Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Думов, О простых универсальных мозаичных однородных структурах, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 4, 134–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm547>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 18:05:26

О простых универсальных мозаичных однородных структурах

© 1996 г. А. С. Думов

Вводится понятие мозаичных однородных структур как расширение понятия однородных структур. Рассматривается проблема моделирования функционирования одних мозаичных однородных структур другими. Приводится доказательство универсальности (т.е. возможности моделирования с помощью данной структуры любой другой соответствующей структуры) нескольких мозаичных однородных структур с треугольными, квадратными и шестиугольными ячейками. В первом случае рассматривается структура с тремя состояниями, в остальных по две структуры с двумя и тремя состояниями. Шаблон соседства вводится так, что соседними ячейками являются ячейки, имеющие общую сторону.

1. Основные понятия и результаты

Дадим определение плоской мозаичной однородной структуры, основываясь на определении однородной структуры [1]. Плоской мозаичной однородной структурой, или просто мозаичной однородной структурой (МОС) S , назовем набор $S = (Z, E_n, V, f)$, где Z — мозаика на плоскости, т.е. множество, состоящее из равных между собой непересекающихся равносторонних m -угольников, в совокупности полностью покрывающих плоскость, причем устроенное таким образом, что каждая сторона каждого m -угольника является стороной еще одного m -угольника (отметим, что мозаики существуют только для $m = 3, 4, 6$, и в зависимости от значения m будем иногда называть мозаичные однородные структуры треугольными, квадратными или шестиугольными соответственно), $E_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ — отрезок расширенного натурального ряда, $V = \{a_0, \dots, a_h\}$ — конечный упорядоченный набор элементов Z , $a_i \neq a_j$ при $1 \leq i < j \leq h$, f — функция h переменных, $f: (E_n)^h \rightarrow E_n$. Элементы множества Z называются ячейками МОС S . Элементы множества E_n называются состояниями ячеек. Набор V , называемый шаблоном соседства, определяет для каждой ячейки a МОС S набор $V(a)$ следующим образом: в $V(a)$ включаются те ячейки (m -угольники), которые попадают в множество, получаемое таким параллельным переносом множества V , при котором элемент a_0 множества V оказывается совмещенным с a ; или, если такого параллельного переноса не существует, что возможно при $m = 3$, то параллельным переносом множества V , повернутого на угол 180° . Элемент a_0 множества V назовем центральным элементом множества V , а полученный набор $V(a)$ — окрестностью ячейки a . Отметим, что из

неравенства $1 \leq i < j \leq h$, использованного при определении шаблона соседства V , вытекает возможность повторного вхождения a_0 в набор, что означает принадлежность любой ячейки a своей окрестности. Шаблон соседства будем называть естественным, если окрестность каждой ячейки составляет она сама и ячейки, имеющие с ней общую сторону. Шаблон соседства будем называть естественным проколотым, если окрестность каждой ячейки составляют только ячейки имеющие с ней общую сторону, но не сама ячейка. Функция f называется локальной функцией переходов МОС S .

Состоянием МОС S называем произвольную функцию g , определенную на множестве Z и принимающую значения из E_n . Если $a \in Z$ и g — состояние МОС S , то значение $g(a)$ называем состоянием ячейки a , определяемым состоянием g мозаичной однородной структуры S . Конфигурациями МОС S будем называть подмножества множества ячеек в состояниях, отличных от нулевого. На множестве Γ всех состояний МОС S определим основную функцию переходов F мозаичной однородной структуры S , полагая $F(g_1) = g_2$, если $g_1, g_2 \in \Gamma$ и выполняется тождество $g_2(a) = f(g_1(a^1), \dots, g_1(a^h))$, где a^i — ячейка из шаблона соседства ячейки a , в которую переходит ячейка a_i при параллельном переносе, определяющем окрестность ячейки a . Функционирование МОС S представляет собой последовательность ее состояний $g_0, g_1, \dots$, для которых выполняется равенство $g_{i+1} = F(g_i)$, $i = 0, 1, \dots$. Состояние g_0 интерпретируется как некоторое изначально задаваемое состояние. Состояние g_i иногда интерпретируется как состояние МОС в момент времени i .

Далее, перейдем к определению представимости функционирования одной однородной структуры посредством функционирования другой. Сначала дадим определение разбиения мозаики. Под разбиением мозаики из m -угольников будем понимать мозаику из m -угольников меньшего размера, удовлетворяющих следующим правилам:

- (a) стороны m -угольников разбиения должны быть параллельны сторонам m -угольников исходной мозаики;
- (b) углы m -угольников разбиения должны совпадать с углами исходной мозаики.

Отметим, что в случае с треугольными и квадратными мозаиками разбиение может быть получено дроблением каждого треугольника (квадрата) на равные между собой треугольники (квадраты) меньшего размера. К сожалению, с шестиугольными мозаиками этот прием не проходит, поскольку шестиугольник нельзя разбить на меньшие шестиугольники. Пусть $S = (Z, E_n, V, f)$, $S' = (Z', E_{n'}, V', f')$ — некоторые МОС, причем мозаика Z' является разбиением мозаики Z . Сопоставим каждой ячейке a МОС S множество (блок) $P(a)$ ячеек МОС S' таких, что отождествляемые с ними m -угольники либо полностью принадлежат m -угольнику, отождествляемому с ячейкой a , либо пересекаются правой или нижней сторонами этого m -угольника. Второе условие имеет смысл только при $m=6$. Термины правый и нижний в этом случае могут трактоваться естественным образом в рамках произвольно выбранной системы координат, ось абсцисс которой идет параллельно некоторым сторонам шестиугольников, составляющих мозаику. Таким образом, мы получаем разбиение множества ячеек S' на блоки с одинаковым количеством ячеек, совпадающие с точностью до параллельного переноса. Пусть w — взаимно однозначное отображение множества

E_n состояний ячейки a МОС S на подмножество M множества состояний блока ячеек $P(a)$ МОС S' , одинаковое для всех ячеек МОС S . Сопоставим произвольному состоянию h МОС S такое состояние h' МОС S' , что для любой ячейки a МОС S , состояние блока ячеек $P(a)$ МОС S' определяется как $w(a)$. Введем обозначение $h' = R(h)$. Если существует такое натуральное N , что для любого функционирования $g_0, g_1, \dots$ МОС S функционирование $g'_0 = R(g_0), g'_1, g'_2, \dots$ удовлетворяет соотношению $g'_{iN} = R(g_i)$, $i = 1, 2, \dots$, то говорим, что МОС S представима в МОС S' с замедлением N . Если произвольная МОС S представима в некоторой МОС S' , то МОС S' называется универсальной.

Теорема 1. *Существует универсальная мозаичная однородная структура с треугольными ячейками, с тремя состояниями ячейки и естественным шаблоном соседства.*

Теорема 2. *Существует универсальная мозаичная однородная структура с квадратными ячейками, с двумя состояниями ячейки и естественным шаблоном соседства.*

Теорема 3. *Существует универсальная мозаичная однородная структура с квадратными ячейками, с тремя состояниями ячейки и естественным проколотым шаблоном соседства.*

Теорема 4. *Существует универсальная мозаичная однородная структура с шестиугольными ячейками, с двумя состояниями ячейки и естественным шаблоном соседства.*

Теорема 5. *Существует универсальная мозаичная однородная структура с шестиугольными ячейками, с тремя состояниями ячейки и естественным проколотым шаблоном соседства.*

2. Доказательство теорем

Представленное в данной работе доказательство носит схематичный характер и базируется на идее перехода к задаче моделирования схем из функциональных элементов в некотором базисе. Сначала докажем универсальность мозаичных однородных структур из теорем 1 и 2: с треугольными и квадратными ячейками и естественным шаблоном соседства. Поскольку оба доказательства основываются на моделировании в основном одних и тех же элементов, будем вести их по возможности параллельно. В качестве треугольной МОС возьмем МОС, функция переходов f которой определяется следующей таблицей (состояния соседей указаны с точностью до перестановки):

состояния соседей	000	001	002	011	012	022	111	112	122	222
текущее состояние 0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
текущее состояние 1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
текущее состояние 2	0	0	1	1	2	2	2	2	2	1

Рис. 1.

Рис. 2.

Для МОС с ячейками-квадратами функцию переходов f определим следующим образом: состояние ячейки обращается в 0, если в ее окрестности меньше одной ячейки находится в состоянии 1; состояние ячейки обращается в 1, если в ее окрестности ровно две ячейки находятся в состоянии 1, причем не симметричные относительно данной; иначе состояние ячейки не меняется.

Далее покажем возможность построения в этих МОС ряда конфигураций, способных в некотором смысле моделировать схемы из функциональных элементов. Рассмотрим следующие конфигурации.

Передающий канал и сигнал. Эти конфигурации приведены на рис.1 и рис.8 соответственно. Нетрудно проверить, что в процессе функционирования треугольной МОС конфигурация из двух верхних ячеек будет перемещаться вправо, на одну ячейку за один такт, при этом циклически меняя два состояния. (В процессе функционирования квадратной МОС происходит только движение конфигурации, без изменения состояний.) Совершенно аналогичные конфигурации будут осуществлять движение в других направлениях. Будем называть такие конфигурации сигналами, а конфигурации, по которым сигналы осуществляют движение — передающими каналами. Заметим, что дойдя до конца канала, сигнал исчезает.

Генератор сигналов. На рис.2 и рис.9 представлен вид конфигураций, которые в процессе функционирования МОС осуществляют генерацию сигналов. Частота возникновения сигналов зависит от длины отмеченных стрелками отрезков. Назовем такие конфигурации генераторами сигналов.

Вилка. Вилками назовем конфигурации, представленные на рис.3 и рис.10, которые осуществляют расщепление сигнала на два. (В случае треугольной

Рис. 3.

Рис. 4.

МОС осуществляется столкновение двух сигналов и их перерождение в два других. Предполагается, что один из сигналов, участвующих в столкновении, периодически генерируется описанной в предыдущем пункте конфигурацией, а второй — расщепляющийся — возникает в соответствующие моменты времени.)

Мельница1 и мельница2. Мельницами назовем конфигурации, позволяющие поворачивать сигналы. На рис.4 и рис.5 приведены мельницы для треугольной МОС, соединенные каналами таким образом, что сигнал заикливаясь. В случае с квадратной МОС мельница, переворачивающая сигнал, может быть получена, если погасить один из возникающих после вилки сигналов, вторая (поворачивающая сигнал под углом 90°) приведена на рис.11.

Конъюнктор. На рис.6 и рис.12 приведена конфигурация, которая осуществляет конъюнкцию сигналов, появляющихся на ее входах A и B . Предполагается, что сигналы могут возникать на входах не в любой момент времени t , а только в моменты Nt , где N — некоторая натуральная константа. На выходе C сигнал возникает только если сигналы возникли на обоих входах A и B одновременно. Эту конфигурацию будем называть *конъюнктом*.

Рис. 5.

Рис. 6.

Далее приводятся одна конфигурация (отрицание) для треугольной МОС и две (диод и сумматор по модулю 2) для квадратной МОС.

Отрицание. На рис.7 приведена конфигурация (отрицание), на выходе B которой в определенные моменты времени возникает сигнал, если на входе A в соответствующий момент сигнал не возник, и наоборот. Как и в случае с конъюнктом, предполагается возникновение сигналов на входе лишь в моменты времени Nt , где N — натуральная константа.

Диод. Назовем диодом конфигурацию, изображенную на рис.13. Она пропускает сигналы только в одном направлении (от A к B).

Сумматор по модулю 2. Конфигурация, называемая сумматором, представлена на рис.14. Предполагается, что к ее входам A и B примыкают описанные в предыдущем пункте конфигурации-диоды. Как и в случае с конъюнктом, предполагается возникновение сигналов на входах лишь в моменты времени Nt , где N — натуральная константа.

Пересечение. Пересечение каналов, требуемое для моделирования схем из функциональных элементов, может быть реализовано на основании следующих соображений. Пусть на входах дизъюнктора A и B (его можно построить, используя уже введенные конфигурации) могут возникать сигналы,

Рис. 7.

Рис. 8.

Рис. 9.

Рис. 10.

Рис. 11.

Рис. 12.

но не одновременно, более того, предполагается, что в течение некоторого интервала времени N может быть подано не более одного сигнала. Сигнал на выходе передается на вилку, каждый из выходов которой соединен с одним из входов двух конъюнкторов K_1 и K_2 . Оставшиеся входы конъюнкторов соединены с двумя генераторами сигналов G_1 и G_2 , порождающими сигналы в различные моменты времени, причем так, что сигнал от G_1 должен конкатенировать с сигналом, поданным на вход B , а сигнал от G_2 — с сигналом, поданным на вход A . Таким образом, на выходе конъюнктора K_1 возникает сигнал, если сигнал был подан на вход B , а на выходе конъюнктора K_2 — если сигнал был подан на вход A .

Теперь рассмотрим произвольную МОС S' . Достаточно очевидно, что она может быть смоделирована в некоторой МОС S'' с естественным шаблоном соседства. Покажем, что ОС S'' (и, тем самым, ОС S') моделируется в ОС S . Представим, что ячейки однородной структуры соединены со своими соседями. Между каждой парой соседей есть k одноразрядных каналов, $k = 2 \lceil \log_2 n'' \rceil$, где n'' — число состояний ячейки. Одна половина из них используется для передачи своего состояния (в двоичном представлении) соседу, а вторая половина —

Рис. 13.

Рис. 14.

для приема состояния соседа. Таким образом наша задача может быть сведена к построению в рамках однородной структуры модели схемы из функциональных элементов. Описанные выше конъюнктор, генератор сигналов, отрицание для треугольной и сумматор для квадратной МОС в сочетании с вилкой дают полную функциональную систему. Для состыковки между собой различных сигналов могут быть использованы повороты каналов с применением мельниц. Возникновение соответствующих сигналов в соответствующие моменты времени может также осуществляться посредством поворотов каналов. Осуществление пересечения сигналов было описано выше.

Для доказательства теоремы 3 достаточно рассмотреть мозаичную однородную структуру, функция переходов которой с точностью до поворотов на 90° , 180° , 270° и зеркальных отражений определяется следующими равенствами:

$$\begin{aligned} f(0,0,1,2) &= 2, & f(0,0,2,2) &= 2, & f(0,1,1,2) &= 1, & f(1,1,1,2) &= 1, \\ f(1,1,2,2) &= 1, & f(0,0,1,1) &= 1, & f(0,1,1,1) &= 1, & f(1,1,1,1) &= 1, \end{aligned}$$

в остальных случаях $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, где аргументы функции f суть состояния занумерованных по часовой стрелке ячеек из окрестности данной. Приведенные в предыдущем доказательстве конфигурации не изменяются, за исключением того, что обе ячейки сигнала должны находиться в состоянии 2.

Для доказательства теорем 4 и 5 достаточно отметить, что исключением из естественного (или естественного проколотого) шаблона соседства пары противоположных ячеек, шестиугольная мозаичная однородная структура сводится к квадратной мозаичной однородной структуре.

Список литературы

1. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
2. Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Болотов А. А. *Основы теории однородных структур*. Наука, Москва, 1990.

Статья поступила 09.10.95.