Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. М. Ушчумлич, А. С. Подколзин, О синтезе минимальных источников, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 4, 37–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm556>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:30:08

О синтезе минимальных источников

© 1996 г. Ш. М. Ушчумлич, А. С. Подколзин

Рассматривается задача синтеза источника, представляющего данное регулярное выражение. Известно, что алгоритмы, основанные на методах В. М. Глушкова, не всегда приводят к получению источников, минимальных по числу вершин. В работе предложен общий подход к построению алгоритмов синтеза минимальных источников по регулярным выражениям различных классов.

В теории конечных автоматов рассматривается задача синтеза источника G , определяющего то же событие, что и заданное регулярное выражение R . В работе [1] был исследован ряд алгоритмов решения этой задачи, основанных на методах В. М. Глушкова. При этом оказалось, что указанные алгоритмы не всегда приводят к получению источников, минимальных по числу вершин, и построение минимальных источников требует дополнительной их минимизации. В связи с тем, что число вершин источника, получаемого на первом этапе, может значительно превосходить число вершин минимального источника, представляет интерес разработка таких алгоритмов синтеза (быть может применимых к специальным классам регулярных выражений), которые строили бы минимальные источники непосредственно по регулярному выражению, без этапа минимизации. В настоящей заметке описывается некоторый общий подход к построению алгоритмов синтеза минимальных источников по регулярным выражениям различных классов. Этот подход применяется к ряду конкретных классов регулярных выражений, для которых указываются соответствующие алгоритмы синтеза.

Используемые далее обозначения и термины взяты из работы [2].

Пусть R — регулярное выражение над алфавитом $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Назовем a_i -остатком регулярного выражения R такое регулярное выражение R' , что $|a_i R'|$ есть множество всех слов события R , начинающихся с буквы a_i (если таких слов нет, то a_i -остаток не определен). Заметим, что a_i -остаток регулярного выражения R определяется, вообще говоря, неоднозначно.

Пусть K — некоторый класс регулярных выражений над алфавитом A , для которого существует алгоритм $\mathfrak{A}_1$ получения принадлежащих классу K a_i -остатков регулярных выражений из K и алгоритм $\mathfrak{A}_2$ проверки равенства событий, определяемых выражениями из K . Тогда определим следующий алгоритм $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ построения минимальных источников, соответствующих регулярным выражениям из K .

- (1) Пусть $R \in K$. Определяем граф G_1 , состоящий из единственной вершины v_0 , которой сопоставлено регулярное выражение R . Полагаем $m = 1$ и переходим к шагу 2.

- (2) Пусть уже определен граф G_m , причем v — вершина этого графа, которой сопоставлено регулярное выражение R' , не отмеченное ранее символом *. Находим при помощи алгоритма $\mathfrak{A}_1$ все такие индексы $i_1, \dots, i_s$, для которых определен a_{ij} -остаток регулярного выражения R' , $i_1, \dots, i_s \in \{1, 2, \dots, r\}$. Далее переходим к шагу 3.
- (3) Для каждого $j = 1, 2, \dots, s$ проверяем, совпадает ли событие $|R'_j|$ с одним из событий, определяемых регулярными выражениями, сопоставленными вершинам графа G_m . Если это событие совпадает с событием $|R''|$, где R'' сопоставлено вершине v' графа G_m , то полагаем $v_j = v'$. В противном случае присоединяем к графу G_m новую вершину v_j , которой сопоставляем выражение R'_j . От вершины v к вершине v_j проводим ребро с отметкой a_{i_j} . По окончании указанных преобразований графа G_m получаем граф, который обозначаем G_{m+1} . Далее переходим к шагу 4.
- (4) Вершину v отмечаем *. Если все вершины графа G_{m+1} отмечены звездочкой, то переходим к шагу 5, в противном случае полагаем $m := m + 1$ и переходим к шагу 2.
- (5) Для каждой вершины v графа G_{m+1} проверяем, содержит ли событие, определяемое сопоставленным этой вершине регулярным выражением R , пустое слово e . Такая проверка, как можно видеть, осуществляется непосредственно по построению регулярного выражения R . Те из вершин v , для которых $R \in |R|$, отмечаем символом **. Далее переходим к шагу 6.
- (6) Источник G , соответствующий регулярному выражению R , получается удалением всех отметок вершин у графа G_{m+1} , выбором вершины v_0 в качестве начальной, а отмеченных ** вершин в качестве финальных вершин.

Построенный указанным способом источник G обозначаем $\mathfrak{A}(R)$, а граф G_{m+1} , из которого он получен на шаге 6, обозначаем $\hat{\mathfrak{A}}(R)$.

Теорема. $\mathfrak{A}(R)$ есть минимальный по числу вершин источник, определяющий то же событие, что и регулярное выражение R .

Доказательство. Покажем сначала, что $|\mathfrak{A}(R)| = |R|$. Пусть $\alpha \in |\mathfrak{A}(R)|$. Тогда существует соответствующий слову α путь в графе $\hat{\mathfrak{A}}(R)$ от вершины v_0 к некоторой вершине v , отмеченной символом **. Пусть R' — регулярное выражение, сопоставленное вершине v . По построению графа $\hat{\mathfrak{A}}(R)$, $e \in |R'|$, причем $\alpha|R'|$ есть множество всех слов регулярного события $|R|$, имеющих начало α . Отсюда и вытекает включение $\alpha \in |R|$. По построению графа $\hat{\mathfrak{A}}(R)$, для произвольного слова α в алфавите A , являющегося началом некоторого слова события $|R|$, существует соответствующий этому слову путь в графе $\hat{\mathfrak{A}}(R)$ от вершины v_0 к некоторой вершине v . В частности, такой путь существует для произвольного слова $\alpha \in |R|$. Если R' — регулярное выражение, сопоставленное вершине v , то $\alpha|R'|$ есть множество всех слов события $|R|$ с началом α , откуда $e \in |R'|$ и вершина v отмечена символом **, т.е. $\alpha \in |\mathfrak{A}(R)|$. Таким образом, $|\mathfrak{A}(R)| = |R|$.

Введем на множестве $|R|$ отношение эквивалентности $\sim$, полагая $\alpha_1 \sim \alpha_2$ тогда и только тогда, когда множество слов события $|R|$ с началами α_1 и α_2 соответственно представимы в виде $\alpha_1 \mathfrak{M}$, $\alpha_2 \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — некоторое событие. Как

легко заметить, число вершин источника $\mathfrak{A}(R)$ равно числу классов введенного отношения эквивалентности. Пусть G — произвольный источник такой, что $|G| = |R|$, причем w_0 — начальная вершина источника G . Если соответствующий слову α путь в источнике G ведет от вершины w_0 к вершине w , причем $\mathfrak{M}$ — множество всех слов, определяющих пути от w к финальным вершинам источника G , то $\alpha\mathfrak{M}$ есть множество всех слов события $|R|$ с началом α . Поэтому пути из вершины w_0 , определяемые неэквивалентными словами, ведут к различным вершинам источника G , так что число вершин источника G не менее числа классов эквивалентности отношения $\sim$, и источник $\mathfrak{A}(R)$ минимален. Теорема доказана.

Описанный подход к построению алгоритмов синтеза источников проиллюстрируем на конкретных классах регулярных выражений.

Пусть K_1 — класс всех регулярных выражений R над алфавитом A , имеющих вид

$$(P_1 \vee \dots \vee P_n) \langle Q_1 \vee \dots \vee Q_m \rangle,$$

где $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_m$ — слова, $n > 0$, причем слова $Q_1, \dots, Q_m$ одинаковы для всех выражений класса K_1 . Пусть $a_i P'_1, \dots, a_i P'_k$ — все слова множества $\{P_1, \dots, P_n\}$, начинающиеся с буквы a_i ; $a_i Q'_1, \dots, a_i Q'_s$ — все слова $\{Q_1, \dots, Q_m\}$, начинающиеся с буквы a_i . Если все слова $P_1, \dots, P_n$ непусты, то a_i -остаток регулярного выражения R определен в случае $k > 0$. В качестве такого остатка можно взять, например, выражение $(P'_1 \vee \dots \vee P'_k) \langle Q_1 \vee \dots \vee Q_m \rangle$. Если же одно из слов $P_1, \dots, P_n$ есть R , то a_i -остаток регулярного выражения R определен в случае $k + s > 0$. В качестве такого остатка берем, например, выражение $(P'_1 \vee \dots \vee P'_k \vee Q'_1 \vee \dots \vee Q'_s) \langle Q_1 \vee \dots \vee Q_m \rangle$. Для проверки равенства событий, определяемых регулярными выражениями из K_1 , используем следующее утверждение.

Предложение 1. Если

$$R_1 = (P_1 \vee \dots \vee P_n) \langle Q_1 \vee \dots \vee Q_m \rangle, \quad R_2 = (L_1 \vee \dots \vee L_k) \langle Q_1 \vee \dots \vee Q_m \rangle, \\ \{S_1, \dots, S_p\} = \{P_1, \dots, P_n\} \cap \{L_1, \dots, L_k\},$$

то $|R_1| = |R_2|$ тогда и только тогда, когда каждое из слов P_i, L_i представимо в виде $S_j Q$, $j \in \{1, \dots, p\}$, где $Q \in \langle Q_1 \vee \dots \vee Q_m \rangle$.

Доказательство. Достаточность условия утверждения очевидна, установим его необходимость. Пусть $|R_1| = |R_2|$. Рассмотрим принадлежащее списку $P_1, \dots, P_n, L_1, \dots, L_k$ слово наименьшей длины, для которого нарушается условие леммы, пусть это слово есть, например, P_i . Тогда $P_i = L_j Q$ для некоторого $Q \in \langle Q_1 \vee \dots \vee Q_m \rangle$, причем $Q \neq \epsilon$, так как иначе $P_i \in \{S_1, \dots, S_p\}$. Поэтому слово L_j имеет длину, меньшую длины слова P_i и $L_j = S_2 Q'$, $Q' \in \langle Q_1 \vee \dots \vee Q_m \rangle$. Следовательно, $P_i = S_2 Q' Q$, и так как $Q' \setminus Q \in \langle Q_1 \vee \dots \vee Q_m \rangle$, приходим к противоречию.

Рассмотрим далее класс K_2 , состоящий из регулярных выражений вида

$$P_1 \langle Q_1 \rangle R_1 \vee \dots \vee P_m \langle Q_m \rangle R_m,$$

где P_i, Q_i, R_i — слова в алфавите A , $i = 1, \dots, m$, $m > 0$.

Пусть $P_1, \dots, P_k$ — все начинающиеся с буквы a_i слова P_j , $j \in \{1, \dots, m\}$, $Q_{p_1}, \dots, Q_{p_s}$ — все начинающиеся с буквы a_i слова Q_j , $j \in \{1, \dots, m\}$, для которых $P_j = e$, $R_{t_1}, \dots, R_{t_n}$ — все начинающиеся с буквы a_i слова R_j , $j \in \{1, \dots, m\}$, для которых $P_j = e$. Ясно, что a_i -остаток рассматриваемого регулярного выражения определен в случае $k + s + n > 0$. В качестве такого остатка берем выражение

$$P'_{l_1} \langle Q_{l_1} \rangle R_{l_1} \vee \dots \vee P'_{l_k} \langle Q_{l_k}^* \rangle R_{l_k} \vee Q'_{p_1} \langle Q_{p_1} \rangle R_{p_1} \vee \dots \vee Q'_{p_s} \langle Q_{p_s} \rangle R_{p_s} \vee \dots \vee e \langle e \rangle R'_{t_1} \vee \dots \vee e \langle e \rangle R'_{t_n},$$

где

$$\begin{aligned} P_{l_j} &= a_i P'_{l_j}, & j &= 1, \dots, k, \\ Q_{p_j} &= a_i Q'_{p_j}, & j &= 1, \dots, s, \\ R_{t_j} &= a_i R'_{t_j}, & j &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Проверка равенства событий, определяемых регулярными выражениями из K_2 , основана на использовании следующих утверждений.

Слова p и q будем называть циклически подобными, если существуют такие слова r_1, r_2 , что $p = r_1^k$, $q = r_2^l$, причем r_1 получается из r_2 циклическим сдвигом. Длину слова p обозначаем далее $l(p)$.

Предложение 2. Пусть P_i, Q_i, R_i , $i = 1, 2$, — слова, причем Q_1 и Q_2 не являются циклически подобными. Тогда каждое слово, принадлежащее событию $|P_1 \langle Q_1 \rangle R_1| \cap |P_2 \langle Q_2 \rangle R_2|$, имеет длину, меньшую, чем

$$\max(l(P_1), l(P_2)) + l(Q_1) + l(Q_2) + \max(l(R_1), l(R_2)).$$

Доказательство. Пусть $p = P_1 Q_1^{n_1} R_1 = P_2 Q_2^{n_2} R_2$, $n_1, n_2 \geq 0$, причем

$$l(p) \geq \max(l(P_1), l(P_2)) + l(Q_1) + l(Q_2) + \max(l(R_1), l(R_2)).$$

Без ограничения общности считаем, что $l(P_1) \leq l(P_2)$. Обозначим

$$p = p(1) \dots p(k), \quad p(l(P_2) + i + 1) = b_i, \quad i = 0, 1, \dots, l(Q_1) + l(Q_2) - 1.$$

Согласно условию на $l(p)$, b_i есть $(i+1)$ -я буква слова Q_2 при $i = 0, \dots, l(Q_2) - 1$ и $(i+1 - l(Q_2))$ -я буква того же слова при $i = l(Q_2), \dots, l(Q_2) + l(Q_1) - 1$. Представим Q_1 в виде $Q'_1 Q''_1$, где $l(Q'_1) = l(P_2) - l(P_1)$. Слово $\tilde{Q}_1 = Q''_1 Q'_1$ получается из Q_1 циклическим сдвигом, причем, как легко видеть, b_i есть $(i+1)$ -я буква слова $\tilde{Q}_1$ при $i = 1, \dots, l(Q_2) - 1$ и $(i+1 - l(Q_2))$ -я буква того же слова при $i = l(Q_1), \dots, l(Q_1) + l(Q_2) - 1$. Таким образом, $b_i = b_{i+l(Q_1)}$ при $i = 0, \dots, l(Q_1) - 1$, $b_i = b_{i+l(Q_2)}$ при $i = 0, \dots, l(Q_1) - 1$. Отсюда нетрудно получить равенство

$$b_i = b_{(i+jl(Q_2)) \pmod{l(Q_2)}}$$

для $(i+jl(Q_2)) \pmod{l(Q_2)}$, равных $\{0, d, 2d, \dots, l(Q_2)/d - 1\}$, где d — наибольший общий делитель чисел $l(Q_1)$ и $l(Q_2)$. Обозначив $\beta = b_0 b_1 \dots b_{d-1}$, получим, что $Q_2 = \beta l(Q_2)/d$, $\tilde{Q}_1 = \beta l(Q_1)/d$. Слова Q_1 и Q_2 оказываются в результате циклически подобными, что противоречит предположению утверждения. Предложение доказано.

Циклической компонентой регулярного выражения R , принадлежащего классу K_2 , назовем дизъюнкцию всех таких дизъюнктивных членов $P_i\langle Q_i \rangle R_i$ этого выражения, у которых слова Q_i циклически подобны некоторому заданному слову. Циклическая компонента $P_1\langle Q_1 \rangle S_1 \vee \dots \vee P_n\langle Q_n \rangle S_n$ регулярного выражения R_1 называется подобной циклической компоненте $P'_1\langle Q'_1 \rangle S'_1 \vee \dots \vee P'_m\langle Q'_m \rangle S'_m$ регулярного выражения R_2 , если слова Q_1 и Q'_1 циклически подобны.

Пусть $R_1 = P_1\langle Q_1 \rangle S_1 \vee \dots \vee P_n\langle Q_n \rangle S_n$, $R_2 = P'_1\langle Q'_1 \rangle S'_1 \vee \dots \vee P'_m\langle Q'_m \rangle S'_m$ — регулярные выражения класса K_2 . Обозначим

$$L(R_1, R_2) = \max(l(P_1), \dots, l(P_n), l(P'_1), \dots, l(P'_m)) + \max(l(Q_1), \dots, l(Q_n)) \\ + \max(l(Q'_1), \dots, l(Q'_m)) + \max(l(S_1), \dots, l(S_n), l(S'_1), \dots, l(S'_m)).$$

Предложение 3. Если $R_1, R_2 \in K_2$, то $|R_1| = |R_2|$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- (а) события $|R_1|$ и $|R_2|$ совпадают на словах, длина которых меньше, чем $L(R_1, R_2)$,
- (б) подобные циклические компоненты регулярных выражений R_1 и R_2 определяют равные события.

Сформулированное предложение является непосредственным следствием предложения 2.

Пусть Q — слово, не представимое в виде r^k , где $k > 1$. Будем называть такие слова циклически простыми. Обозначим $K_2(Q)$ класс всех регулярных выражений вида $P_1\langle Q_1^{k_1} \rangle S_1 \vee \dots \vee P_n\langle Q_n^{k_n} \rangle S_n$, где $P_i, S_i, i = 1, \dots, n$, — слова. Назовем абсолютным началом члена $P\langle Q^k \rangle S$ регулярного выражения R класса $K_2(Q)$ такое слово P' , что $P^k = P'Q^{k'}$, где k' — наибольшее возможное неотрицательное целое число. Аналогично, абсолютным концом члена $P\langle Q^k \rangle S$ называем слово S' такое, что $S = Q^{k'}S'$, где k' — наибольшее возможное неотрицательное целое число.

Предложение 4. Если абсолютные начала, либо абсолютные концы членов $P_1\langle Q_1^{k_1} \rangle S_1$ и $P_2\langle Q_2^{k_2} \rangle S_2$ регулярных выражений R_1 и R_2 класса $K_2(Q)$ различны, то каждое слово события $|P_1\langle Q_1^{k_1} \rangle S_1| \cap |P_2\langle Q_2^{k_2} \rangle S_2|$ имеет длину, меньшую, чем $L(R_1, R_2)$.

Доказательство. Докажем утверждение для случая различных абсолютных начал, случай различных абсолютных концов рассматривается аналогично. Если абсолютные начала рассматриваемых членов непусты, то утверждение очевидно. Пусть одно из них пусто, без ограничения общности полагаем тогда $P_1 = Q^{t_1}$, $P_2 = P'_2Q^{t_2}$, где $P'_2 \neq e$ — абстрактное начало члена $P_2\langle Q_2^{k_2} \rangle S_2$. Пусть $p = Q^{t_1}Q^{k_1j_1}S_1 = P'_2Q^{t_2}Q^{k_2j_2}S_2$, причем $l(p) \geq L(R_1, R_2)$. Обозначим $l = l(P'_2) + l_2$, $(b_i - l + i + 1) \leftarrow$ буква слова p , $i = 0, 1, \dots, 2^{l(Q)} - 1$. Представим слово Q в виде $Q'Q''$, где $l(Q')$ есть остаток от деления l на $l(Q)$. Если $l(Q') > 0$, то имеем $b_i = b_{i+l(Q')}$ при $i = 0, 1, \dots, l(Q) - 1$. Кроме того, очевидно, $b_i = b_{i+l(Q)}$ при $i = 0, 1, \dots, l(Q) - 1$. Пусть d — наибольший общий делитель чисел $l(Q')$ и $l(Q)$, тогда Q есть степень некоторого слова длины $d < l(Q)$. Это противоречит циклической простоте слова Q , так что $l(Q') = 0$ и $P'_2Q^{t_2} = Q^{t_3}$ для некоторого

t_3 . Далее, находим $P'_2 = Q^{t_3-t_2}$, и снова получаем противоречие (так как P'_2 — абсолютное начало). Предложение доказано.

Абсолютной компонентой регулярного выражения класса $K_2(Q)$ называем дизъюнкцию всех членов этого выражения, абсолютные начала и абсолютные концы которых равны, соответственно, некоторым заданным словам P и S . Абсолютная компонента $P_1\langle Q^{k_1}\rangle S_1 \vee \dots \vee P_n\langle Q^{k_n}\rangle S_n$ регулярного выражения R_1 называется согласованной абсолютной компонентой $P'_1\langle Q^{k'_1}\rangle S'_1 \vee \dots \vee P'_m\langle Q^{k'_m}\rangle S'_m$ регулярного выражения R_2 , если абсолютное начало слова P_1 равно абсолютному началу слова P'_1 , а абсолютный конец слова S_1 абсолютному концу слова S'_1 .

Предложение 5. Если $R_1, R_2 \in K_2(Q)$, то $|R_1| = |R_2|$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

- (а) события $|R_1|$ и $|R_2|$ совпадают на словах, длина которых меньше, чем $L(R_1, R_2)$,
- (б) согласованные друг с другом абсолютные компоненты регулярных выражений R_1 и R_2 определяют равные события.

Сформулированное предложение является непосредственным следствием предложения 3. Обозначим $K_2(Q, P, S)$ класс всех регулярных выражений класса $K_2(Q)$, каждый член которых имеет абсолютное начало P_n и абсолютный конец S . Пусть $R = P_1\langle Q^{k_1}\rangle Q^{l_1}S \vee \dots \vee P_n\langle Q^{k_n}\rangle Q^{l_n}S$ — регулярное выражение, принадлежащее $K_2(Q, P, S)$. Обозначим $N(R)$ множество всех чисел, представимых в одном из следующих видов: $k_1 + m_1 + l_1j, \dots, k_n + m_n + l_nj$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Очевидно, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 6. Если $R_1, R_2 \in K_2(Q, P, S)$, то $|R_1| = |R_2|$ тогда и только тогда, когда $N(R_1) = N(R_2)$.

Перейдем к описанию алгоритма, проверяющего равенство событий, определяемых регулярными выражениями из класса K_2 . Пусть $R_1, R_2 \in K_2$,

$$\begin{aligned} R_1 &= P_1\langle Q_1\rangle S_1 \vee \dots \vee P_n\langle Q_n\rangle S_n, \\ R_2 &= P'_1\langle Q'_1\rangle S'_1 \vee \dots \vee P'_m\langle Q'_m\rangle S'_m. \end{aligned}$$

- (1) Находим циклически простые слова $\pi_1, \dots, \pi_t$, ни одно из которых не получается циклическим сдвигом другого, и такие, что каждое из слов Q_i, Q'_i циклически подобно степени одного из $\pi_1, \dots, \pi_t$. Преобразуем выражения R_1 и R_2 в выражения класса K_2 , у которых под знаками итерации находятся степени слов $\pi_1, \dots, \pi_t$, причем $|R'_1| = |R_1|$, $|R'_2| = |R_2|$. Далее переходим к шагу 2.
- (2) Проверяем равенство событий $|R'_1|$ и $|R'_2|$ на словах длины, не превосходящей $L(R'_1, R'_2)$. Если эти события равны на словах указанной длины, то переходим к шагу 3, в противном случае алгоритм заканчивает работу.
- (3) Находим все циклические компоненты $\varkappa_1, \dots, \varkappa_q$ выражения R'_1 и все циклические компоненты $\varkappa'_1, \dots, \varkappa'_q$ выражения R'_2 . Если $q \neq q'$, либо указанные

компоненты невозможно упорядочить так, что κ_i подобна κ'_i , $i = 1, \dots, q$, то $|R_1| \neq |R_2|$ и алгоритм заканчивает работу. В противном случае $i = 1$, и переходим к шагу 4.

- (4) Находим все абсолютные компоненты $\alpha_1, \dots, \alpha_{s'}$ выражения κ_i и все абсолютные компоненты $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{s'}$ выражения κ'_i . Если $s \neq s'$, либо указанные компоненты невозможно упорядочить так, что α_i согласована с α'_i , $i = 1, \dots, s$, то $|R_1| \neq |R_2|$ и алгоритм заканчивает работу. В противном случае для каждого $j = 1, \dots, s$ проверяем совпадение множеств $N(\alpha_j)$ и $N(\alpha'_j)$. Если хотя бы в одном из случаев $N(\alpha_j) \neq N(\alpha'_j)$, то $|R_1| \neq |R_2|$ и алгоритм заканчивает работу. В противном случае переходим к шагу 5.
- (5) Если $i < q$, то полагаем $i := i + 1$ и переходим к шагу 4. В противном случае $|R_1| = |R_2|$, и алгоритм заканчивает работу.

Для установления равенств множеств

$$\bigcup_{i=1}^n \{k_i + l_i j \mid j \in \{0, 1, 2, \dots\}\}, \quad \bigcup_{i=1}^{n'} \{k'_i + l'_i j \mid j \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$$

достаточно сравнить их на отрезке $\{0, 1, 2, \dots, \max(k_1, \dots, k_n, k'_1, \dots, k'_{n'}) + k\}$, где k есть наименьшее общее кратное чисел $l_1, \dots, l_n, l'_1, \dots, l'_{n'}$.

В заключение заметим, что класс K_2 содержит регулярные выражения, для которых алгоритм В. М. Глушкова не строит минимального источника.

Список литературы

1. Ушчумлич М. Ш. Исследование некоторых алгоритмов анализа и синтеза автоматов. Докл. АН СССР (1979) **247**, №3, 561–565.
2. Ушчумлич М. Ш. Об эффективности некоторых алгоритмов анализа и синтеза конечных автоматов. В кн.: *“Методы и системы технической диагностики”*, т.3, №6. Саратовский ун-т, Саратов, 1987, с.100–109.

Статья поступила 01.10.96.