Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Э. Гасанов, Нижняя оценка сложности информационных сетей для одного отношения частичного порядка, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 4, 108–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm548>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:23:33

Нижняя оценка сложности информационных сетей для одного отношения частичного порядка

© 1996 г. Э. Э. Гасанов

В статье исследуются задачи поиска, в которых отношение поиска является отношением частичного порядка. Доказано общее свойство таких задач, названное фактом существования главных цепей. С помощью этого свойства для задач поиска с естественным отношением частичного порядка, заданным на булевом кубе, получена нижняя оценка. Доказано существование таких задач с данным отношением поиска, для которых полученная нижняя оценка асимптотически неулучшаема.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 95-01-00597.

1. Введение

В практике информационного поиска большое место занимают задачи, в которых отношения поиска являются отношениями частичного порядка или при декомпозиции дают отношения частичного порядка. Частным случаем частичного порядка является линейный порядок. Случай задач поиска с отношениями линейного порядка или базирующихся на линейных порядках является наиболее разработанной областью теории информационного поиска. Так в [1] дано полное решение задачи поиска с отношением поиска, являющимся отношением линейного квазипорядка. Примерами задач, базирующихся на линейных порядках, являются задачи поиска идентичных объектов и задачи о близости, описанные в [2], где также доказано, что эти задачи являются мгновенно решаемыми и приводятся довольно простые алгоритмы их мгновенного решения. В случае, когда частичный порядок не является линейным порядком, ситуация естественно сложнее. Примером задачи с частичным порядком является задача о доминировании, описанная в [3]. По методу, описанному в [2], можно доказать, что задача о доминировании является мгновенно решаемой, но мгновенный алгоритм, построенный по этому методу, требует квадратичных затрат по памяти. Примером задачи, базирующейся на частичных порядках, является многомерная задача интервального поиска, мгновенное решение которой приводится в [2]. Другим примером задач поиска с частичными порядками являются задачи включающего поиска, упоминаемые в [4]. Наиболее интересным примером

задачи включающего поиска на булевом кубе является задача поиска с естественным отношением частичного порядка, задаваемым на булевом кубе, отношением “не меньше покомпонентно”. Эта задача и исследуется в данной статье. Кроме того, в статье доказано некое общее свойство задач поиска с отношениями частичного порядка, названное фактом существования главных цепей. Этот факт описывает некоторое свойство оптимальных информационных сетей, разрешающих задачи поиска с отношениями частичного порядка, и может служить подспорьем при получении нижних оценок сложности. Вообще, известным фактом в теории информационного поиска является так называемая тривиальная нижняя оценка [5], которая говорит, что временная сложность задач поиска не меньше, чем время, необходимое на перечисление ответа. Получение же нижних оценок, отличных от тривиальной нижней оценки — задача, вообще говоря, не тривиальная. В данной работе для задач поиска с отношением “не меньше покомпонентно” удалось получить нижнюю оценку, превосходящую тривиальную нижнюю оценку. Кроме того, было доказано существование задач поиска, для которых эта оценка асимптотически не улучшаема.

Автор выражает благодарность В. Б. Кудрявцеву и А. С. Подколзину за поддержку в работе.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Мы будем использовать терминологию и обозначения из работы [2].

Пусть X — множество запросов, причем на X определена вероятность, т.е. задано вероятностное пространство $\langle X, \sigma, \mathbf{P} \rangle$, где σ — алгебра подмножеств множества X , $\mathbf{P}$ — вероятностная мера на σ ; Y — множество записей (объектов поиска); ρ — бинарное отношение на $X \times Y$, называемое отношением поиска; тройку $S = \langle X, Y, \rho \rangle$ (или пятерку $S = \langle X, Y, \rho, \sigma, \mathbf{P} \rangle$, если мы хотим подчеркнуть какое именно вероятностное пространство над X используется) будем называть типом или иногда более развернуто типом задач информационного поиска; тройку $I = \langle X, V, \rho \rangle$, где V — некоторое конечное подмножество множества Y , в дальнейшем называемое библиотекой, будем называть задачей информационного поиска (ЗИП) типа $S = \langle X, Y, \rho \rangle$ (или ЗИП, принадлежащей типу S , и обозначать $I \in S$), и будем считать, что задача $I = \langle X, V, \rho \rangle$ состоит в перечислении для произвольно взятого запроса $x \in X$ всех тех и только тех записей из V , которые находятся в отношении ρ с запросом x , т.е. удовлетворяют запросу x ; $O(y, \rho) = \{x \in X : x\rho y\}$ — тень записи $y \in Y$; $N_f = \{x \in X : f(x) = 1\}$, где f — одноместный предикат, определенный на X , т.е. $f: X \rightarrow \{0, 1\}$; $\chi_{y, \rho}: X \rightarrow \{0, 1\}$ такая, что $N_{\chi_{y, \rho}} = O(y, \rho)$ — характеристическая функция записи y ; F — множество символов одноместных предикатов, определенных на множестве X , называемое базовым множеством предикатов; G — множество символов одноместных переключателей, определенных на множестве X . Под переключателями будем понимать функции, область значений которых являются конечные подмножества натурального ряда.

Пару $\mathcal{F} = \langle F, G \rangle$ назовем базовым множеством.

Если n — натуральное число, а $g(x)$ — некий переключатель, то через $\xi_g^n(x)$

обозначим предикат, определенный на X , такой, что

$$N_{\xi_g^n} = \{x \in X : g(x) = n\}.$$

Обозначим

$$\widehat{G} = \{\xi_g^n : g \in G, n \in \mathbb{N}\}.$$

Мы не будем здесь приводить понятие информационной сети с переключателями (ИСП) над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle F, G \rangle$, поскольку оно громоздко и полностью приводится в [2]. Там же можно найти понятия проводимости ребра, проводимости ориентированной цепи, функции фильтра вершины β , обозначаемой через $\varphi_\beta(x)$, функции ответа ИСП, сложности ребра ИСП, а также понятия сложности ИСП U на запросе x , сложности ИСП U и сложности ЗИП I при базовом множестве $\mathcal{F}$, обозначаемые соответственно $T(U, x)$, $T(U)$, $T(I, \mathcal{F})$.

Если зафиксировать запрос x , то цепь, проводимость которой на запросе x равна 1, назовем проводящей цепью на запросе x .

В случае, когда базовое множество переключателей G пусто, т.е. в сетях нет переключателей, то ИСП называются информационными сетями с дублированием листьев (ИСД).

В данной статье мы будем в основном исследовать именно ИСД.

Скажем, что ИСП U разрешает ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$, если для всех $x \in X$ ответ на запрос x содержит все те и только те записи из библиотеки V , которые удовлетворяют запросу x .

Через $\mathcal{U}(I, \mathcal{F})$ обозначим множество всех ИСП над базовым множеством $\mathcal{F}$, разрешающих ЗИП I .

Скажем, что базовое множество $\mathcal{F}$ полно для типа S , если $\mathcal{U}(I, \mathcal{F}) \neq \emptyset$ для любой ЗИП I типа S .

Пусть M — некоторое множество. Через $|M|$ обозначим число элементов в множестве M , называемое мощностью множества M .

Будем писать $\alpha(n) = o(1)$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = 0$. Будем писать $A(n) = o(B(n))$, если $A(n) = B(n)o(1)$. Через $\binom{n}{k}$ будем обозначать число сочетаний из n элементов по k . Под отношением частичного порядка $\succsim$ на $X \times X$ будем понимать отношение, для любых $x, y, z \in X$ удовлетворяющее условиям рефлексивности $x \succsim x$, транзитивности $(x \succsim y) \& (y \succsim z) \rightarrow (x \succsim z)$ и антисимметричности $(x \succsim y) \& (y \succsim x) \rightarrow (x = y)$.

Будем рассматривать тип задач поиска

$$S_p = \langle X, X, \succsim \rangle,$$

где X — некоторое конечное множество, $\succsim$ — некоторое отношение частичного порядка на $X \times X$.

Пусть $a \in X$, $R_a = \{x \in X : x \succsim a\}$, K_a — функция, действующая из X в $\{0, 1\}$ такая, что $N_{K_a} = R_a$. Отметим, что $K_a(x)$ есть характеристическая функция записи a . Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \{K_a(x) : a \in X\}, \\ \mathcal{M} &= \left\{ \bigvee_{i=1}^n K_{a_i}(x) : a_i \in X, n \in \mathbb{N} \right\}, \end{aligned}$$

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

Пусть базовое множество имеет вид $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}, \emptyset \rangle$. Пусть U — ИСД над базовым множеством $\mathcal{F}$. Подмножество $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ вершин сети U назовем характерным, если существует такая запись $a \in X$, что $\bigvee_{i=1}^m \varphi_{\beta_i} = K_a$.

Пусть U — ИСД над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}, \emptyset \rangle$. Пусть $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ — характерное подмножество вершин сети U такое, что $\bigvee_{i=1}^m \varphi_{\beta_i} = K_a$. Если в сети U существует такая цепь, ведущая из корня в какую-либо вершину множества $\mathcal{B}$, что проводимость этой цепи равна K_a , то эту цепь назовем главной цепью характерного множества $\mathcal{B}$.

Теорема 1 (о существовании главных цепей). Пусть U — произвольная ИСД над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}, \emptyset \rangle$. Пусть $\mathcal{B}$ — произвольное характерное подмножество вершин сети U . Тогда в сети U существует главная цепь множества $\mathcal{B}$.

Следствие 1. Пусть $I = \langle X, V, \succ \rangle$ — ЗИП типа S_p . Пусть U — ИСД над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}, \emptyset \rangle$, разрешающая ЗИП I . Тогда для любой записи $y \in V$ такой, что $O(y, \succ) \neq \emptyset$, в сети U существует цепь, ведущая из корня в какую-либо вершину множества $L_U(y)$, такая, что проводимость этой цепи равна $\chi_{y, \succ}$.

Рассмотрим тип задач поиска

$$S_b = \langle B^n, B^n, \supseteq, \sigma, \mathbf{P} \rangle,$$

где B^n — единичный n -мерный куб, т.е.

$$B^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n\},$$

$\supseteq$ — отношение поиска на $B^n \times B^n$, определяемое соотношением

$$(x_1, \dots, x_n) \supseteq (y_1, \dots, y_n) \iff x_i \geq y_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

σ — алгебра подмножеств B^n , представляющая собой множество всех подмножеств B^n , $\mathbf{P}$ — равномерная вероятностная мера на σ , то есть такая мера, что $\mathbf{P}(x) = 1/2^n$ для всех $x \in B^n$ и $\mathbf{P}(A) = |A|/2^n$ для всех $A \subseteq B^n$.

Задачи поиска, принадлежащие данному типу, есть разновидность задач, именуемых в литературе задачами включающего поиска (см., например, [4]), поэтому тип S_b мы назовем типом включающего поиска, а задачи, принадлежащие этому типу, — задачами включающего поиска.

Напомним, что в соответствии с [7] весом набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n$ называют число его координат, равных 1. Формула $x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2}^{\sigma_2} \& \dots \& x_{i_r}^{\sigma_r}$, где $\&$ — знак конъюнкции, $\sigma_k \in \{0, 1\}$, $x_{i_k}^0 = \bar{x}_{i_k}$, $x_{i_k}^1 = x_{i_k}$, $i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k = 1, 2, \dots, r$, $r \geq 1$, $n \geq 1$, называется конъюнкцией над множеством переменных $X^n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Если $x_{i_j} \neq x_{i_k}$ при $j \neq k$, то конъюнкция называется элементарной. Элементарная конъюнкция называется монотонной, если она не содержит отрицаний переменных. Множество элементарных монотонных конъюнкций от n переменных будем обозначать через $\mathcal{K}^n$.

Функция алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$ называется монотонной, если для любых двух наборов α и β из B^n таких, что $\alpha \supseteq \beta$, имеет место неравенство

$f(\alpha) \geq f(\beta)$. Дизъюнкция элементарных монотонных конъюнкций есть монотонная функция. Множество монотонных булевых функций от n переменных будем обозначать через $\mathcal{M}^n$.

Рассмотрим произвольную запись $y \in B^n$. Пусть $\{i_1, \dots, i_k\}$ есть множество номеров координат вектора y , которые равны 1. Нетрудно заметить, что

$$\chi_{y, \supseteq}(x_1, \dots, x_n) = x_{i_1} \& x_{i_2} \& \dots \& x_{i_k},$$

т.е. характеристическая функция записи y является элементарной монотонной конъюнкцией.

Отсюда, согласно теореме 1 из [6], сеть, разрешающая некоторую задачу включающего поиска, представляет собой сеть, реализующую некоторую систему элементарных монотонных конъюнкций. Отсюда, согласно теореме 2 из [5], следует, что каждое из базовых множеств $\langle \mathcal{M}^n, \emptyset \rangle$, $\langle \mathcal{K}^n, \emptyset \rangle$ и $\langle X^n, \emptyset \rangle$ является полным для типа S_b .

Теорема 2 (нижняя оценка). Пусть $I = \langle B^n, V, \supseteq \rangle$ — ЗИП типа S_b . Пусть базовое множество имеет вид $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}^n, \emptyset \rangle$, где $\mathcal{M}^n$ — множество монотонных булевых функций. Тогда

$$T(I, \mathcal{F}) \geq 2 \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \supseteq)) - t_0,$$

где t_0 — число записей веса 0 в библиотеке V , $t_0 \in \{0, 1\}$.

Теорема 3 (верхняя оценка). Пусть $I = \langle B^n, V, \supseteq \rangle$ — ЗИП типа S_b . Пусть базовое множество имеет вид $\mathcal{F} = \langle \mathcal{K}^n, \emptyset \rangle$, где $\mathcal{K}^n$ — множество монотонных элементарных конъюнкций. Пусть $|V| = k$ и m — такое число, что

$$2 \binom{n}{m} < k \leq 2 \binom{n}{m+1}.$$

Тогда

$$T(I, \mathcal{F}) \leq 1 + \sum_{i=1}^m 2^{1-i} \binom{n}{i} + 2^{-m} k.$$

Теорема 3 позволяет показать, что существуют библиотеки, для которых нижняя оценка теоремы 2 асимптотически неулучшаема.

Следствие 2 (асимптотическая неулучшаемость нижней оценки). Если базовое множество имеет вид $\mathcal{F} = \langle F, \emptyset \rangle$, где $F \subseteq \mathcal{M}^n$ и $\mathcal{K}^n \subseteq F$, то существуют такие ЗИП $I = \langle B^n, V, \supseteq \rangle$ типа S_b , что

$$T(I, \mathcal{F}) = 2 \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \supseteq))(1 + o(1)).$$

3. Теорема о существовании главных цепей

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы, докажем некоторые свойства частичных порядков.

Свойство 1. Если $a, b \in X$, $K_b \in \mathcal{K}$ и $K_b(a) = 1$, то $N_{K_a} \subseteq N_{K_b}$.

Доказательство. Так как $K_b(a) = 1$, то $a \succ b$. Если $c \in N_{K_a}$, то $c \succ a \succ b$. Отсюда следует, что $c \succ b$ и, следовательно, $c \in N_{K_b}$, что и требовалось доказать.

Свойство 2. Если $a \in X$, $f \in \mathcal{M}$ и $f(a) = 1$, то $N_{K_a} \subseteq N_f$.

Доказательство. Пусть

$$f = \bigvee_{i=1}^n K_{a_i}.$$

Так как $f(a) = 1$, существует K_{a_i} такое, что $K_{a_i}(a) = 1$, но тогда согласно свойству 1 $N_{K_a} \subseteq N_{K_{a_i}}$ и, следовательно, $N_{K_a} \subseteq N_f$, что и требовалось доказать.

Свойство 3. Пусть $a \in X$ и

$$\bigvee_{i=1}^n f_i = K_a, \quad f_i \in \mathcal{M}.$$

Тогда существует i такое, что $f_i = K_a$.

Доказательство. Так как $K_a(a) = 1$, то существует i такое, что $f_i(a) = 1$. Тогда, согласно свойству 2, $N_{K_a} \subseteq N_{f_i}$, но из условия следует, что $N_{f_i} \subseteq N_{K_a}$, следовательно $N_{K_a} = N_{f_i}$, то есть $K_a = f_i$, что и требовалось доказать.

Свойство 4. Если $a \in X$,

$$f = \bigwedge_{i=1}^n f_i, \quad f_i \in \mathcal{M},$$

и $f(a) = 1$, то $N_{K_a} \subseteq N_f$.

Доказательство. Ясно, что

$$N_f = \bigcap_{i=1}^n N_{f_i}.$$

Так как $a \in N_f$, то $a \in N_{f_i}$ для любого $i = 1, \dots, n$. Отсюда, согласно свойству 2, $N_{K_a} \subseteq N_{f_i}$ для любого $i = 1, \dots, n$. Следовательно,

$$N_{K_a} \subseteq \bigcap_{i=1}^n N_{f_i} = N_f,$$

что и требовалось доказать.

Точку $a \in R$ назовем нижней единицей множества $R \subseteq X$, если не существует точки $b \in R \setminus \{a\}$ такой, что $a \succ b$.

Свойство 5. Если

$$f = \bigwedge_{i=1}^n f_i, \quad f_i \in \mathcal{M},$$

то либо $f \in \mathcal{M}$, либо $f \equiv 0$.

Доказательство. Ясно, что

$$N_f = \bigcap_{i=1}^n N_{f_i}.$$

Допустим, что

$$\bigcap_{i=1}^n N_{f_i} \neq \emptyset,$$

т.е. $f \neq 0$. Просмотрим все точки множества N_f (а их конечное число), и для каждой проверим, является ли она нижней единицей. Пусть $M = \{a_1, \dots, a_m\}$ — множество всех нижних единиц множества N_f , которое мы в результате получили. Легко видеть, что для любой точки $a \in N_f$ либо $a \in M$, либо существует $a_i \in M$ такая, что $a \succ a_i$. Из того, что $a \succ a_i$, следует, что $K_{a_i}(a) = 1$ и $a \in N_{K_{a_i}}$. Следовательно,

$$N_f \subseteq \bigcup_{i=1}^m N_{K_{a_i}}.$$

С другой стороны, согласно свойству 4 (используем то, что $f(a_i) = 1$) для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ справедливо включение $N_{K_{a_i}} \subseteq N_f$. Следовательно,

$$N_f = \bigcup_{i=1}^m N_{K_{a_i}}$$

и, значит, $f \in \mathcal{M}$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим некоторую цепь C сети U . Обозначим через f_C проводимость цепи C . Пусть C — такая цепь, что $f_C \neq 0$. Так как f_C равна конъюнкции нагрузок ребер цепи C , $f_C \in \mathcal{M}$ согласно свойству 5. Пусть $\mathcal{C}_B$ — множество цепей, ведущих из корня в вершины множества B . Так как B — характерное множество, существует такая запись $a \in X$, что

$$\bigvee_{\beta \in B} \varphi_\beta = \bigvee_{C \in \mathcal{C}_B} f_C = K_a.$$

Поэтому, согласно свойству 3, существует цепь $C' \in \mathcal{C}_B$ такая, что $f_{C'} = K_a$. Эта цепь C' и есть главная цепь множества B , что и требовалось доказать.

Доказательство следствия 1. Так как ИСД U разрешает ЗИП I ,

$$\bigvee_{\alpha \in L_U(y)} \varphi_\alpha = \chi_{y, \varphi} = K_y$$

согласно теореме 1 из [6]. Следовательно, множество $L_U(y)$ есть характерное множество, и, согласно теореме 1, в сети U существует главная цепь множества $L_U(y)$, что и требовалось доказать.

4. Нижняя оценка

Напомним, что в соответствии с [7] гранью единичного n -мерного куба B^n называется множество

$$B_{i_1, \dots, i_k}^{n, \sigma_1, \dots, \sigma_k} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n : \alpha_{i_1} = \sigma_1, \dots, \alpha_{i_k} = \sigma_k\}.$$

Множество вершин куба, имеющих вес k , называется k -м слоем куба B^n . Номер набора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n$ назовем числом

$$\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n 2^{n-i} \alpha_i.$$

Будем считать, что наборы в слое куба упорядочены в порядке возрастания их номеров. Множество, состоящее из m первых наборов k -го слоя куба B^n , будем называть начальным отрезком длины m этого слоя.

Нам понадобится теорема Краскала–Катоны, приведенная, например, в работах [8, 9]. Переформулируем ее в удобных для нас терминах.

Теорема 4 (Краскала–Катоны). Пусть B_m^n — m -ый слой куба B^n и $A \subseteq B_m^n$. Пусть

$$R(A) = \{\alpha \in B_{m+1}^n : (\exists \beta \in A : \alpha \supseteq \beta)\}.$$

Тогда минимум $|R(A)|$ достигается, если A — начальный отрезок слоя B_m^n , причем в этом случае $R(A)$ — начальный отрезок слоя B_{m+1}^n .

Для $A \in B^n$ положим

$$O(A, \supseteq) = \bigcup_{y \in A} O(y, \supseteq).$$

Приведем одно простое следствие.

Следствие 3 (теоремы Краскала–Катоны). Пусть $A \subseteq B_m^n$, тогда $|O(A, \supseteq)|$ достигает минимума, если A — начальный отрезок слоя B_m^n .

Лемма 1. Пусть $I = \langle B^n, V, \supseteq \rangle$ — ЗИП типа S_b . Пусть U — разрешающая ЗИП I ИСД над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}^n, \emptyset \rangle$. Тогда существует такое разбиение библиотеки V на непересекающиеся части, что

- (1) каждая часть содержит записи одного веса (этот вес назовем весом части),

- (2) каждой части веса $m > 0$ и мощности t можно поставить в соответствие такую совокупность ребер сети U , что сумма сложностей ребер из этой совокупности не меньше, чем $t2^{1-m}$, причем образы различных частей при этом соответствии не пересекаются.

Доказательство. Пусть $V = \{y_1, \dots, y_k\}$. Отметим, что если $y_i \in V$ — запись веса m , то $|O(y_i, \triangleright)| = 2^{n-m}$, так как $O(y_i, \triangleright)$ — $(n-m)$ -мерная грань куба B^n .

Обозначим через A_m^l начальный отрезок длины l m -го слоя куба B^n . Легко видеть, что если $l \leq n-m+1$, то $|O(A_m^l, \triangleright)| = 2^{n-m+1}(1-2^{-l})$.

Так как $O(y_i, \triangleright) \neq \emptyset$ для любой записи $y_i \in V$, согласно следствию 1 из теоремы 1 о существовании главных цепей, для любой записи $y_i \in V$ в сети U существует такая цепь, ведущая из корня в какую-либо вершину множества $L_U(y_i)$, что проводимость этой цепи равна $\chi_{y_i, \triangleright}$. Обозначим эту цепь через C_i и будем называть ее главной цепью записи y_i . Лист из $L_U(y_i)$, в который ведет эта цепь, будем обозначать α_i , $i = 1, \dots, k$.

Рассмотрим произвольную запись $y_i \in V$, $i \in \{1, \dots, k\}$, которая на момент рассмотрения не попала ни в какую часть разбиения. Пусть ее вес равен $m > 0$. Пусть $\beta_i \neq \alpha_i$ — ближайшая к α_i вершина в цепи C_i , через которую проходит также главная цепь какой-то другой записи. Такая вершина β_i обязательно существует, в крайнем случае β_i — корень сети U , так как все главные цепи начинаются в корне. Пусть γ_i — вершина сети, в которую ведет ребро цепи C_i , исходящее из β_i .

Разберем возможные случаи.

Случай 1. Пусть β_i — корень сети U . Тогда ребро (β_i, γ_i) имеет сложность 1. Мы заведем новую часть разбиения, состоящую из одной записи y_i , и сопоставим этой части ребро (β_i, γ_i) .

Случай 2. Предположим теперь, что β_i не является корнем сети U , но совпадает с каким-либо листом α_j , где $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$. Легко заметить, что так как C_i и C_j — главные цепи, вес записи y_j больше веса записи y_i и, следовательно, сложность ребра (β_i, γ_i) не меньше, чем 2^{1-m} . Мы заведем новую часть разбиения, состоящую из одной записи y_i , и сопоставим этой части ребро (β_i, γ_i) .

Случай 3. Пусть теперь β_i не является корнем сети U и не совпадает ни с каким листом α_j . Пусть $C_{j_1}, \dots, C_{j_q}$ — множество главных цепей записей, проходящих через вершину β_i .

Случай 3.1. Пусть среди записей $y_{j_1}, \dots, y_{j_q}$ существует запись y_{j_s} , вес которой больше m . Тогда сложность вершины β_i не меньше, чем

$$\mathbf{P}(O(y_{j_s}, \triangleright)) = |O(y_{j_s}, \triangleright)|/2^n \geq 2^{1-m}$$

и, следовательно, сложность ребра (β_i, γ_i) не меньше, чем 2^{1-m} . Мы заведем новую часть разбиения, состоящую из одной записи y_i , и сопоставим этой части ребро (β_i, γ_i) .

Случай 3.2. Предположим, что среди записей $y_{j_1}, \dots, y_{j_q}$ не существует записи, вес которой больше m . Пусть в множестве $\{y_{j_1}, \dots, y_{j_q}\}$ имеется t записей веса m таких, что в главных цепях этих записей между вершиной β_i и листом, в котором заканчивается цепь, нет вершин пересечения с другими главными цепями записей. Понятно, что $t \geq 1$. Обозначим это множество записей через

V' и объявим его новой частью разбиения. Понятно, что все записи из V' до данного момента еще не рассматривались, так как в противном случае запись y_i уже оказалась бы в некоторой части разбиения. Понятно также, что для каждой записи $y_s \in V'$ вершина β_i — ближайшая к α_s вершина в цепи C_s , через которую проходит главная цепь какой-то другой записи, причем, если γ_s — вершина, в которую ведет ребро цепи C_s , исходящее из β_i , то ребро (β_i, γ_s) не принадлежит никакой другой цепи, кроме C_s . Сопоставим V' совокупность ребер, состоящую из t ребер, исходящих из вершины β_i и принадлежащих главным цепям записей из V' , и t' ребер, входящих в вершину β_i и принадлежащих главным цепям записей из V' , $t' \leq t$. Заметим, что сумма сложностей последних t' ребер не меньше, чем $\mathbf{P}(O(V', \supseteq))$, и сложность вершины β не меньше, чем $\mathbf{P}(O(V', \supseteq))$, следовательно, сумма сложностей ребер совокупности, сопоставленной части V' , не меньше, чем

$$(t+1)\mathbf{P}(O(V', \supseteq)) = 2^{-n}(t+1)|O(V', \supseteq)|.$$

Согласно следствию теоремы Краскала–Катоны,

$$|O(V', \supseteq)| \geq |O(A_m^t, \supseteq)|.$$

Следовательно, если $t \leq n - m + 1$, то

$$\begin{aligned} 2^{-n}(t+1)|O(V', \supseteq)| &\geq 2^{-n}(t+1)|O(A_m^t, \supseteq)| \\ &= 2^{-n}(t+1)(1-2^{-t})2^{n-m+1} \\ &= t2^{1-m} + 2^{1-m}(1-(t+1)2^{-t}) \geq t2^{1-m}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$O(y, \supseteq) \setminus O(V' \setminus y, \supseteq) \neq \emptyset$$

для любой записи $y \in V'$, при $t > n - m + 1$

$$\begin{aligned} 2^{-n}(t+1)|O(V', \supseteq)| &\geq 2^{-n}(t+1)(|O(A_m^{n-m+1}, \supseteq)| + t - n + m - 1) \\ &\geq (t+1)2^{1-m} > t2^{1-m}. \end{aligned}$$

Теперь осталось проверить, что указанное соответствие различным частям разбиения сопоставляет различные непересекающиеся множества ребер.

Отметим, что по ходу построения соответствия мы для каждой записи $y_i \in V$, $i \in \{1, \dots, k\}$, нашли свои вершины β_i и γ_i , описанные выше.

Докажем одно полезное свойство.

Свойство 6. Если β_i и γ_i — описанные выше вершины, соответствующие записи y_i , то ребро (β_i, γ_i) принадлежит только совокупности ребер, соответствующей части разбиения, содержащей запись y_i .

Доказательство. Так как для любой записи $y_i \in V$ совокупность ребер, связанная с записью y_i , содержит только ребра либо входящие в β_i , либо исходящие из β_i , то ребро (β_i, γ_i) может попасть в другую совокупность ребер только в том случае, если вершина γ_i совпадает с какой-то другой вершиной β_s . Итак, пусть существует $s \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$ такое, что $\gamma_i = \beta_s$. Тогда γ_i принадлежит цепи

C_s , отличной от C_i , а так как γ_i в цепи C_i ближе к листу α_i , то согласно определению вершины β_i вершина γ_i должна совпадать с вершиной α_i , а это сразу означает, что каждая из записей y_s , вершина β_s которой совпадает с γ_i , подпадает под случай 2, и, значит, содержащая y_s часть состоит из одной записи y_s и ей соответствует одно единственное ребро (β_s, γ_s) , не совпадающее с (β_i, γ_i) .

Тем самым свойство 6 доказано.

Возьмем произвольную запись $y_i \in V$. Покажем, что совокупность ребер, соответствующая части разбиения, содержащей запись y_i , не пересекается с образами никаких других частей разбиения.

Рассмотрим возможные варианты.

Вариант 1. Пусть существует $s \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$ такое, что $\beta_i = \gamma_s$.

Тогда, по тем же соображениям, которые описаны в доказательстве свойства 6, запись y_i подпадает под случай 2, и, значит, содержащая y_i часть разбиения состоит из одной записи y_i и ей соответствует одно-единственное ребро (β_i, γ_i) , которое согласно свойству 6 принадлежит только совокупности ребер, соответствующей части разбиения, содержащей запись y_i .

Вариант 2. Пусть $\beta_i \neq \gamma_s$ для любого $s \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$.

Тогда возможны следующие подварианты.

Вариант 2.1. Для любого $s \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$ вершина β_i не совпадает с вершиной β_s .

Отсюда следует, что все ребра, входящие в β_i , не принадлежат никаким совокупностям ребер, кроме, быть может, совокупности ребер, соответствующей части разбиения, содержащей запись y_i . Кроме того, отсюда следует, что либо запись y_i подпадает под случай 3.1 алгоритма построения соответствия, и тогда части разбиения, состоящей из одной записи y_i , сопоставляется одно единственное ребро (β_i, γ_i) , либо запись y_i подпадает под случай 3.2 алгоритма построения соответствия, где параметр t принимает значение 1, и тогда части разбиения, состоящей из одной записи y_i , сопоставляется два ребра: ребро (β_i, γ_i) и ребро, входящее в β_i и принадлежащее цепи C_i . Следовательно, согласно приведенному выше замечанию и свойству 6, и в этом варианте совокупность ребер, соответствующая части разбиения, содержащей запись y_i , не пересекается с образами никаких других частей разбиения.

Вариант 2.2. Существует $s \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$ такое, что $\beta_i = \beta_s$.

Пусть $V' = \{y_{j_1}, \dots, y_{j_l}\}$ — подмножество записей из V таких, что $\beta_{j_r} = \beta_i$, $r = 1, \dots, l$. Так как мы находимся в условиях варианта 2, то все ребра, входящие в β_i , не принадлежат никаким совокупностям ребер, кроме, быть может, совокупностям ребер, соответствующим частям разбиения, содержащим записи из V' .

Возможны следующие два подварианта.

Вариант 2.2.1. В множестве V' есть запись с весом большим, чем вес записи y_i .

Тогда запись y_i подпадает под случай 3.1 алгоритма построения соответствия, и части разбиения, состоящей из одной записи y_i , сопоставляется одно единственное ребро (β_i, γ_i) , которое, согласно свойству 6, принадлежит только совокупности ребер, соответствующей части разбиения, содержащей запись y_i .

Вариант 2.2.2. В множестве V' нет записей с весом большим, чем вес записи y_i .

Тогда запись y_i подпадает под случай 3.2 алгоритма построения соответствия. Пусть $V'' \subset V'$ — множество записей, вес которых совпадает с весом y_i . Согласно алгоритму построения соответствия множество V'' образует одну часть разбиения, которой сопоставляется совокупность ребер, входящих в β_i и исходящих из β_i и принадлежащих главным цепям записей из V'' . Согласно свойству 6 и сделанному в варианте 2.2 замечанию, эти ребра не принадлежат образам других частей разбиения.

Таким образом, мы перебрали все возможные случаи и показали, что совокупность ребер, соответствующая части разбиения, содержащей запись y_i , не пересекается с образами никаких других частей разбиения.

В силу произвольности выбора записи y_i , это доказывает, что образы различных частей разбиения взаимно не пересекаются. Тем самым, лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Обозначим через t_i число записей веса i в библиотеке V , $i = 1, \dots, n$. Возьмем произвольную ИСД U над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}^n, \emptyset \rangle$, разрешающую ЗИП I . (Такая ИСД обязательно существует, так как $\mathcal{F}$ полно для типа S_b .)

Согласно лемме 1, библиотеку V можно разбить на такие непересекающиеся части, что каждая часть содержит записи одного веса, и каждой части веса $i > 0$ и мощности t сопоставляется такая совокупность ребер сети U , что сумма сложностей ребер из этой совокупности не меньше, чем $t 2^{1-m}$, причем образы различных частей при этом соответствии не пересекаются. Отсюда следует, что

$$T(U) \geq \sum_{i=1}^n t_i 2^{1-i}.$$

Теперь предположим, что в библиотеке V есть запись $y_0 = (0, \dots, 0)$ нулевого веса. Обозначим через C_0 главную цепь, ведущую из корня в множество $L_U(y_0)$ (согласно теореме 1, такая цепь существует). Пусть α_0 — лист, в котором заканчивается цепь C_0 , а ребро (β_0, α_0) — последнее ребро цепи C_0 . Так как запись y_0 удовлетворяет всем запросам из B^n , все запросы проходят через ребро (β_0, α_0) , и, значит, сложность этого ребра равна 1. Остается заметить, что ребро (β_0, α_0) не принадлежит ни одной совокупности ребер, соответствующей части разбиения веса, большего нуля.

Таким образом,

$$T(U) \geq t_0 + \sum_{i=1}^n t_i 2^{1-i} = 2 \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \geq)) - t_0.$$

Отсюда в силу произвольности ИСД U вытекает утверждение теоремы.

Замечание. Если мы находимся в условиях теоремы 2, то нижняя оценка, получаемая из этой теоремы, практически в два раза лучше тривиальной нижней оценки.

Рис. 1. Универсальный многополюсник для множества K_1^n

5. Верхняя оценка

Доказательство теоремы 3. Обозначим через K_l^n множество всех монотонных элементарных конъюнкций, содержащих не более l переменных (или другими словами, имеющих длину не более l). Построим по индукции информационную сеть U_l^n , реализующую как функции фильтров каких-либо вершин все функции из K_l^n .

В качестве базиса индукции возьмем $l = 1$, $K_1^n = \{1, x_1, \dots, x_n\}$, тогда U_1^n будет иметь вид, изображенный на рисунке 1, где точкой изображен корень сети, а на концах ребер реализуются функции из K_1^n .

Проведем шаг индукции. Пусть U_{l-1}^n — сеть, реализующая все функции из K_{l-1}^n . Сеть U_l^n будем строить, добавляя к U_{l-1}^n вершины и ребра, чтобы реализовать функции из $K_l^n \setminus K_{l-1}^n$, следующим образом. Возьмем произвольную монотонную элементарную конъюнкцию $x_{i_1} \& \dots \& x_{i_l}$ длины l . В сети U_{l-1}^n найдем вершину, на которой реализуется функция $x_{i_1} \& \dots \& x_{i_{l-1}}$ и выпустим из нее ребро, которому припишем переменную x_{i_l} . На вершине, в которую ведет это ребро, будет реализовываться, как функция фильтра, функция $x_{i_1} \& \dots \& x_{i_l}$. Перебрав все функции из $K_l^n \setminus K_{l-1}^n$ и проделав для каждой эту операцию, получим требуемую сеть U_l^n , реализующую все функции из K_l^n .

Отметим, что на первом ярусе сети U_l^n находится $n + 1 = \binom{n}{1} + 1$ ребер, и сложность каждого из них равна 1 (первый ярус — это ребра, исходящие из корня), а на i -м ярусе, $i \geq 2$, находится $\binom{n}{i}$ ребер, и сложность каждого из них равна 2^{1-i} (i -й ярус — это ребра, исходящие из концов ребер $(i - 1)$ -го яруса). Таким образом сложность сети U_l^n равна

$$T(U_l^n) = 1 + \sum_{i=1}^l \binom{n}{i} 2^{1-i}.$$

Вернемся теперь к нашей задаче I .

Для любой записи $y \in V$ характеристическая функция этой записи есть некоторая монотонная элементарная конъюнкция, которую будем обозначать K_y .

Информационную сеть U , разрешающую задачу I , будем строить следующим образом. Возьмем сеть U_m^n , описанную выше. Возьмем произвольную запись $y \in V$. Возможны два случая.

1. Характеристическая функция этой записи K_y имеет длину, не превышающую m . Тогда в сети U_m^n находим вершину, на которой реализуется функция K_y , объявляем эту вершину листом и приписываем ей запись y .

2. Длина элементарной конъюнкции K_y больше, чем m . Пусть $K_y = x_{i_1} \& \dots \& x_{i_l}$, где $l > m$. Тогда найдем в сети U_m^n вершину, на которой реализуется функция

$x_{i_1} \& \dots \& x_{i_m}$, выпустим из этой вершины ребро, припишем этому ребру функцию $x_{i_{m+1}} \& \dots \& x_{i_l}$, объявим конец этого ребра листом и пришем ему запись y .

Проделав эту операцию для каждой записи $y \in V$, мы получим сеть U , которая, как нетрудно заметить, согласно теореме 1 из [6] разрешает задачу I .

Оценим сложность сети U . Сеть U содержит в себе как подсеть сеть U_m^n . В худшем случае, когда для каждой записи реализуется случай 2, мы к сети U_m^n добавим k ребер, каждое из которых исходит из некоторой вершины, на которой реализуется элементарная конъюнкция длины m . Следовательно, сложность каждого из этих k ребер будет равна 2^{-m} . Таким образом,

$$T(I, \mathcal{F}) \leq T(U) \leq T(U_m^n) + 2^{-m}k = 1 + \sum_{i=1}^m 2^{1-i} \binom{n}{i} + 2^{-m}k.$$

Тем самым, теорема 3 доказана.

6. Асимптотическая неуллучшаемость нижней оценки

Доказательство следствия 2. Пусть $m(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и $m = o(n)$. Пусть $k(n)$ таково, что

$$\binom{n}{m-1} = o(k), \quad k \leq \binom{n}{m}.$$

Рассмотрим библиотеку V , являющуюся k -элементным подмножеством m -го слоя куба B^n , т.е. $V \subseteq B_m^n$ и $|V| = k$. Рассмотрим связанную с этой библиотекой ЗИП

$$I = \langle B^n, V, \supseteq \rangle.$$

Согласно теореме 2,

$$T(I, \mathcal{F}) \geq 2 \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \supseteq)) = 2^{1-m}k.$$

Согласно теореме 3,

$$T(I, \mathcal{F}) \leq 1 + \sum_{i=1}^{m-1} 2^{1-i} \binom{n}{i} + 2^{1-m}k = 2^{1-m}k(1 + o(1)).$$

Осталось заметить, что последние два неравенства доказывают утверждение следствия 2.

Список литературы

1. Гасанов Э. Э. Оптимальные информационные сети для отношений поиска, являющихся отношениями линейного квазипорядка. В кн.: *Конструкции в алгебре и логике*. Изд-во Тверского гос. ун-та, Тверь, 1990, с.11–17.
2. Гасанов Э. Э. Мгновенно решаемые задачи поиска. *Дискретная математика* (1996) 8, №3, 119–134.
3. Ли Д., Препарата Ф. Вычислительная геометрия. Обзор. *Киберн. сб.* (1987) 24, 5–96.
4. Селтон Г. *Автоматическая обработка, хранение и поиск информации*. Сов. радио, Москва, 1973.
5. Гасанов Э. Э. Об одной математической модели информационного поиска. *Дискретная математика* (1991) 3, №2, 69–76.
6. Гасанов Э. Э. Об одномерной задаче интервального поиска. *Дискретная математика* (1995) 7, №2, 40–60.
7. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. *Задачи и упражнения по курсу дискретной математики*. Наука, Москва, 1992.
8. Kruskal F. B. The number of simplices in a complex. *Math. Optimization Techniques* (1963) 251–278.
9. Katona G. A. A Theorem on finite sets. In: *Proc. Colloq. on Theory of Graphs Tihany*, 1966, 187–207.

Статья поступила 27.01.96.