(l_1, \dots, l_h)$ чисел из $\{1, \dots, k\}$ таких, что $(l_1 - 1, \dots, l_h - 1)$ не принадлежит ρ . Тогда для любого $(l_1, \dots, l_h)$ из $\tilde{M}$ набор $(l_1 + k, \dots, l_h + k)$ принадлежит M ; для всякого $(l_1, \dots, l_h)$ из $\tilde{M}$ и для любых i, j из $\{1, \dots, h\}$ таких, что $i \neq j$, набор $(l_1, \dots, l_{i-1}, l_j + k, l_{i+1}, \dots, l_h)$ принадлежит M ; других наборов в M нет. Пусть $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} = \{\alpha_{m_1}, \dots, \alpha_{m_{h'}}\}$, где $\alpha_{m_1}, \dots, \alpha_{m_{h'}}$ попарно различны. Покажем, что $A \in \tilde{\rho}'$ при $h' \leq h$. Действительно, если $h' < h$ или $h' = h$, но $A_0 = (\alpha_{m_1}, \dots, \alpha_{m_h})$ принадлежит ρ , то будем считать, что $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_{2k} = \alpha_k$. Пусть $h' = h$, $A_0 \notin \rho$. Очевидно, существует подстановка σ чисел $1, \dots, k$ такая, что $\alpha_1 = \alpha_{m_{\sigma(1)}}, \dots, \alpha_k = \alpha_{m_{\sigma(k)}}$. В силу условий леммы существуют $\alpha'_{m_1} \in Q_1(A_0), \dots, \alpha'_{m_h} \in Q_h(A_0)$ такие, что $(\alpha'_{m_1}, \dots, \alpha'_{m_h})$ принадлежит ρ . Будем считать, что $\alpha_{k+1} = \alpha'_{m_{\sigma(1)}}, \dots, \alpha_{2k} = \alpha'_{m_{\sigma(k)}}$. Пусть $(l_1, \dots, l_h)$ — произвольный элемент из $\tilde{M}$. Очевидно, $(\alpha_{l_1+k}, \dots, \alpha_{l_h+k})$ совпадает с $(\alpha'_{m_{\sigma(l_1)}}, \dots, \alpha_{m_{\sigma(l_h)}})$ и принадлежит ρ . Пусть $i \in \{1, \dots, h\}$, $j \in \{1, \dots, h\}$, $i \neq j$. Рассмотрим набор $A' = (\alpha_{l_1}, \dots, \alpha_{l_{i-1}}, \alpha_{l_j+k}, \alpha_{l_{i+1}}, \dots, \alpha_{l_h})$. Если A' — неразнозначный набор, то $A' \in \rho$. Пусть набор A' разнозначен и $\alpha \in \{\alpha_{m_1}, \dots, \alpha_{m_h}\} \setminus \{\alpha_{l_1}, \dots, \alpha_{l_{i-1}}, \alpha_{l_{i+1}}, \dots, \alpha_{l_h}\}$. Тогда набор $A'' = (\alpha_{l_1}, \dots, \alpha_{l_{i-1}}, \alpha, \alpha_{l_{i+1}}, \dots, \alpha_{l_h})$ с точностью до некоторой перестановки элементов совпадает с A_0 и в силу симметричности ρ не принадлежит ρ . Из определения подстановки σ следует, что $\alpha_{l_j} = \alpha_{m_{\sigma(l_j)}}$. В силу леммы 11 $Q_j(A'') = Q_{\sigma(l_j)}(A_0)$. Вместе с тем, $\alpha_{l_j+k} = \alpha'_{m_{\sigma(l_j)}}$, т.е. $\alpha_{l_j+k} \in Q_j(A'')$. Однако $j \neq i$ и поэтому A' принадлежит ρ . Из произвольности выбора $(l_1, \dots, l_h)$ из $\tilde{M}$ отсюда следует, что $A \in \tilde{\rho}'$. Таким образом, любой набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ такой, что число различных элементов в множестве $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ не превосходит h , принадлежит $\tilde{\rho}'$. Пусть $A_1 = (0, \dots, k-1)$. Покажем, что $A_1 \in \tilde{\rho}'$. Предположим противное. Пусть $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{2k}$ выбраны так, что для любого набора $(l_1, \dots, l_h)$ из $\tilde{M}$, i, j из $\{1, \dots, h\}$, $i \neq j$, наборы

$$(l_1 - 1, \dots, l_{i-1} - 1, \alpha_{l_j+k}, l_{i+1} - 1, \dots, l_h - 1), (\alpha_{l_1+k}, \dots, \alpha_{l_h+k})$$

принадлежат ρ . Вместе с тем, так как отношение ρ однородное, для любых $(l_1, \dots, l_h)$ из $\tilde{M}$ и $i \in \{1, \dots, h\}$ набор $(l_1 - 1, \dots, l_{i-1} - 1, \alpha_{l_i+k}, l_{i+1} - 1, \dots, l_h - 1)$ не принадлежит ρ . Поэтому $(l_1, \dots, l_{i-1}, \alpha_{l_i+k} + 1, l_{i+1}, \dots, l_h)$ принадлежит $\tilde{M}$. Отсюда следует, что наборы

$$(\alpha_{l_1+k} + 1, l_2, \dots, l_h), (\alpha_{l_1+k} + 1, \alpha_{l_2+k} + 1, l_3, \dots, l_h), \dots, \\ (\alpha_{l_1+k} + 1, \alpha_{l_2+k} + 1, \dots, \alpha_{l_h+k} + 1)$$

принадлежат $\tilde{M}$. Таким образом, $(\alpha_{l_1+k}, \dots, \alpha_{l_h+k})$ не может принадлежать ρ . Из полученного противоречия следует, что $A_1 \notin \tilde{\rho}'$. Так как набор, составленный не более, чем из h различных элементов, принадлежит $\tilde{\rho}'$, а набор A_1 не принадлежит $\tilde{\rho}'$, в силу следствия 5 существуют $\tilde{h} > h$, $\tilde{\rho} \in \tilde{\mathcal{P}}_{\tilde{h}}$ такие, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$, $U(\tilde{\rho}) \neq P_k$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 10, так же как и доказательство теоремы 8, получается в результате многократного применения утверждений лемм 13 и 12, а также использования теоремы 9.

Из определения сильной однородности следует, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 14. Пусть ρ — сильно однородное отношение из $\mathcal{P}_h$. Пусть $(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ не принадлежит, а $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_h)$ принадлежит ρ . Тогда существуют i, j из $\{1, \dots, h\}$ такие, что $i \neq j$ и набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha'_j, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_h)$ не принадлежит ρ .

Теорема 11. Пусть ρ — сильно однородное отношение. Существует отношение $\tilde{\rho} \in Z \cup J$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Прежде чем доказывать теорему 11, введем ряд вспомогательных понятий и докажем несколько лемм.

Пусть ρ — сильно однородное отношение из $\mathcal{P}_h$. Рассмотрим отношение μ_ρ -эквивалентности (см. лемму 10). Число классов μ_ρ -эквивалентности обозначим через h_μ . Пусть $K = \{\kappa_1, \dots, \kappa_r\}$ — система, состоящая из всех попарно различных разбиений множества $\{1, \dots, h_\mu\}$ на h классов. Будем считать, что для любого $s \in \{1, \dots, r\}$ разбиение κ_s состоит из классов $D_s^0, \dots, D_s^{h-1}$. Очевидно, $h_\mu \leq h^r$.

Нетрудно видеть, что существует взаимно однозначное отображение Φ множества чисел $\{1, \dots, h^r\}$ на множество всех наборов длины r , составленных из элементов E_h , такое, что имеет место свойство А:

$$\Phi(i) = (v_1^i, \dots, v_r^i)$$

для любого $i \in \{1, \dots, h^r\}$, причем, если $i \leq h_\mu$, то $i \in D_1^{v_1^i}, \dots, i \in D_r^{v_r^i}$.

Рассмотрим (ρ, h_μ, h^r, M) -отношение $\tilde{\rho}_0$, где M определяется следующим образом: набор $(l_1, \dots, l_h)$ чисел из $\{1, \dots, h^r\}$ принадлежит M тогда и только тогда, когда для любого s из $\{1, \dots, r\}$ набор $(v_s^{l_1}, \dots, v_s^{l_h})$ является неразнозначным.

Лемма 15. Любой набор, состоящий не более, чем из h различных элементов, принадлежит отношению $\tilde{\rho}_0$.

Доказательство. Пусть $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_{h_\mu})$, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{h_\mu}\} = \{\alpha_{m_1}, \dots, \alpha_{m_{h'}}\}$, где $\alpha_{m_1}, \dots, \alpha_{m_{h'}}$ попарно различны, и $h' \leq h$. Если либо $h' < h$, либо $h' = h$, но $A' = (\alpha_{m_1}, \dots, \alpha_{m_h})$ принадлежит ρ , то будем считать, что $\alpha_{h_\mu+1} = \dots = \alpha_{h^r} = \alpha_{h_\mu}$. Пусть $h' = h$, $A' \notin \rho$. Рассмотрим разбиение $\tilde{\mathcal{K}}$ множества $\{1, \dots, h_\mu\}$ на h классов $\tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_{h-1}$: числа i, i' из $\{1, \dots, h_\mu\}$ принадлежат одному и тому же классу разбиения $\tilde{\mathcal{K}}$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i = \alpha_{i'}$. Из определения системы разбиений K следует, что существуют $s \in \{1, \dots, r\}$ и подстановка σ чисел $\{0, 1, \dots, h-1\}$ такие, что $D_s^0 = \tilde{D}_{\sigma(0)}, \dots, D_s^{h-1} = \tilde{D}_{\sigma(h-1)}$. Но тогда в силу свойства A отображения Φ для любых i, i' из $\{1, \dots, h_\mu\}$ справедливо равенство $\alpha_i = \alpha_{i'}$, если $v_s^i = v_s^{i'}$. Пусть $h_\mu < h^r$, $j \in \{h_\mu + 1, \dots, h^r\}$. Очевидно, существует $i \in \{1, \dots, h_\mu\}$ такое, что $v_s^j = v_s^i$. Исходя из этого, будем считать, что $\alpha_j = \alpha_i$. Таким образом, и при $h_\mu = h^r$, и при $h_\mu < h^r$ для любых i', j' из $\{1, \dots, h^r\}$ справедливо равенство $\alpha_{i'} = \alpha_{j'}$, если $v_s^{i'} = v_s^{j'}$. Следовательно, для всякого $(l_1, \dots, l_h)$ из M набор $(\alpha_{l_1}, \dots, \alpha_{l_h})$ является неразнозначным и принадлежит ρ . Поэтому $A \in \tilde{\rho}_0$. Лемма доказана.

Нетрудно видеть, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 16. Пусть $\tilde{\rho}_0$ совпадает с $E_k(h_\mu)$. Тогда существует набор

$$B = (\beta_1, \dots, \beta_{h_\mu}, \beta_{h_\mu+1}, \dots, \beta_{h^r})$$

такой, что

- (а) $\beta_1, \dots, \beta_{h_\mu}$ принадлежат попарно различным классам μ_ρ -эквивалентности;
- (б) для любого набора $(l_1, \dots, l_h)$ из M $(\beta_{l_1}, \dots, \beta_{l_h})$ принадлежит ρ .

Пусть $\tilde{\rho}_0 = E_k(h_\mu)$. Зафиксируем набор B , удовлетворяющий пп. (а) и (б) леммы 16. Пусть $s \in \{1, \dots, r\}$. Числа p, q из $\{1, \dots, h^r\}$ назовем (Φ, s) -соседними, если $v_1^p = v_1^q, \dots, v_{s-1}^p = v_{s-1}^q, v_{s+1}^p = v_{s+1}^q, \dots, v_r^p = v_r^q$, но $v_s^p \neq v_s^q$.

Лемма 17. Пусть ρ — сильно однородное отношение, $\tilde{\rho}_0 \in E_k(h_\mu)$, $s \in \{1, \dots, r\}$. Пусть существуют (Φ, s) -соседние числа p, q такие, что β_p, β_q принадлежат разным классам μ_ρ -эквивалентности. Тогда набор $\tilde{B} = (\beta_{d_1}, \dots, \beta_{d_h})$, где $\Phi(d_1) = (v_1^p, \dots, v_{s-1}^p, 0, v_{s+1}^p, \dots, v_r^p), \dots, \Phi(d_h) = (v_1^p, \dots, v_{s-1}^p, h-1, v_{s+1}^p, \dots, v_r^p)$, не принадлежит ρ .

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что β_{d_1}, β_{d_2} принадлежат разным классам μ_ρ -эквивалентности. В силу леммы 10 и п. (а) леммы 16 существуют $\beta_{n_3}, \dots, \beta_{n_h}$ такие, что $(\beta_{d_1}, \beta_{d_2}, \beta_{n_3}, \dots, \beta_{n_h})$ не принадлежит ρ . Очевидно, что для любого t из $\{1, \dots, r\}$, отличного от s , набор $(v_t^{d_1}, v_t^{d_2}, v_t^{n_3}, \dots, v_t^{n_h})$ неразнозначен. Вместе с тем, в силу п. (б) леммы 16, набор $(d_1, d_2, n_3, \dots, n_h)$ не может принадлежать M . Поэтому набор $(v_s^{d_1}, v_s^{d_2}, v_s^{n_3}, \dots, v_s^{n_h})$ состоит из попарно различных элементов. Будем считать, что $v_s^{n_3} = 2, \dots, v_s^{n_h} = h-1$. Предположим, что $\tilde{B}$ принадлежит ρ . Тогда в силу леммы 14 существуют $i,$

j из $\{1, \dots, h\}$, $i \neq j$, такие, что либо $(\beta_{d_j}, \beta_{d_2}, \beta_{n_3}, \dots, \beta_{n_h})$ (при $i = 1$), либо $(\beta_{d_1}, \beta_{d_j}, \beta_{n_3}, \dots, \beta_{n_h})$ (при $i = 2$), либо $(\beta_{d_1}, \beta_{d_2}, \dots, \beta_{n_{i-1}}, \beta_{d_j}, \beta_{n_{i+1}}, \dots, \beta_{n_h})$ (при $i \neq 1, i \neq 2$) не принадлежит ρ . Нетрудно видеть, однако, что наборы $(d_j, d_2, n_3, \dots, n_h), (d_1, d_j, n_3, \dots, n_h), \dots, (d_1, d_2, \dots, n_{i-1}, d_j, n_{i+1}, \dots, n_h)$ принадлежат M . Возникает противоречие с п. (b) леммы 16. Отсюда следует справедливость леммы 17.

Следствие 8. В условиях леммы 17 любой набор $(\beta_{\tilde{d}_1}, \beta_{\tilde{d}_2}, \dots, \beta_{\tilde{d}_h})$ такой, что $v_s^{\tilde{d}_1} = 0, \dots, v_s^{\tilde{d}_h} = h - 1$, не принадлежит ρ .

Доказательство. Предположим, что данный набор принадлежит ρ . Тогда в силу леммы 14 существуют индексы i, j из $\{1, \dots, h\}$ такие, что $i \neq j$, а набор $(\beta_{d_1}, \dots, \beta_{d_{i-1}}, \beta_{\tilde{d}_j}, \beta_{d_{i+1}}, \dots, \beta_{d_h})$ не принадлежит ρ . Однако $(d_1, \dots, d_{i-1}, \tilde{d}_j, d_{i+1}, \dots, d_h)$ принадлежит M и возникает противоречие с п. (b) леммы 16.

Пусть S — подмножество множества $\{1, \dots, r\}$, состоящее из таких и только таких s , что для некоторых (Φ, s) -соседних чисел p, q из $\{1, \dots, h^r\}$ β_p и β_q принадлежат разным классам μ_ρ -эквивалентности.

Лемма 18. Пусть ρ — сильно однородное отношение, $\tilde{\rho}_0 = E_k(h_\mu)$, $S = \{s_1, \dots, s_m\}$. Тогда для любых i, j из $\{1, \dots, h^r\}$ если $v_{s_1}^i = v_{s_1}^j, \dots, v_{s_m}^i = v_{s_m}^j$, то β_i, β_j μ_ρ -эквивалентны, если β_i, β_j μ_ρ -эквивалентны, то $v_{s_1}^i = v_{s_1}^j, \dots, v_{s_m}^i = v_{s_m}^j$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $s_1 = 1, \dots, s_m = m$. Рассмотрим совокупность наборов

$$\begin{aligned} V_m &= (v_1^i, \dots, v_m^i, v_{m+1}^i, \dots, v_r^i), \\ V_{m+1} &= (v_1^i, \dots, v_m^i, v_{m+1}^j, v_{m+2}^i, \dots, v_r^i), \\ &\dots \\ V_r &= (v_1^i, \dots, v_m^i, v_{m+1}^j, \dots, v_r^j). \end{aligned}$$

Пусть числа $d_m, d_{m+1}, \dots, d_r$ из $\{1, \dots, h^r\}$ таковы, что $\Phi(d_m) = V_m, \dots, \Phi(d_r) = V_r$. Можно считать, что $d_m = i, d_r = j$. Кроме того, для любого $n \in \{m+1, \dots, r\}$ числа d_{n-1}, d_n являются (Φ, n) -соседними. Предположим, что β_i и β_j не являются μ_ρ -эквивалентными. Нетрудно видеть, что тогда должно существовать $n \in \{m+1, \dots, r\}$ такое, что $\beta_{d_{n-1}}, \beta_{d_n}$ также не μ_ρ -эквивалентны. Вместе с тем, числа d_{n-1}, d_m являются (Φ, n) -соседними, но $n \notin S$. Возникает противоречие с определением множества S . Справедливость второго утверждения леммы легко доказывается с использованием определений отношения μ_ρ -эквивалентности (лемма 10, пп. (b) и (c)), множества S и следствия 8.

С использованием определений множества M и отношения $\tilde{\rho}_0$ нетрудно доказать следующее утверждение.

Следствие 9. В условиях леммы 18 для любых $d_1, \dots, d_h$ таких, что $(\beta_{d_1}, \dots, \beta_{d_h})$ не принадлежит ρ , существует $s \in S$ такое, что набор $(v_s^{d_1}, \dots, v_s^{d_h})$ разнозначен.

Исходя из взаимной однозначности отображения Φ , легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

Следствие 10. *Имеет место равенство $h_\mu = h^m$.*

Доказательство теоремы 11. Пусть ρ — сильно однородное отношение из $\mathcal{P}_h$. Рассмотрим (ρ, h_μ, h^r, M) -отношение $\tilde{\rho}_0$. Возможны два случая.

(а) Пусть $\tilde{\rho}_0 = E_k(h_\mu)$. Покажем, что тогда $\rho = \rho_1 \cap \dots \cap \rho_m$, где $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ — J -совместимая система h -элементарных отношений. Пусть $j \in \{1, \dots, m\}$. Для задания ρ_j укажем разбиение λ_j множества E_k на классы $\mathcal{E}_0^j, \dots, \mathcal{E}_{h-1}^j$, определяющие отношение ρ_j (см. §1). Пусть $\alpha \in E_k$, $i \in \{1, \dots, h^r\}$, β_i μ_ρ -эквивалентно α (лемма 16). Будем считать, что $\alpha \in \mathcal{E}_u^j$, где $u = v_{s_j}^i$, $s_j \in S$. В силу леммы 18 принадлежность α к $\mathcal{E}_u^j$ не зависит от выбора компоненты набора B , μ_ρ -эквивалентной α . Из лемм 16 и 18, а также следствия 10 следует, что

$$E_k = \mathcal{E}_0^j \cup \dots \cup \mathcal{E}_{h-1}^j,$$

причем для любых p, q , $p \neq q$, $\mathcal{E}_p^j \cap \mathcal{E}_q^j = \emptyset$. Пусть $(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ — произвольный набор, не принадлежащий ρ_j . В силу определения h -элементарных отношений (см. §1) $\alpha_1, \dots, \alpha_h$ принадлежат попарно различным классам $\mathcal{E}_0^j, \dots, \mathcal{E}_{h-1}^j$ разбиения λ_j . Пусть β_{i_l} μ_ρ -эквивалентно α_l , $l = 1, \dots, h$. Из определения множеств $\mathcal{E}_0^j, \dots, \mathcal{E}_{h-1}^j$ следует, что набор $(v_{s_j}^{i_1}, \dots, v_{s_j}^{i_h})$ однозначен. Поэтому в силу следствия 8 и леммы 10 $(\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_h})$, а вместе с ним $(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$, не принадлежат ρ . Но тогда $E_k(h) \setminus \rho_j \subseteq E_k(h) \setminus \rho$. Пусть $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_h)$, не принадлежит ρ , β_{d_l} μ_ρ -эквивалентно α'_l , $l = 1, \dots, h$. Тогда $(\beta_{d_1}, \dots, \beta_{d_h})$ не принадлежит ρ и в силу следствия 9 существует j' из $\{1, \dots, m\}$ такое, что набор $(v_{s_{j'}}^{d_1}, \dots, v_{s_{j'}}^{d_h})$ однозначен. Однако это означает, что $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_h)$, не принадлежат h -элементарному отношению $\rho_{j'}$. Таким образом,

$$E_k(h) \setminus \rho = \bigcup_{j=1}^m E_k(h) \setminus \rho_j,$$

то есть

$$\rho = \bigcap_{j=1}^m \rho_j.$$

J -совместимость отношений $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ прямо следует из определения множеств $\mathcal{E}_0^j, \dots, \mathcal{E}_{h-1}^j$, $1 \leq j \leq m$, и следствия 10.

(б) Пусть $\tilde{\rho}_0 \neq E_k(h_\mu)$. Тогда в силу леммы 15 и следствия 5 существуют $\tilde{h} > h$ и отношение $\tilde{\rho}'$ из $\mathcal{P}_{\tilde{h}}$ такие, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho}')$, $U(\tilde{\rho}') \neq P_k$. Путем многократного использования утверждений теорем 8, 10, а также п. (а) настоящего доказательства нетрудно убедиться в справедливости утверждения теоремы 11.

Доказательство теоремы 7. Справедливость утверждения теоремы 7 является прямым следствием утверждений теорем 8, 9, 10 и 11.

5. Семейства отношений $\tilde{L}$ и L

Теорема 12. Пусть $\rho \in \tilde{L}$. Существует отношение $\tilde{\rho} \in \mathcal{P} \cup \tilde{M} \cup \tilde{S} \cup \tilde{L}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Прежде чем доказывать теорему 12, введем ряд понятий и докажем несколько лемм.

Лемма 19. Пусть $h \geq 3$, $\rho \in \tilde{L}_h$. Существует отношение $\tilde{\rho} \in \tilde{L}_4 \cup \tilde{L}_3 \cup \mathcal{P} \cup \tilde{M} \cup \tilde{S}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Доказательство. Пусть $h \geq 5$. По определению семейства отношений $\tilde{L}$ существует набор B из $E_k(h)$, составленный из двух различных элементов, не принадлежащий ρ , причем любой набор B' такой, что $B' \preceq B$, $B \preceq B'$, также не принадлежит ρ . Не ограничивая общности, будем считать, что для некоторого $\tilde{h} \geq 3$ набор $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$, состоящий из $\tilde{h}$ нулей и $h - \tilde{h}$ единиц, не принадлежит ρ . В силу тупиковости ρ существуют γ, σ такие, что $(\gamma, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1), (0, \sigma, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$, где число единиц равно $h - \tilde{h}$, принадлежат ρ . Очевидно, $\gamma \neq 0$, $\sigma \neq 0$. Рассмотрим $(\rho, 4, 4, M)$ -отношение ρ' , где $M = \{(1, 2, 3, \dots, 3, 4, \dots, 4)\}$, где число четверок равно $h - \tilde{h}$. Нетрудно видеть, что $(\gamma, 0, 0, 1), (0, \sigma, 0, 1)$ принадлежат ρ' , но для любых α, β , $\alpha \neq \beta$, $(\alpha, \alpha, \alpha, \beta)$ не принадлежит ρ' . Таким образом, отношение ρ' приведенное, и $\rho' \subseteq E_k(4)$. Вместе с тем, $U(\rho) \subseteq U(\rho')$. В силу леммы 3 и теоремы 5 существует $\tilde{\rho} \in \tilde{\mathcal{P}} \cup \tilde{M} \cup \tilde{S} \cup \tilde{L}_3 \cup \tilde{L}_4$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$. Лемма доказана.

Пусть $\tilde{L}_4^1$ — подсемейство семейства отношений $\tilde{L}_4$, состоящее из всех отношений ρ таких, что

- (а) для любых α, β, γ , $\beta \neq \gamma$, каждый из наборов $(\alpha, \alpha, \beta, \gamma), (\alpha, \beta, \alpha, \gamma), (\alpha, \beta, \gamma, \alpha), (\beta, \alpha, \alpha, \gamma), (\beta, \alpha, \gamma, \alpha), (\beta, \gamma, \alpha, \alpha)$ не принадлежит ρ ;
- (б) для любых α, β каждый из наборов $(\alpha, \alpha, \beta, \beta), (\alpha, \beta, \alpha, \beta), (\alpha, \beta, \beta, \alpha)$ принадлежит ρ .

Лемма 20. Пусть $\rho \in \tilde{L}_4$, но $\rho \notin \tilde{L}_4^1$. Существует отношение $\tilde{\rho} \in \tilde{L}_3 \cup \mathcal{P} \cup \tilde{M} \cup \tilde{S}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Доказательство. Пусть $\rho \in \tilde{L}_4$. Если для ρ имеет место п. (а) в определении семейства $\tilde{L}_4^1$, то в силу тупиковости ρ для ρ справедлив и п. (б) в определении семейства $\tilde{L}_4^1$. Поэтому доказательство леммы 20 логично разбить на следующие случаи (а) и (б).

(а) Для любых α, β , $\alpha \neq \beta$, хотя бы один из наборов $(\alpha, \alpha, \alpha, \beta), (\alpha, \alpha, \beta, \alpha), (\alpha, \beta, \alpha, \alpha), (\beta, \alpha, \alpha, \alpha)$ принадлежит ρ . Пусть, например, это набор $(\alpha, \alpha, \alpha, \beta)$. Пусть набор $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ составлен из двух различных элементов и не принадлежит ρ . Тогда справедливо одно из равенств $\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_1 = \sigma_3$, $\sigma_2 = \sigma_3$. Пусть $\sigma_2 = \sigma_3$. Рассмотрим $(\rho, 3, 3, M)$ -отношение ρ' , где $M = \{(1, 2, 2, 3)\}$. Из тупиковости ρ следует, что должно существовать σ такое, что набор $(\beta, \alpha, \alpha, \sigma)$

принадлежит ρ . Поэтому $(\alpha, \alpha, \beta), (\beta, \alpha, \sigma)$ принадлежат ρ' , но $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4)$ не принадлежит ρ' . Отсюда следует, что ρ' — приведенное отношение, $\rho' \subseteq E_k(3)$. Кроме того, $U(\rho) \subseteq U(\rho')$.

(b) Для любых $\alpha, \beta, \alpha \neq \beta$, каждый из наборов $(\alpha, \alpha, \alpha, \beta), (\alpha, \alpha, \beta, \alpha), (\alpha, \beta, \alpha, \alpha), (\beta, \alpha, \alpha, \alpha)$ не принадлежит ρ , но существует $\gamma, \gamma \neq \beta$, такое, что хотя бы один из наборов $(\alpha, \alpha, \beta, \gamma), (\alpha, \beta, \alpha, \gamma), (\alpha, \beta, \gamma, \alpha), (\beta, \alpha, \alpha, \gamma), (\beta, \alpha, \gamma, \alpha), (\beta, \gamma, \alpha, \alpha)$ принадлежит ρ . Пусть, например, это набор $(\alpha, \alpha, \beta, \gamma)$. Рассмотрим $(\rho, 3, 3, M)$ -отношение ρ' , где $M = \{(1, 1, 2, 3)\}$. Очевидно, набор (α, β, γ) разнозначен и принадлежит ρ' , а $(\alpha, \alpha, \beta), (\alpha, \beta, \alpha)$ не принадлежат ρ' . Поэтому отношение ρ' приведенное, $\rho' \subseteq E_k(3), U(\rho) \subseteq U(\rho')$. В силу леммы 3 и теоремы 5 существует отношение $\tilde{\rho} \in \tilde{L}_3 \cup \mathcal{P} \cup M \cup \tilde{S}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\rho') \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Пусть $\tilde{L}_3^1$ — подсемейство семейства отношений $\tilde{L}_3$, состоящее из всех таких отношений ρ , что для любых $\alpha, \beta, \alpha \neq \beta$, каждый из наборов $(\alpha, \alpha, \beta), (\alpha, \beta, \alpha), (\beta, \alpha, \alpha)$ не принадлежит ρ .

Лемма 21. Пусть $\rho \in \tilde{L}_3$, но $\rho \notin \tilde{L}_3^1$. Существует $\tilde{\rho} \in \tilde{L}_4^1 \cup \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Доказательство. Рассмотрим все возможные случаи.

(a) Пусть $\alpha \in E_k, \beta \in E_k$ и найдутся два набора из $\{(\alpha, \alpha, \beta), (\alpha, \beta, \alpha), (\beta, \alpha, \alpha)\}$, не принадлежащие ρ . Пусть, например, $(\alpha, \alpha, \beta) \in \rho$, но $(\alpha, \beta, \alpha) \notin \rho, (\beta, \alpha, \alpha) \notin \rho$. Заметим, что тогда для любых α', β' существует γ такое, что $(\gamma, \alpha', \beta') \notin \rho$. Вместе с тем, ρ — тупиковое отношение. Поэтому для всякого $\gamma', \gamma' \neq \alpha$, существует σ такое, что $(\gamma', \alpha, \sigma) \in \rho$. Так как $(\gamma', \alpha, \alpha) \notin \rho$, то $\alpha \neq \sigma$. Следовательно, $(\gamma', \alpha, \sigma) \in \rho, (\alpha, \alpha, \sigma) \in \rho, \gamma' \neq \alpha$. В силу следствия 7 существует $\tilde{\rho} \in \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

(b) Пусть $\alpha \in E_k, \beta \in E_k$ и существует только один набор из $\{(\alpha, \alpha, \beta), (\beta, \alpha, \alpha), (\alpha, \beta, \alpha)\}$, не принадлежащий ρ . Пусть, например, $(\alpha, \alpha, \beta) \notin \rho, (\beta, \alpha, \alpha) \in \rho, (\alpha, \beta, \alpha) \in \rho$. Возможны два подслучая.

(b1) Существуют $\alpha', \beta', \gamma', \beta' \neq \gamma'$, такие, что $(\alpha', \beta', \gamma') \in \rho, (\alpha', \gamma', \beta') \in \rho$. Очевидно, тогда $\alpha' \neq \beta', \alpha' \neq \gamma'$. Рассмотрим $(\rho, 3, 3, M)$ -отношение ρ' , где $M = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$. Нетрудно видеть, что ρ' — приведенное отношение. Если ρ' — тупиковое, то $\rho' \in L_3$, причем для любых $\alpha, \beta, \alpha \neq \beta$, наборы $(\alpha, \alpha, \beta), (\alpha, \beta, \alpha)$ не принадлежат ρ' , но (β, α, α) принадлежит ρ' . Таким образом, для ρ' справедлив п. а) доказываемой леммы. Очевидно, в любом случае существует $\tilde{\rho} \in \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\rho') \subseteq U(\tilde{\rho})$.

(b2) Для любых $\alpha', \beta', \gamma', \beta' \neq \gamma'$, если $(\alpha', \beta', \gamma') \in \rho$, то $(\alpha', \gamma', \beta') \notin \rho$. Рассмотрим $(\rho, 4, 16, M)$ -отношение ρ' , где

$$M = \{(1, 2, 5), (1, 2, 6), (5, 3, 4), (6, 4, 3), (1, 3, 7), (1, 3, 8), (7, 2, 4), (8, 4, 2), \\ (1, 4, 9), (1, 4, 10), (9, 2, 3), (10, 3, 2), (2, 3, 11), (2, 3, 12), (11, 1, 4), (12, 4, 1), \\ (2, 4, 13), (2, 4, 14), (13, 1, 3), (14, 3, 1), (3, 4, 15), (3, 4, 16), (15, 1, 2), (16, 2, 1)\}.$$

Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \rho'$. Тогда должны существовать $\alpha_5, \dots, \alpha_{16}$ такие, что для любых i, j, l из $\{1, \dots, 16\}$, если $(i, j, l) \in M$, то $(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_l) \in \rho$. Покажем,

что для ρ' справедлив п. (а) в определении семейства $\tilde{L}_4^1$, т.е. если либо $\alpha_1 = \alpha_2$, либо $\alpha_1 = \alpha_3$, либо $\alpha_1 = \alpha_4$, либо $\alpha_2 = \alpha_3$, либо $\alpha_2 = \alpha_4$, либо $\alpha_3 = \alpha_4$, то, соответственно, $\alpha_3 = \alpha_4$, $\alpha_2 = \alpha_4$, $\alpha_2 = \alpha_3$, $\alpha_1 = \alpha_4$, $\alpha_1 = \alpha_3$, $\alpha_1 = \alpha_2$. Пусть, например, $\alpha_1 = \alpha_3$. Тогда, как нетрудно видеть, из свойств ρ и определения множества M следует, что $\alpha_7 = \alpha_8$ и $\alpha_2 = \alpha_4$. Аналогично рассматриваются другие случаи. Покажем, что для ρ' справедлив п. (b) в определении семейства $\tilde{L}_4^1$, т.е. для любых α, β каждый из наборов $(\alpha, \alpha, \beta, \beta)$, $(\alpha, \beta, \alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta, \beta, \alpha)$ принадлежит ρ' . Пусть, например, $\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta$. Будем считать тогда, что $\alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_9 = \alpha_{10} = \alpha_{14} = \alpha_{16} = \alpha$, $\alpha_6 = \alpha_8 = \alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{15} = \beta$. Отсюда следует, что $(\alpha, \beta, \beta, \alpha)$ принадлежит ρ' . Аналогично рассматриваются другие случаи. Если ρ' является тупиковым, то $\rho' \in \tilde{L}_4^1$. Тогда $\bar{\rho} = \rho'$. Пусть ρ' не является тупиковым. Пусть, например, существуют α', β', γ' такие, что для всякого σ набор $(\alpha', \beta', \gamma', \sigma)$ не принадлежит ρ . Тогда рассмотрим $(\rho', 3, 4, M)$ -отношение ρ' , где $M = \{(1, 2, 3, 4)\}$. Легко видеть, что для любых α, β каждый из наборов (α, β, β) , (β, α, β) , (β, β, α) принадлежит ρ' , но $(\alpha', \beta', \gamma')$ не принадлежит ρ' . Поэтому в силу следствия 5 существует $\bar{\rho} \in \mathcal{P}$, арность которого не меньше трех, такое, что $U(\rho) \subseteq U(\rho') \subseteq U(\bar{\rho})$.

Из лемм 19, 20 и 21 вытекает следующее утверждение.

Следствие 11. Пусть $\rho \in \tilde{L}$, причем $U(\rho) \not\subseteq U(\rho')$ для любого $\rho' \in \mathcal{P} \cup \tilde{M} \cup \tilde{S}$. Существует $\bar{\rho} \in \tilde{L}_3^1 \cup \tilde{L}_4^1$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\bar{\rho})$.

Пусть $\tilde{L}_4^2$ — подсемейство семейства $\tilde{L}_4^1$, состоящее из всех отношений ρ , удовлетворяющих следующему свойству: для любых $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ существуют единственное δ_1 , единственное δ_2 , единственное δ_3 и единственное δ_4 такие, что $(\delta_1, \beta, \gamma, \sigma)$, $(\alpha, \delta_2, \gamma, \sigma)$, $(\alpha, \beta, \delta_3, \sigma)$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta_4)$ принадлежат ρ .

Лемма 22. Пусть $\rho \in \tilde{L}_4^1$. Существует $\bar{\rho} \in \tilde{L}_4^2 \cup \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\bar{\rho})$.

Доказательство. Из определения семейства $\tilde{L}_4^1$ (п. а)) следует, что для любых $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ существуют $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \delta'_4$ такие, что $(\delta'_1, \beta, \gamma, \sigma) \notin \rho$, $(\alpha, \delta'_2, \gamma, \sigma) \notin \rho$, $(\alpha, \beta, \delta'_3, \sigma) \notin \rho$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta'_4) \notin \rho$. Вместе с тем, ρ — тупиковое отношение. Поэтому, если $\rho \notin \tilde{L}_4^2$, то в силу следствия 7 существует $\bar{\rho} \in \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\bar{\rho})$.

Пусть $\tilde{L}_4^3$ — семейство отношений арности четыре, состоящее из всех отношений ρ , удовлетворяющих следующим свойствам:

- (а) для любых $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ существуют единственное δ_1 , единственное δ_2 и единственное δ_3 такие, что $(\delta_1, \beta, \gamma, \sigma)$, $(\alpha, \delta_2, \gamma, \sigma)$, $(\alpha, \beta, \delta_3, \sigma)$ принадлежат ρ ;
- (б) для любых α, β каждый из наборов $(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$, $(\alpha, \beta, \alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta, \beta, \alpha)$ принадлежит ρ .

Лемма 23. Пусть $\rho \in \tilde{L}_3^1$. Существует $\bar{\rho} \in \tilde{L}_4^3 \cup \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\bar{\rho})$.

Доказательство. Так же, как и при доказательстве леммы 22, возможны два случая: либо существует $\bar{\rho} \in \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\bar{\rho})$, либо для любых α, β, γ существуют единственное δ_1 , единственное δ_2 , единственное δ_3 , такие, что $(\delta_1, \beta, \gamma) \in \rho$, $(\alpha, \delta_2, \gamma) \in \rho$, $(\alpha, \beta, \delta_3) \in \rho$. Во втором случае рассмотрим $(\rho, 4, 6, M)$ -отношение $\bar{\rho}$, где $M = \{(5, 4, 1), (4, 6, 2), (5, 6, 3)\}$. Очевидно, что $U(\rho) \subseteq U(\bar{\rho})$. Покажем, что $\bar{\rho} \in \tilde{L}_4^3$. Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — произвольные элементы из E_k . Пусть $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$, $\alpha_3 = \gamma$, $\alpha_4 = \sigma$. Так как существуют единственное α_6 , единственное α_5 такие, что $(\alpha_4, \alpha_6, \alpha_2) \in \rho$, $(\alpha_5, \alpha_6, \alpha_3) \in \rho$, то существует единственное δ_1 такое, что $(\alpha_5, \alpha_4, \delta_1) \in \rho$, $(\delta_1, \beta, \gamma, \sigma) \in \bar{\rho}$. Так как существуют единственное α_5 , единственное α_6 такие, что $(\alpha_5, \alpha_4, \alpha_1) \in \rho$, $(\alpha_5, \alpha_6, \alpha_3) \in \rho$, то существует единственное δ_2 такое, что $(\alpha_4, \alpha_6, \delta_2) \in \rho$, $(\alpha, \delta_2, \gamma, \sigma) \in \bar{\rho}$. Так как существуют единственное α_5 , единственное α_6 такие, что $(\alpha_5, \alpha_4, \alpha_1) \in \rho$, $(\alpha_4, \alpha_6, \alpha_2) \in \rho$, то существует единственное δ_3 такое, что $(\alpha_5, \alpha_6, \delta_3) \in \rho$, $(\alpha, \beta, \delta_3, \sigma) \in \bar{\rho}$. Пусть $\alpha \in E_k$, $\beta \in E_k$. Очевидно, $(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha) \in \bar{\rho}$. Покажем, что $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, где $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha_4 = \beta$ принадлежит $\bar{\rho}$. В силу определения ρ для некоторого α_5 набор $(\alpha_5, \alpha_4, \alpha_1) \in \rho$. Пусть $\alpha_6 = \alpha_4$. Тогда $(\alpha_4, \alpha_4, \alpha_4) \in \rho$ и $(\alpha_5, \alpha_4, \alpha_1) \in \rho$, т.е. $(\alpha, \beta, \alpha, \beta) \in \bar{\rho}$. Аналогично, легко видеть, что $(\alpha, \beta, \beta, \alpha) \in \bar{\rho}$. Лемма доказана.

Пусть $\rho \in \tilde{L}_4^2 \cup \tilde{L}_4^3$, $\sigma \in E_k$. На множестве E_k определим бинарную операцию $+\sigma$ следующим образом: для любых α, β, γ равенство $\alpha +_\sigma \beta = \gamma$ имеет место тогда и только тогда, когда $(\alpha, \beta, \gamma, \sigma)$ принадлежит ρ .

Легко видеть, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 24. Пусть $\rho \in \tilde{L}_4^2 \cup \tilde{L}_4^3$, $\sigma \in E_k$, $+\sigma$ — операция, определяемая ρ и σ . Операция $+\sigma$ является однозначной и для любого α

$$\alpha +_\sigma \sigma = \alpha, \quad \sigma +_\sigma \alpha = \alpha,$$

т.е. σ является нулем операции $+\sigma$; существует единственный элемент $\bar{\alpha}$, обратный к α , т.е. такой, что

$$\alpha +_\sigma \bar{\alpha} = \sigma.$$

Пусть L_1 — подсемейство объединения семейств $\tilde{L}_4^2$ и $\tilde{L}_4^3$, состоящее из всех отношений ρ , удовлетворяющих следующему свойству: для любых σ, σ' операции $+\sigma, +\sigma'$, определяемые ρ, σ и σ' соответственно таковы, что

$$\sigma +_{\sigma'} \sigma = \sigma +_\sigma \bar{\sigma}'$$

(здесь $\bar{\sigma}'$ — элемент, обратный к σ' относительно операции $+\sigma$, т.е. $\sigma' +_\sigma \bar{\sigma}' = \sigma$).

Лемма 25. Пусть $\rho \in \tilde{L}_4^2 \cup \tilde{L}_4^3$. Существует $\bar{\rho} \in L_1 \cup \mathcal{P} \cup \tilde{M} \cup \tilde{S}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\bar{\rho})$.

Доказательство. Рассмотрим все возможные случаи.

(а) Пусть $\rho \in \tilde{L}_4^2$. Так как $\tilde{L}_4^2 \subseteq \tilde{L}_4^1$, то $\rho \subseteq \tilde{L}_4^1$. В силу п. (b) в определении семейства $\tilde{L}_4^1$ для любых σ, σ' наборы $(\sigma, \sigma, \sigma', \sigma')$, $(\sigma', \sigma', \sigma, \sigma)$ принадлежат ρ . Поэтому

$$\sigma +_{\sigma'} \sigma = \sigma', \quad \bar{\sigma}' = \sigma'.$$

Таким образом,

$$\sigma +_{\sigma} \bar{\sigma}' = \sigma', \quad \sigma +_{\sigma'} \sigma = \sigma +_{\sigma} \bar{\sigma}',$$

т.е. $\rho \in L_1$.

(b) Пусть $\rho \in \tilde{L}_4^3$. В этом случае возможны два подслучая.

(b1) Существуют $\sigma, \sigma', \sigma'', \sigma'''$ такие, что

$$\sigma \neq \sigma', \quad \sigma'' \neq \sigma''', \quad \sigma +_{\sigma'} \sigma = \sigma +_{\sigma} \bar{\sigma}',$$

но

$$\sigma'' +_{\sigma'''} \sigma'' \neq \sigma'' +_{\sigma''} \bar{\sigma}'''.$$

Рассмотрим $(\rho, 2, 4, M)$ -отношение ρ' , где $M = \{(1, 1, 4, 2), (2, 3, 1, 1), (1, 3, 4, 1)\}$. Пусть

$$\alpha_1 = \sigma, \quad \alpha_2 = \sigma', \quad \alpha_3 = \bar{\sigma}', \quad \alpha_4 = \sigma +_{\sigma'} \sigma.$$

Так как

$$(\sigma, \sigma, \sigma +_{\sigma'} \sigma, \sigma'), (\sigma', \bar{\sigma}', \sigma, \sigma), (\sigma, \bar{\sigma}', \sigma +_{\sigma'} \sigma, \sigma)$$

принадлежат ρ , то $(\sigma, \sigma') \in \rho'$. Вместе с тем, (σ'', σ''') не принадлежит ρ' . Поэтому существует бинарное отношение $\bar{\rho} \in \mathcal{P} \cup \tilde{M}$ в силу следствия 2 и теоремы 5 такое, что $U(\rho) \subseteq U(\rho') \subseteq U(\bar{\rho})$.

(b2) Для любых σ, σ' таких, что $\sigma \neq \sigma'$,

$$\sigma +_{\sigma'} \sigma \neq \sigma +_{\sigma} \bar{\sigma}'.$$

Рассмотрим $(\rho, 3, 5, M)$ -отношение ρ' , где $M = \{(1, 2, 5, 3), (3, 4, 2, 2), (1, 4, 5, 2)\}$. Пусть α, β таковы, что $\alpha \neq \beta$. Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \alpha_3 = \beta$. Тогда для любых α_4, α_5 хотя бы один из наборов $(\alpha, \alpha, \alpha_5, \beta), (\beta, \alpha_4, \alpha, \alpha), (\alpha, \alpha_4, \alpha_5, \alpha)$ не принадлежит ρ . Действительно, если $(\alpha, \alpha, \alpha_5, \beta) \in \rho$, то

$$\alpha_5 = \alpha +_{\beta} \alpha,$$

если $(\beta, \alpha_4, \alpha, \alpha) \in \rho$, то

$$\beta +_{\alpha} \alpha_4 = \alpha,$$

т.е. $\alpha_4 = \bar{\beta}$, если $(\alpha, \alpha_4, \alpha_5, \alpha) \in \rho$, то

$$\alpha +_{\alpha} \bar{\beta} = \alpha +_{\beta} \alpha.$$

Однако этого не может быть по условию (b2). Поэтому для любых $\alpha, \beta, \alpha \neq \beta$, набор (α, α, β) не принадлежит ρ' . Вместе с тем, $(\alpha, \beta, \alpha), (\beta, \alpha, \alpha)$ принадлежат ρ' . Таким образом, $\rho' \in \tilde{L}_3$, но $\rho' \notin \tilde{L}_3^1$. Из лемм 21 и 22 следует, что существует отношение $\bar{\rho} \in \tilde{L}_4^2 \cup \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\rho') \subseteq U(\bar{\rho})$. Если $\bar{\rho} \in \tilde{L}_4^2$, то в силу п. (a) доказываемой леммы $\bar{\rho} \in L_1$.

Пусть L_2 — подсемейство семейства L_1 , состоящее из всех отношений ρ таких, что для любого σ операция $+_{\sigma}$, определяемая ρ и σ , является коммутативной, т.е. для любых α, β

$$\alpha +_{\sigma} \beta = \beta +_{\sigma} \alpha;$$

ассоциативной, т.е. для любых α, β, γ

$$(\alpha +_{\sigma} \beta) +_{\sigma} \gamma = \alpha +_{\sigma} (\beta +_{\sigma} \gamma).$$

Лемма 26. Пусть $\rho \in L_1$. Существует $\tilde{\rho} \in L_2 \cup \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Доказательство. Пусть σ таково, что операция $+_\sigma$ не является коммутативной. Это означает, что существуют α, β такие, что

$$\alpha +_\sigma \beta \neq \beta +_\sigma \alpha.$$

Очевидно, $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \sigma$, $\beta \neq \sigma$. Рассмотрим $(\rho, 3, 4, M)$ -отношение ρ' , где $M = \{(1, 2, 4, 3), (2, 1, 4, 3)\}$. Нетрудно видеть, что (α, β, σ) не принадлежит ρ' . Вместе с тем, для любых α', β' в силу леммы 24 имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \alpha' +_{\alpha'} \alpha' &= \alpha' +_{\alpha'} \alpha', & \alpha' +_{\beta'} \alpha' &= \alpha' +_{\beta'} \alpha', & \beta' +_{\alpha'} \beta' &= \beta' +_{\alpha'} \beta', \\ \alpha' +_{\beta'} \beta' &= \beta' +_{\beta'} \alpha', & \alpha' +_{\alpha'} \beta' &= \beta' +_{\alpha'} \alpha'. \end{aligned}$$

Поэтому любой набор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, составленный не более, чем из двух элементов, принадлежит ρ' . В силу следствия 5 существует $\tilde{\rho} \in \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\rho') \subseteq U(\tilde{\rho})$. Пусть σ таково, что операция $+_\sigma$ коммутативна, но не является ассоциативной. Это означает, что существуют α, β, γ такие, что

$$(\alpha +_\sigma \beta) +_\sigma \gamma \neq \alpha +_\sigma (\beta +_\sigma \gamma).$$

Очевидно, $\alpha \neq \sigma$, $\beta \neq \sigma$, $\gamma \neq \sigma$, $\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \gamma$. Рассмотрим $(\rho, 4, 7, M)$ -отношение ρ' , где $M = \{(1, 2, 5, 4), (5, 3, 7, 4), (2, 3, 6, 4), (1, 6, 7, 4)\}$. Нетрудно видеть, что $(\alpha, \beta, \gamma, \sigma)$ не принадлежит ρ' . Вместе с тем, для любых α', β' в силу леммы 24 имеют место соотношения

$$\begin{aligned} (\alpha' +_{\beta'} \alpha') +_{\beta'} \alpha' &= \alpha' +_{\beta'} (\alpha' +_{\beta'} \alpha'), \\ (\alpha' +_{\beta'} \alpha') +_{\beta'} \beta' &= \alpha' +_{\beta'} (\alpha' +_{\beta'} \beta'), \\ (\alpha' +_{\beta'} \beta') +_{\beta'} \beta' &= \alpha' +_{\beta'} (\beta' +_{\beta'} \beta'). \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом коммутативности операции $+_\sigma$ следует, что любой набор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, составленный не более, чем из двух различных элементов, принадлежит ρ' . По следствию 5 существует $\tilde{\rho} \in \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\rho') \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Из лемм 24 и 26 вытекает следующее утверждение.

Следствие 12. Пусть $\rho \in L_2$. Тогда для любого σ множество E_k с операцией $+_\sigma$, определяемой ρ и σ , образует абелеву группу с элементом σ в качестве нуля.

Пусть $\rho \in L_2$, $\sigma \in E_k$. Через $G_{\rho, \sigma} = \langle E_k, +_\sigma \rangle$ обозначим абелеву группу на E_k с операциями $+_\sigma$, определяемую ρ и σ .

Пусть L_3 — подсемейство семейства L_2 , состоящее из всех отношений ρ таких, что для любых $\sigma, \sigma', \alpha, \alpha', \alpha \neq \sigma, \alpha' \neq \sigma'$, порядки элементов α и α' в группах $G_{\rho, \sigma}, G_{\rho, \sigma'}$ совпадают.

Лемма 27. Пусть $\rho \in L_2$. Существует $\tilde{\rho} \in L_3 \cup \mathcal{P} \cup \tilde{M}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Доказательство. Пусть $\rho \notin L_3$. Не ограничивая общности, будем считать, что σ, α таковы, что $\alpha \neq \sigma$, порядок α в группе $G_{\rho, \sigma}$ равен $p \geq 2$ и для любых $\sigma', \alpha', \sigma' \neq \alpha'$, порядок элемента α' в группе $G_{\rho, \sigma}$ не меньше p . Так как $\rho \notin L_3$, существуют σ'', β такие, что порядок β в группе $G_{\rho, \sigma''}$ больше p . Рассмотрим $(\rho, 2, p, M)$ -отношение ρ' , где $M = \{(1, 1, 3, 2), (1, 3, 4, 2), \dots, (1, p-1, p, 2), (1, p, 2, 2)\}$, если $p \geq 3$, $M = \{(1, 1, 2, 2)\}$, если $p = 2$. В силу леммы 24 $(\gamma, \gamma) \in \rho'$ для любого γ . Кроме того, нетрудно видеть, что $(\alpha, \sigma) \in \rho$, но $(\beta, \sigma'') \notin \rho'$. Отношение ρ' рефлексивно. Поэтому в силу следствия 2, а также теоремы 5, существует бинарное отношение $\tilde{\rho} \in \mathcal{P} \cup \tilde{M}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\rho') \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Справедлива следующая теорема [5].

Теорема 13. Пусть G — произвольная абелева группа, определенная на E_k , такая, что порядки всех ее ненулевых элементов совпадают и равны $p \geq 2$. Тогда p — простое число и $k = p^m$ для некоторого $m \geq 1$.

Из лемм 19–27 и теорем 5, 7, 13 вытекает следующее утверждение.

Следствие 13. Пусть k не является степенью простого числа, $\rho \in \tilde{L}$. Тогда существует $\tilde{\rho} \in Z \cup J \cup D \cup \tilde{M} \cup \tilde{S}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Пусть p — простое число, $p > 1$, $m \geq 1$, $k = p^m$. Через L_0 обозначим подсемейство семейства L_3 , состоящее из всех отношений ρ таких, что для любых $\sigma, \sigma', \alpha, \beta$

$$\alpha +_{\sigma} \beta = \alpha +_{\sigma'} \beta +_{\sigma'} \bar{\sigma}$$

(здесь $\bar{\sigma}$ — элемент, обратный к σ в группе $G_{\rho, \sigma'}$).

Лемма 28. Пусть p — простое число, $p > 1$, $m \geq 1$, $k = p^m$. Пусть $\rho \in L_3$. Существует $\tilde{\rho} \in L_0 \cup \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Доказательство. Пусть $\rho \in L_3$, но $\rho \notin L_0$. Это означает, что существуют $\sigma, \sigma', \alpha, \beta$ такие, что

$$\alpha +_{\sigma} \beta \neq \alpha +_{\sigma'} \beta +_{\sigma'} \bar{\sigma}.$$

Рассмотрим $(\rho, 4, 7, M)$ -отношение ρ' , где

$$M = \{(1, 2, 5, 3), (1, 2, 6, 4), (3, 7, 4, 4), (6, 7, 5, 4)\}.$$

Нетрудно видеть, что $(\alpha, \beta, \sigma, \sigma')$ не принадлежит ρ' . Вместе с тем, для любых α', β' в силу леммы 25 имеют место соотношения

$$\alpha' +_{\alpha'} \beta' = \alpha' +_{\alpha'} \beta' +_{\alpha'} \bar{\alpha}', \quad \alpha' +_{\alpha'} \alpha' = \alpha' +_{\beta'} \alpha' +_{\beta'} \bar{\alpha}', \quad \alpha' +_{\alpha'} \beta' = \alpha' +_{\beta'} \beta' +_{\beta'} \bar{\alpha}'.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \alpha' +_{\alpha'} \beta' &= \beta', & \alpha' +_{\alpha'} \bar{\alpha}' &= \alpha', & \alpha' +_{\alpha'} \beta' &= \beta', & \alpha' +_{\alpha'} \alpha' &= \alpha', \\ \alpha' +_{\beta'} \bar{\alpha}' &= \beta', & \alpha' +_{\beta'} \beta' &= \alpha', & \beta' +_{\beta'} \beta' &= \beta'. \end{aligned}$$

Кроме того, в силу леммы 26

$$\beta' +_{\alpha'} \beta' = \beta' +_{\beta'} \beta' +_{\beta'} \bar{\alpha}'.$$

Отсюда с учетом коммутативности и ассоциативности операций $+\alpha', +\beta'$ следует, что любой набор, составленный не более, чем из двух различных элементов, принадлежит ρ' . Поэтому существует $\tilde{\rho} \in \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\rho') \subseteq U(\tilde{\rho})$ (в силу следствия 5).

Из предыдущего легко следует, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 29. Семейства отношений L и L_0 совпадают.

Доказательство теоремы 12. Справедливость теоремы 12 прямо следует из лемм 19–29, а также теорем 5 и 13.

6. Семейства отношений $\tilde{M}$, $\tilde{S}$ и M , S

Теорема 14. Пусть $\rho \in \tilde{M}$. Существует $\rho \in M \cup \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Прежде чем доказывать теорему 14, введем некоторые понятия и докажем две леммы.

Пусть $\rho \in \tilde{M}$, $\alpha \in E_k$, $\beta \in E_k$. Будем считать, что α , соответственно β , является максимальным, соответственно минимальным, элементом ρ , если для любого γ набор (γ, α) , соответственно (β, γ) , принадлежит ρ .

Пусть M_1 — подсемейство семейства M , состоящее из всех отношений, имеющих единственный максимальный и единственный минимальный элементы.

Лемма 30. Пусть $\rho \in \tilde{M}$. Существует $\tilde{\rho} \in M_1 \cup \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Доказательство. Пусть ρ не имеет либо максимальных, либо минимальных элементов. Пусть, например, ρ не имеет максимальных элементов. Рассмотрим $(\rho, k, k+1, M)$ -отношение ρ' , где $M = \{(1, k+1), \dots, (k, k+1)\}$. Так как ρ не содержит максимальных элементов, то набор $(0, 1, \dots, k-1)$ не принадлежит ρ' . Вместе с тем, существуют α, β такие, что $(\alpha, \beta) \in \rho$. Как нетрудно видеть, любой набор, составленный только из α и β , принадлежит ρ' . Действительно, в этом случае можно считать, что $\alpha_{k+1} = \beta$. В силу следствия 6 существует $\tilde{\rho} \in \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\rho') \subseteq U(\tilde{\rho})$. Пусть отношение ρ обладает и максимальными и минимальными элементами. Покажем, что тогда ρ имеет один максимальный и один минимальный элементы. Действительно, пусть, например, α и γ — максимальные элементы ρ , $\alpha \neq \gamma$. Тогда, очевидно, $(\alpha, \gamma) \in \rho$, $(\gamma, \alpha) \in \rho$. Однако это противоречит определению семейства отношений M . Лемма доказана.

Пусть $\rho \in M_1$. Отношение ρ назовем транзитивным, если для любых α, β, γ таких, что $(\alpha, \beta) \in \rho$, $(\beta, \gamma) \in \rho$, набор (α, γ) также принадлежит ρ .

Пусть M_2 — подсемейство семейства M_1 , состоящее из всех транзитивных отношений.

Лемма 31. Пусть $\rho \in M_1$. Существует $\rho \in M_2 \cup \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\tilde{\rho})$.

Доказательство. Рассмотрим $(\rho, 2, k, M)$ -отношение ρ' , где

$$M = \{(1, 3), (3, 4), \dots, (k-1, k), (k, 2)\}.$$

Пусть α — максимальный, β — минимальный элементы ρ . Нетрудно видеть, что для любого γ наборы $(\alpha, \gamma), (\beta, \gamma) \notin \rho'$, если $\gamma \neq \alpha, \gamma \neq \beta$. Действительно, в противном случае должно было бы существовать σ такое, что либо $\sigma \neq \alpha, (\sigma, \alpha) \in \rho, (\alpha, \sigma) \in \rho$, либо $\sigma \neq \beta, (\beta, \sigma) \in \rho, (\sigma, \beta) \in \rho$. Однако это противоречит определению семейства отношений $\tilde{M}$. Следовательно $\rho' \subseteq E_k(2)$. Вместе с тем, ρ' рефлексивно. В силу следствия 2, а также теоремы 5, либо существует $\bar{\rho} \in \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho') \subseteq U(\bar{\rho})$, либо $\rho' \in M$. Пусть $\rho' \in M$. Очевидно, $\rho \subseteq \rho'$. Используя лемму 30, можно считать, что α является единственным максимальным, а β единственным минимальным элементами ρ' , т.е. $\rho' \in M_1$. Покажем, что ρ' — транзитивное отношение. Пусть α', β', γ' — произвольные элементы такие, что $(\alpha', \beta') \in \rho', (\beta', \gamma') \in \rho'$. Это означает, что существуют $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_{2k-1}$ такие, что $\sigma_1 = \alpha', \sigma_k = \beta', \dots, \sigma_{2k-1} = \gamma', (\sigma_1, \sigma_2) \in \rho, (\sigma_{k-1}, \sigma_k) \in \rho, (\sigma_k, \sigma_{k+1}) \in \rho, \dots, (\sigma_{2k-2}, \sigma_{2k-1}) \in \rho$. Нетрудно видеть, что для любых i, j, l из $\{1, \dots, 2k-1\}$ таких, что $i \leq l \leq j, \sigma_i = \sigma_j$, справедливо одно из равенств $\sigma_l = \sigma_i$ или $\sigma_l = \sigma_j$. Если бы это было не так, то ρ не могло принадлежать M_1 . Отсюда легко следует, что существуют $i_2, \dots, i_{k-1}$ из $\{1, \dots, 2k-1\}$ такие, что $1 < i_2 < \dots < i_{k-1} < 2k-1$ и $(\sigma_1, \sigma_{i_2}) \in \rho, (\sigma_{i_2}, \sigma_{i_3}) \in \rho, \dots, (\sigma_{i_{k-2}}, \sigma_{i_{k-1}}) \in \rho, (\sigma_{i_{k-1}}, \sigma_{2k-1}) \in \rho$. Поэтому $(\alpha', \gamma') \in \rho'$ и ρ' — транзитивное отношение. Таким образом, если $\rho' = \bar{\rho}$, то $U(\rho) \subseteq U(\bar{\rho}), \bar{\rho} \in M_2$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 14. Справедливость утверждения теоремы 14 непосредственно следует из лемм 30 и 31. Действительно, как нетрудно видеть, семейства отношений M и M_2 совпадают.

Теорема 15. Пусть $\rho \in \tilde{S}$. Существует $\bar{\rho} \in S \cup \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\bar{\rho})$.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

(а) Пусть ρ не является графиком никакой подстановки, определенной на E_k . Это означает, что для некоторого α существуют β, γ такие, что $\beta \neq \gamma$ и либо $(\alpha, \beta) \in \rho, (\alpha, \gamma) \in \rho$, либо $(\beta, \alpha) \in \rho, (\gamma, \alpha) \in \rho$. Из определения семейства $\tilde{S}$ следует, что для любого σ набор (σ, σ) не принадлежит ρ . Поэтому в силу следствия 7 существует $\bar{\rho} \in \mathcal{P}$ такое, что $U(\rho) \subseteq U(\bar{\rho})$.

(б) Пусть ρ является графиком некоторой подстановки φ , определенной на E_k , т.е. для любого α существует единственное β такое, что $(\alpha, \beta) \in \rho$, и существует единственное γ такое, что $(\gamma, \alpha) \in \rho$. Известно, что любая подстановка, определенная на E_k , разлагается в циклы [5]. Поэтому для любого α существуют число $p_\alpha \geq 1$, попарно различные, отличные от α элементы $\sigma_1, \dots, \sigma_{p_\alpha}$ такие, что $\sigma_1 = \varphi(\alpha), \sigma_2 = \varphi(\sigma_1), \dots, \sigma_{p_\alpha} = \varphi(\sigma_{p_\alpha-1}), \alpha = \varphi(\sigma_{p_\alpha})$. Таким образом, $(\alpha, \sigma_1) \in \rho, (\sigma_1, \sigma_2) \in \rho, \dots, (\sigma_{p_\alpha-1}, \sigma_{p_\alpha}) \in \rho, (\sigma_{p_\alpha}, \alpha) \in \rho$. Случай (б) разбивается на два подслучая.

(б1) Пусть существуют α, β такие, что $p_\alpha \neq p_\beta$. Не ограничивая общности, будем считать, что для любого γ $p_\gamma \geq p_\alpha, p_\beta > p_\alpha$. Рассмотрим $(\rho, 1, p_\alpha, M)$ -отношение $\bar{\rho}$, где

$$M = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (p_\alpha - 1, p_\alpha), (p_\alpha, 1)\}.$$

Очевидно, $(\alpha) \in \tilde{\rho}$, но $(\beta) \notin \tilde{\rho}$, т.е. $\tilde{\rho} \in \mathcal{P}$.

(b2) Пусть ρ таково, что $p_0 = p_1 = \dots = p_{k-1} = \tilde{p}$. Если $\tilde{p}$ — простое число, то $\rho \in S$. Пусть $\tilde{p}$ не является простым. Тогда существует простое число $p > 1$ и число $\tilde{p}_0 \geq 2$ такие, что $\tilde{p} = p\tilde{p}_0$. Рассмотрим $(\rho, 2, \tilde{p}_0, M)$ -отношение $\tilde{\rho}$, где

$$M = \{(1, 3), (3, 4), \dots, (\tilde{p}_0 - 1, \tilde{p}_0), (\tilde{p}_0, 2)\}.$$

Очевидно, для любого α $(\alpha, \alpha) \notin \tilde{\rho}$, $\tilde{\rho} \in \tilde{S}$, причем $\tilde{\rho}$ является графиком некоторой подстановки $\tilde{\varphi}$. Нетрудно видеть, что подстановка $\tilde{\varphi}$ разлагается в произведения циклов одинаковой простой длины p , т.е. $\tilde{\rho} \in S$. Теорема доказана.

7. Доказательство теоремы 1

Справедливость утверждения теоремы 1 прямо следует из следствия 1 и теорем 4, 7; 12, 14 и 15.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность В. Б. Кудрявцеву за весьма существенную помощь и поддержку, оказанную им при написании данной статьи, а также С. В. Яблонскому за внимание к ней.

Список литературы

1. Кудрявцев В. Б. *Функциональные системы*. Изд-во МГУ, Москва, 1982.
2. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР* (1958) **51**, 5–142.
3. Rosenberg J. Über die functionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. *Rozprawy Československé Akademie Vid.* (1970) **80**, №4.
4. Захарова Е. Ю., Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В. О предполных классах в k -значных логиках. *Докл. АН СССР* (1969) **136**, №3, 509–512.
5. Ван-дер Варден Б. Л. *Современная алгебра*, ч. 1. Гостехиздат, Москва, 1947.
6. Ло Чжу-Кай. Precomplete classes determined by normal k -ary relations in the k -valued logic. *Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis* (1964) №3, 34–45.
7. Бувевич В. А. О r -полноте в классе автоматных отображений. *Докл. АН СССР* (1980) **252**, №5, 1037–1041.
8. Бувевич В. А. О r -полноте в классе детерминированных функций. *Докл. РАН* (1992) **326**, №3, 399–403.

Статья поступила 01.10.96.