Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Харин, Об одной алгебре изображений, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 4, 149–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm551>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:59:40

Об одной алгебре изображений

© 1996 г. К. В. Харин

Рассматривается алгебра формализованных плоских изображений с полной системой бинарных булевых операций ($\&$, $\vee$, $\neg$), выполняемых поточечно. Найдены минимальное и максимальное значение мощности базиса. Получено описание канонических систем образующих для подалгебр, в терминах которых сформулирован критерий максимальности (предполноты) подалгебры.

1. Введение

Исследования различных формальных моделей изображений и процессов их обработки проводились многими авторами. Одно из направлений таких исследований заключалось в построении частных моделей исследуемых объектов для каждой новой практической задачи (см. [1]). Другое направление заключалось в более глубоком теоретическом исследовании чисто математических моделей этих объектов. Рассматривались теоретико-множественные, топологические, алгебраические и другие структуры на множествах изображений (различные примеры можно найти в [2]).

В настоящей работе изображения, точнее их растровые представления, рассматриваются как элементы алгебраической системы [3] с логическими операциями типа пересечения, объединения и дополнения. Такая модель позволяет формально исследовать возможность получения требуемого изображения из заданных при помощи таких операций, а также нахождения базисного набора изображений для заданного класса. Эти вопросы представляют собой частный случай проблем полноты и выразимости [4] для данной алгебры.

Под изображением везде далее мы будем понимать его растровое представление, а именно, представление в виде функции $f: E_k^2 \rightarrow E_2$, где $E_k = \{0, \dots, k-1\}$, k — размер раstra. В данном случае имеется только два значения яркости элемента изображения (пиксела).

Обозначим через $P_{E_k^2, E_2}$ все множество функций такого вида при фиксированном k . На этом множестве мы будем рассматривать булевы операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, определяемые следующим образом: для любых $f, g \in P_{E_k^2, E_2}$ и $x, y \in E_k$

$$\begin{aligned}(f \& g)(x, y) &= f(x, y) \& g(x, y), \\(f \vee g)(x, y) &= f(x, y) \vee g(x, y), \\(\neg f)(x, y) &= \neg(f(x, y)),\end{aligned}\tag{1}$$

где операции над элементами множества E_2 понимаются в традиционном смысле.

Эти выполняемые поточечно операции допускают естественную интерпретацию как аналог теоретико-множественных операций пересечения, объединения и дополнения над множествами тех пар (x, y) , значения соответствующих функций в которых равны единице.

Допускается операция суперпозиции относительно операций (1). При этом запрещена та или иная подстановка значения функции, элемента множества P_{E_k, E_2}^2 , в качестве аргумента другой функции из этого множества (то есть суперпозиция относительно элементов P_{E_k, E_2}^2). Отсутствуют операции переименования и отождествления переменных. Эти ограничения возникли из прикладной задачи и вытекают из упомянутой естественной интерпретации.

В [5] и ряде других работ исследовались системы вида $\langle P_{E_k, E_2}^*, \tilde{\Omega} \rangle$, где Ω – произвольный класс Поста, без упомянутых выше ограничений на операции. Полученные для этих систем результаты существенно отличаются от приведенных ниже в настоящей статье. В частности, в этом случае множество функций P_{E_k, E_2}^2 (и даже P_{E_k, E_2}^*) может быть получено замыканием P_{E_k, E_2} , то есть множества одноместных функций.

Итак, далее мы будем рассматривать алгебру $\langle P_{E_k, E_2}^2, \Omega \rangle$, где $\Omega = \{\&, \vee, \neg\}$.

2. Построение базиса алгебры изображений

Определение 1. Базисом P_{E_k, E_2}^2 относительно набора операций Ω называется множество $B \subset P_{E_k, E_2}^2$ такое, что $[B]_\Omega = P_{E_k, E_2}^2$, но $[B']_\Omega \neq P_{E_k, E_2}^2$ для любого $B' \subset B$ и $B' \neq B$.

Будем говорить, что функция $f \in P_{E_k, E_2}^2$ реализуется совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) [6] в алфавите $U = \{u_1, \dots, u_p\} \subseteq P_{E_k, E_2}^2$, если

$$f = \bigvee_{i \in I} (u_1^{\sigma_i^1} \& \dots \& u_p^{\sigma_i^p}),$$

где $\sigma_j^i \in \{0, 1\}$, $u_j^{\sigma_j^i} = u_j$, если $\sigma_j^i = 1$, $u_j^{\sigma_j^i} = \neg u_j$, если $\sigma_j^i = 0$, I — некоторое множество индексов и $u_1^{\sigma_1^i} \& \dots \& u_p^{\sigma_p^i} \neq u_1^{\sigma_1^j} \& \dots \& u_p^{\sigma_p^j}$ для $i \neq j$ (равенство понимается в синтаксическом смысле, то есть в смысле побуквенного совпадения выражений). При этом, вообще говоря, различные (в синтаксическом смысле) СДНФ могут реализовать одну и ту же функцию от этих переменных. В алфавите из p элементов можно построить 2^{2^p} различных СДНФ. В это число входит также и пустая СДНФ, которая не содержит ни одного символа переменной или операции. Эта СДНФ соответствует тождественно нулевой функции, которая может быть представлена в виде $u \& (\neg u)$ для любого $u \in U$. Хотя эта формула не является СДНФ, но далее мы все равно будем без дополнительных оговорок считать, что число СДНФ в алфавите из p элементов равно 2^{2^p} .

Предложение 1. В алгебре $\langle P_{E_k, E_2}^2, \Omega \rangle$ для любого множества $B \subseteq P_{E_k, E_2}^2$ его замыкание $[B]_\Omega$ совпадает с множеством функций, реализуемых СДНФ в алфавите B .

Предложение 2. Пусть $B \subseteq P_{E_k^2, E_2}$. Если для любой функции $f \in B$ справедливо равенство $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ для $x_1, y_1, x_2, y_2 \in E_k$, то это верно и для любой функции из $[B]_\Omega$.

Эти два предложения очевидны в силу определения операций $\&$, $\vee$, $\neg$ и суперпозиции.

Заметим, что в силу конечности множества $P_{E_k^2, E_2}$ алгебра $\langle P_{E_k^2, E_2}, \Omega \rangle$ всегда имеет базис.

Пример 1. Рассмотрим множество $B_0 = \{f_{ij} \mid i, j \in E_k\}$, где $f_{ij}(x, y) = 1$, если $x = i, y = j$, и $f_{ij}(x, y) = 0$ в противном случае. Это множество является полным (его замыкание совпадает с $P_{E_k^2, E_2}$), поскольку для любой функции $f \in P_{E_k^2, E_2}$

$$f = \bigvee_{(i,j): f(i,j)=1} f_{ij}.$$

Однако, базисом $P_{E_k^2, E_2}$ оно не является, поскольку для любого $f_{ij} \in B_0$

$$f_{ij} = \neg \left(\bigvee_{(i',j') \neq (i,j)} f_{i'j'} \right).$$

В качестве базиса можно взять множество $B_0^{(i,j)} = B_0 \setminus \{f_{ij}\}$. Любое собственное подмножество $B_1 \subset B_0^{(i,j)}$ не содержит хотя бы одну из функций $f_{i_1j_1}$, $(i_1, j_1) \neq (i, j)$, то есть все функции из B_1 принимают одинаковые значения на наборах переменных (i, j) и (i_1, j_1) , а в силу предложения 2, таким свойством обладают и все функции из $[B_1]_\Omega$, следовательно, B_1 не полно. При этом заметим, что $|B_0^{(i,j)}| = k^2 - 1$.

Построим теперь базис алгебры $\langle P_{E_k^2, E_2}, \Omega \rangle$, состоящий из минимального числа элементов. Для этого введем несколько обозначений.

Положим $m = \lfloor \log_2(k^2) \rfloor$. Число m равно количеству двоичных разрядов, необходимых для записи любого числа от 0 до $k^2 - 1$. Везде далее m будет обозначать именно это число.

Для любых $x, y \in E_k$ через $\tilde{\alpha}_{x,y} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ обозначим двоичный набор, представляющий собой запись числа $kx + y$ в двоичной системе. Несложно видеть, что число $kx + y$ есть номер пары значений x, y из E_k при нумерации в возрастающем порядке, начиная с нуля, последовательности

$$(0, 0), (0, 1), \dots, (0, k-1), (1, 0), \dots, (1, k-1), \dots, (k-1, 0), \dots, (k-1, k-1).$$

Для произвольного $f \in P_{E_k^2, E_2}$ определим булеву функцию F от m переменных следующим образом: F принимает значение 1 только на наборах $\tilde{\alpha}_{x,y}$ таких, что $f(x, y) = 1$. Обратно, для произвольной булевой функции F от m переменных, $F \in P_{E_2^m, E_2}$, определим функцию $f \in P_{E_k^2, E_2}$ следующим образом: $f(x, y) = F(\tilde{\alpha}_{x,y})$ для $x, y \in E_k$.

Таким образом, мы построили инъективное отображение $\pi : P_{E_k^2, E_2} \rightarrow P_{E_2^m, E_2}$ и сюръективное отображение $\pi^* : P_{E_2^m, E_2} \rightarrow P_{E_k^2, E_2}$, удовлетворяющие следующим очевидным из определения свойствам:

- (1) $\pi^* \circ \pi$ — тождественное отображение на $P_{E_k^2, E_2}$.
- (2) Значения $F \in P_{E_2^m, E_2}$ и $(\pi \circ \pi^*)(F)$ совпадают на всех наборах значений переменных, являющихся двоичными представлениями чисел от 0 до $k^2 - 1$ (на остальных наборах $\pi(\pi^*(F))$ равна 0).
- (3) $\pi(f \& g) = \pi(f) \& \pi(g)$, $\pi(f \vee g) = \pi(f) \vee \pi(g)$ для любых $f, g \in P_{E_k^2, E_2}$.
- (4) $\pi^*(F \& G) = \pi^*(F) \& \pi^*(G)$, $\pi^*(F \vee G) = \pi^*(F) \vee \pi^*(G)$ для любых $F, G \in P_{E_2^m, E_2}$, где операции $\&$ и $\vee$ на множестве $P_{E_2^m, E_2}$ определяются традиционным образом.
- (5) $\pi^*(\neg F) = \neg \pi^*(F)$ для любых $F \in P_{E_2^m, E_2}$.
- (6) $\pi(\neg f)(z_1, \dots, z_m) = \neg \pi(f)(z_1, \dots, z_m)$ для любых $f \in P_{E_k^2, E_2}$ и для наборов $(z_1, \dots, z_m)$, являющихся двоичными представлениями чисел от 0 до $k^2 - 1$.

Для любой функции $f \in P_{E_k^2, E_2}$ функция $\pi(f)$ может быть представлена в виде СДНФ в алфавите переменных $\{z_1, \dots, z_m\}$, а именно,

$$\pi(f)(z_1, \dots, z_m) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_m): \\ \pi(f)(\sigma_1, \dots, \sigma_m)=1}} z_1^{\sigma_1} \& \dots \& z_m^{\sigma_m}.$$

Поэтому, используя свойства отображений π и π^* мы можем записать равенства

$$f(x, y) = (\pi^*(\pi(f)))(x, y) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_m): \\ \pi(f)(\sigma_1, \dots, \sigma_m)=1}} (\pi^*(z_1))^{\sigma_1}(x, y) \& \dots \& (\pi^*(z_m))^{\sigma_m}(x, y),$$

где $z_i = z_i(z_1, \dots, z_m) \in P_{E_2^m, E_2}$, $\pi^*(z_i) \in P_{E_k^2, E_2}$. Таким образом, в качестве базиса в $\langle P_{E_k^2, E_2}, \Omega \rangle$ можно выбрать t функций $\pi^*(z_1), \dots, \pi^*(z_m)$.

Теорема 1. Если множество $B \subset P_{E_k^2, E_2}$ является базисом $\langle P_{E_k^2, E_2}, \Omega \rangle$, то $|B| \geq t$.

Доказательство. В силу предложения 1 замыкание множества B совпадает с множеством функций, реализуемых СДНФ в алфавите B . Если $k = 2^q$ для некоторого натурального q , то $k^2 = 2^m$ и число различных СДНФ в алфавите из t элементов равно $2^{2^m} = 2^{k^2} = |P_{E_k^2, E_2}|$. В силу свойств отображений π и π^* , в этом случае существует взаимно однозначное соответствие π^* между $P_{E_2^m, E_2}$ и $P_{E_k^2, E_2}$ ($\pi^* = \pi^{-1}$, $\pi = (\pi^*)^{-1}$). Если же $|B| = m' < t$, то число различных СДНФ в алфавите B равно $2^{2^{m'}} < 2^{k^2} = |P_{E_k^2, E_2}|$. Таким образом, замыкание B не может совпадать со всем $P_{E_k^2, E_2}$. В случае $k \neq 2^q$ справедливо неравенство $2^{2^m} > |P_{E_k^2, E_2}|$. Однако в силу выбора t и в этом случае при $m' < t$ получаем, что $2^{m'} \leq 2^{m-1} < k^2 < 2^m$, а поэтому $2^{2^{m'}} < |P_{E_k^2, E_2}|$. Следовательно, число функций в базисе не может быть меньше t . Теорема доказана.

Теорема 2. Если множество B является базисом $\langle P_{E_k^2, E_2}, \Omega \rangle$, то $|B| \leq k^2 - 1$.

Доказательство. Предположим, что существует базис $\tilde{B}$ алгебры $\langle P_{E_k^2, E_2}, \Omega \rangle$, состоящий более, чем из $k^2 - 1$ элементов: $\tilde{B} = \{f_1, \dots, f_l\}$, $l \geq k^2$. Введем обозначения

$$\delta(\tilde{B}) = \left| \left\{ (f_i, f_j) \mid f_i, f_j \in \tilde{B}, f_i \neq f_j, f_i \& f_j \neq 0 \right\} \right|, \quad \rho(\tilde{B}) = |\tilde{B}| - \delta(\tilde{B}).$$

Здесь $\delta(\tilde{B})$ обозначает число пар элементов множества $\tilde{B}$, конъюнкция которых не равна нулю. Рассмотрим два случая.

1. $\delta(\tilde{B}) = 0$. В этом случае очевидно, что $|\tilde{B}| = k^2$ и $\tilde{B}$ совпадает с множеством B_0 , описанным в примере 1. Там же было показано, что такое множество базисом не является, что противоречит сделанному предположению.
2. $\delta(\tilde{B}) \neq 0$. Это означает, что существуют $f_i, f_j \in \tilde{B}$, такие что $f_i \& f_j \neq 0$, $i \neq j$. Рассмотрим множество

$$\tilde{B}^{(1)} = (\tilde{B} \setminus \{f_i, f_j\}) \cup \{f_i \& f_j, f_i \& \neg f_j, \neg f_i \& f_j\} \setminus \{0\}.$$

Несложно убедиться, что $|\tilde{B}^{(1)}| \geq |\tilde{B}|$ и $\delta(\tilde{B}^{(1)}) \leq \delta(\tilde{B})$. Более точно, если $|\tilde{B}^{(1)}| = |\tilde{B}|$, то $\delta(\tilde{B}^{(1)}) < \delta(\tilde{B})$. Следовательно, $\rho(\tilde{B}^{(1)}) > \rho(\tilde{B})$. Кроме того, $\tilde{B}^{(1)}$ является базисом $\langle P_{E_k^2, E_2}, \Omega \rangle$ тогда и только тогда, когда базисом было $\tilde{B}$.

Для множества $\tilde{B}^{(1)}$ возможны те же два случая 1 и 2, как и для множества $\tilde{B}$, поэтому мы либо придем к противоречию с заключением о том, что $\tilde{B}^{(1)}$ является базисом, либо построим множество $\tilde{B}^{(2)}$, которое является базисом тогда и только тогда, когда таковым является $\tilde{B}^{(1)}$ и такое, что $\rho(\tilde{B}^{(2)}) > \rho(\tilde{B}^{(1)})$. Продолжая аналогичные построения, построим последовательно множества $\tilde{B}^{(3)}$, $\tilde{B}^{(4)}$, и т. д. Для любого множества $B \subset P_{E_k^2, E_2}$ значение $\rho(B)$ ограничено величиной $|P_{E_k^2, E_2}|$, следовательно, на некотором шаге h мы обязательно получим множество $\tilde{B}^{(h)}$, для которого $\delta(\tilde{B}^{(h)}) = 0$ и при этом $|\tilde{B}^{(h)}| \geq \dots \geq |\tilde{B}^{(1)}| \geq |\tilde{B}| \geq k^2$. Повторяя рассуждения, приведенные выше, получим, что $\tilde{B}^{(h)}$ не может быть базисом $\langle P_{E_k^2, E_2}, \Omega \rangle$, следовательно, базисом не может быть и $\tilde{B}$. Теорема доказана.

Приведенные рассуждения показывают, что рассмотренные в примере 1 базисы $B_0^{(i,j)}$ при $i, j \in E_k$ состоят из максимально возможного числа элементов.

3. Системы образующих подалгебр $\langle P_{E_k^2, E_2}, \Omega \rangle$

Далее мы будем рассматривать свойства подалгебр алгебры $\langle P_{E_k^2, E_2}, \Omega \rangle$, т.е. подмножеств $M \subset P_{E_k^2, E_2}$ таких, что $[M]_\Omega = M$. Системой образующих подалгебры M называется подмножество $C \subset M$ такое, что $[C]_\Omega = M$.

Будем называть весом функции $f \in P_{E_k^2, E_2}$

$$w(f) = |\{(x, y) : f(x, y) = 1\}|.$$

Заметим, что это понятие соответствует площади изображения, определяющего функцию f . Функция веса на множестве $P_{E_k^2, E_2}$ удовлетворяет следующим свойствам:

- (1) $0 \leq w(f) \leq n^2$;
- (2) $w(f) = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$, $w(f) = n^2$ тогда и только тогда, когда $f = 1$;
- (3) $w(f_1 \& f_2) \leq \min\{w(f_1), w(f_2)\}$, $\max\{w(f_1), w(f_2)\} \leq w(f_1 \vee f_2) \leq w(f_1) + w(f_2)$;
- (4) $w(\neg f) = n^2 - w(f)$.

Пусть M - произвольная подалгебра в алгебре $\langle P_{E_k^2, E_2}, \Omega \rangle$.

Определение 2. Назовем элемент $g \in M$ нижним элементом подалгебры M , если $g \neq 0$ и для любого $f \in M$ либо $g \& f = 0$, либо $g \& f = g$.

Через $D_M = \{g_1, \dots, g_t\}$ обозначим множество всех нижних элементов подалгебры M .

Предложение 3. Элементы множества D_M удовлетворяют следующим свойствам:

- (1) $g_i \& g_j = 0$ для $g_i, g_j \in D_M$, $i \neq j$;

- (2) $\bigvee_{i=1}^t g_i \equiv 1$.

Доказательство. 1. Предположим, что существуют g_i и g_j из D_M , такие что $g_i \& g_j \neq 0$. По определению нижнего элемента $0 \neq g_i = g_i \& g_j = g_j$, т.е. g_i и g_j совпадают.

2. Пусть теперь $\bigvee_{i=1}^t g_i \neq 1$. Рассмотрим функцию

$$h = \neg \left(\bigvee_{i=1}^t g_i \right) \neq 0.$$

Ясно, что $h \in M$, поскольку $g_i \in M$. При этом $h \& g_i = 0$ для любого $i = 1, \dots, t$. Построим множество $M_1 = h \& M = \{h \& f \mid f \in M\}$. Если $M_1 = \{0, h\}$, то по определению нижнего элемента h является нижним в подалгебре M , причем $h \neq g_i$ для всех $i = 1, \dots, t$, что противоречит выбору множества D_M . Если же $M_1 \neq \{0, h\}$, то существует элемент $h_1 \in M_1 \subseteq M$ такой, что $h_1 \neq 0$, $w(h_1) < w(h)$ и $h_1 \& g_i = 0$ для любого $i = 1, \dots, t$ (таким свойством обладают все элементы множества M_1 кроме 0 и h). В этом случае по аналогии построим множество $M_2 = (h_1 \& M)$ и либо получим, что h_1 является нижним элементом в подалгебре M , не принадлежащим D_M , либо найдем $h_2 \in M_2 \subseteq M$ такой, что $h_2 \neq 0$, $w(h_2) < w(h_1)$ и $h_2 \& g_i = 0$ для любого $i = 1, \dots, t$. В силу убывания веса элементов последовательности $h, h_1, h_2, \dots$ через конечное число шагов мы обязательно получим элемент h_s , являющийся нижним в подалгебре M , но не принадлежащим D_M . Полученное противоречие и завершает доказательство предложения.

Замечание 1. Множество D_M для подалгебры M представляет собой аналог полных ортогональных систем в гильбертовых пространствах, рассматриваемых в функциональном анализе. Полностью следуя этой аналогии, каждая функция f из M может быть представлена в виде «ряда Фурье» следующим образом:

$$f = \bigvee_{i=1}^t \sigma_i \& g_i,$$

где $g_i \in D_M$, $\sigma_i = 1$, если $f \& g_i = g_i$, $\sigma_i = 0$, если $f \& g_i = 0$. Таким образом, множество D_M является системой образующих подалгебры M . Эту систему мы будем называть канонической.

Несложно видеть, что существует взаимно однозначное соответствие между подалгебрами алгебры $\langle P_{E_k^2, E_2}, \Omega \rangle$ и подмножествами $D \subset P_{E_k^2, E_2}$, элементы которых удовлетворяют свойствам, указанным в предложении 3. Если при этом $|D| = t$, то мощность подалгебры, для которой D является канонической системой образующих, равна 2^t . Поэтому мощность подалгебры $\langle P_{E_k^2, E_2}, \Omega \rangle$ может иметь любое значение вида 2^s , где $s = 1, \dots, k^2$. Отсюда, кстати, следует, что $M = P_{E_k^2, E_2}$ тогда и только тогда, когда $D_M = \{g_1, \dots, g_{k^2}\}$, что в силу предложения 3 эквивалентно равенствам $w(g_i) = 1$ для всех $i = 1, \dots, k^2$, то есть $D_M = B_0$, где B_0 — система образующих $\langle P_{E_k^2, E_2}, \Omega \rangle$, рассмотренная в примере 1.

4. Условия полноты в $\langle P_{E_k^2, E_2}, \Omega \rangle$

При исследовании вопросов полноты какой-либо функциональной или алгебраической системы важнейшая роль отводится описанию максимальных (предполных) подалгебр (см. [3, 4, 7]). Подалгебра M в алгебре $\langle P_{E_k^2, E_2}, \Omega \rangle$ называется максимальной, если $M \neq P_{E_k^2, E_2}$, но для любой функции $f \in P_{E_k^2, E_2} \setminus M$ замыкание $[M \cup f]_\Omega = P_{E_k^2, E_2}$.

Теорема 3. Подалгебра M в $\langle P_{E_k^2, E_2}, \Omega \rangle$ является максимальной тогда и только тогда, когда $|D_M| = k^2 - 1$.

Доказательство. Пусть M — подалгебра такая, что $|D_M| = k^2 - 1$. В силу предложения 3 это означает, что существует $g \in D_M$ такой, что $w(g) = 2$, а $w(g_i) = 1$ для любого $g_i \in D_M, g_i \neq g$. Пусть $g(x_1, y_1) = g(x_2, y_2) = 1$. В силу предложения 2 $f \notin M$ тогда и только тогда, когда $f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2)$. Возьмем произвольную функцию $f \notin M$. Положим $h_1 = f \& g$, $h_2 = (\neg f) \& g$. Ясно, что $w(h_j) = 1$, $h_j \notin D_M$, $h_j \in [M \cup f]_\Omega$ для $j = 1, 2$. Таким образом, для подалгебры $[M \cup f]_\Omega$ мы имеем каноническую систему образующих $\{h_1, h_2\} \cup (D_M \setminus \{g\})$, состоящую из k^2 элементов, т.е. $[M \cup f]_\Omega = P_{E_k^2, E_2}$, следовательно, M — максимальная подалгебра.

Рассмотрим теперь подалгебру M_1 , не удовлетворяющую указанным условиям. Возможны два случая:

- (1) существует $g_1 \in D_{M_1}$ такой, что $w(g_1) > 2$;
- (2) существуют $g_1, g_2 \in D_{M_1}$ такие, что $w(g_1) > 1, w(g_2) > 1$.

Пусть в первом случае $g_1(x_1, y_1) = g_1(x_2, y_2) = g_1(x_3, y_3) = 1$. Рассмотрим функцию $h(x, y) \notin M$, определяемую равенствами

$$h(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) = (x_1, y_1), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку все функции из M_1 и функция h принимают одинаковые значения на наборах (x_2, y_2) и (x_3, y_3) , то в силу предложения 2 $[M_1 \cup h]_\Omega \neq P_{E_k^2, E_2}$.

Во втором случае предположим, что $g_1(x_1, y_1) = g_1(x_2, y_2) = 1$ и $g_2(x_3, y_3) = g_2(x_4, y_4) = 1$. Ясно, что $h \notin M_1$ и все функции из $[M_1 \cup h]_\Omega$ принимают одинаковые значения на (x_3, y_3) и (x_4, y_4) . Это и доказывает, что M_1 не может быть максимальной подалгеброй. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что количество максимальных подалгебр N_m в алгебре $\langle P_{E_k^2, E_2}, \Omega \rangle$ равно $\binom{k^2}{2}$. Можно показать, что максимальные подалгебры составляют малую часть от общего числа N подалгебр алгебры $\langle P_{E_k^2, E_2}, \Omega \rangle$, а именно, обозначив через n_i число подалгебр, имеющих ровно один нижний элемент веса i , а все остальные веса 1 (для $i = 2, \dots, k^2$), имеем

$$N \geq 1 + \sum_{i=2}^{k^2} n_i = 1 + \sum_{i=2}^{k^2} \binom{k^2}{i} = 2^{k^2} - k^2,$$

откуда следует, что

$$N_m = o(N), \quad k \rightarrow \infty.$$

В заключение автор выражает свою признательность В. Б. Кудрявцеву и А. С. Строгалову за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

1. Чэн Ш.-К. *Принципы проектирования систем визуальной информации*. Мир, Москва, 1994.
2. Гренандер У. *Лекции по теории образов*, том 3. Мир, Москва, 1983.
3. Кон П. *Универсальная алгебра*. Мир, Москва, 1968.
4. Кудрявцев В. Б. *Функциональные системы*. изд-во МГУ, Москва, 1982.
5. Доу Ж. Вопросы полноты для конечно порожденных ф. с. $\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$ и $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega} \rangle$. *Дискретная математика* (1990) 2, №3, 128–136.
6. Яблонский С. В. *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1986.
7. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. *Функции алгебры логики и классы Поста*. Наука, Москва, 1966.

Статья поступила 23.10.96.