Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Круглов, Достижимость на конечном шаге предельных распределений для произведений случайных величин со значениями в конечной группе, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 3, 35–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm57>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:03:01

УДК 519.2

Достижимость на конечном шаге предельных распределений для произведений случайных величин со значениями в конечной группе

© 2006 г. И. А. Круглов

В работе приведены необходимые и достаточные условия равновероятности на конечном шаге предельных распределений произведений случайных величин с значениями в конечной группе, распределения которых определяются цепью Маркова, при этом равномерное предельное распределение сосредоточено на соответствующих смежных классах исходной конечной группы по ее некоторым сопряженным подгруппам.

Работа выполнена при поддержке программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ-8564.2006.10.

В параграфе 3 статьи [1] описаны условия сходимости и предельные распределения для произведений случайных величин с значениями в конечной группе, распределения которых определяются конечной простой однородной неразложимой цепью Маркова следующим образом.

Пусть $\mathcal{Z}$ — конечная простая однородная неразложимая цепь Маркова с множеством состояний $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, матрицей переходных вероятностей $P = [p(i, j)]$ и начальным распределением $(p_0(1), \dots, p_0(n))$. Будем предполагать, что $p_0(i) > 0$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, то есть, что все начальные состояния цепи Маркова $\mathcal{Z}$ возможны.

Пусть $\xi_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$, для которых $p(i, j) > 0$, суть случайные величины, принимающие значения в некоторой конечной группе $(G, \cdot)$. По случайной реализации $E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}, \dots, E_{\alpha_{k+1}}$ цепочки состояний цепи Маркова $\mathcal{Z}$ в первых $k+1$ испытаниях построим произведение

$$\eta^{(k)} = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_k,$$

где случайные величины $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ независимы и распределение φ_i совпадает с распределением $\xi_{\alpha_i, \alpha_{i+1}}$, $i = 1, \dots, k$. Для натурального числа k и таких $i, j \in \{1, \dots, n\}$, что вероятность $p^{(k)}(i, j)$ перехода из E_i в E_j за k шагов положительна, обозначим через $\eta_{i,j}^{(k)}$ случайную величину, распределение которой совпадает с условным распределением случайной величины $\eta^{(k)}$ при условиях $E_{\alpha_1} = E_i$, $E_{\alpha_{k+1}} = E_j$.

Будем говорить, что случайные величины $\eta_{i,j}^{(k)}$ есть произведения случайных величин, распределения которых определяются цепью Маркова $\mathcal{Z}$ и исходными распределениями случайных величин $\xi_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$, для которых $p(i, j) > 0$.

В настоящей работе приведены необходимые и достаточные условия существования такого k , что распределения всех определенных при этом k случайных величин $\eta_{i,j}^{(k)}$ со-

впадают с соответствующими предельными распределениями. В частном случае произведений независимых одинаково распределенных случайных величин эта задача решена Ю. Н. Горчинским в [1].

Введем обозначения, необходимые для точной постановки задачи.

Мы будем использовать понятия теории графов, следуя изложению п. 3.2 главы 2 книги [2]. Введем соответствующий цепи Маркова $\mathfrak{Z}$ ориентированный граф Γ с множеством вершин $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ и множеством ориентированных ребер $\{e_{i,j}^{+1}, e_{i,j}^{-1} \mid i, j \in \{1, \dots, n\}, p(i, j) > 0\}$. Так как цепь Маркова $\mathfrak{Z}$ неразложима, граф Γ сильно связный. Если $\varepsilon = +1$, то E_i — начало, а E_j — конец $e_{i,j}^{\varepsilon}$, если $\varepsilon = -1$, то E_j — начало, а E_i — конец $e_{i,j}^{\varepsilon}$.

Путем z в графе Γ называется последовательность ребер

$$z = (e_{i_1, j_1}^{\varepsilon_1}, e_{i_2, j_2}^{\varepsilon_2}, \dots, e_{i_k, j_k}^{\varepsilon_k}), \quad (1)$$

у которой для каждого $s = 1, 2, \dots, k-1$ начало ребра $e_{i_{s+1}, j_{s+1}}^{\varepsilon_{s+1}}$ совпадает с концом ребра $e_{i_s, j_s}^{\varepsilon_s}$. При этом начало ребра $e_{i_1, j_1}^{\varepsilon_1}$ есть начало пути z , конец ребра $e_{i_k, j_k}^{\varepsilon_k}$ — конец пути z .

Обозначим через d число циклических классов состояний цепи Маркова $\mathfrak{Z}$.

Для $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и целого числа R через $L_R(i, j)$ обозначим множество всех путей вида (1) в графе Γ с началом E_i и концом E_j , у которых $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k = R$. Каждой паре $i, j \in \{1, \dots, n\}$ однозначно соответствует число $\nu(i, j) \in \{0, \dots, d-1\}$, для которого $L_R(i, j)$ непусто при $R = \nu(i, j) + kd$ и любом целом k . Зафиксируем произвольно $z_{i,j} \in L_{\nu(i,j)}(i, j)$, $\sigma_{i,j} \in \Omega(z_{i,j})$.

Пусть $\gamma(i, j) = (\nu(1, i) + \nu(i, j) - \nu(1, j))/d$, очевидно, что $\gamma(i, j) \in \{0; +1\}$ для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Пусть

$$Z^{(1)} = \bigcup_{R=-\infty}^{+\infty} L_R(1, 1)$$

— множество петель в Γ с концом E_1 .

Для $z \in L_R(1, 1)$ положим $l(z) = R/d$. Нетрудно видеть, что $l(z)$ — целое число. Для произвольной случайной величины ξ с значениями в группе G обозначим через $\Omega(\xi) = \{g \in G \mid \mathbf{P}(\xi = g) > 0\}$.

Далее, для пути z вида (1) построим множество $\Omega(z) \subset G$, полагая

$$\Omega(z) = \Omega(e_{i_1, i_1}^{\varepsilon_1}) \dots \Omega(e_{i_k, j_k}^{\varepsilon_k}),$$

где

$$\Omega(e_{s,t}^{\varepsilon}) = \Omega(\xi_{s,t})^{\varepsilon},$$

и для подмножеств $M, N \subset G$

$$M \cdot N = \{\sigma\tau \mid \sigma \in M, \tau \in N\}, \quad M^{-1} = \{\sigma^{-1} \mid \sigma \in M\}.$$

Пусть

$$G_1 = \bigcup_{z \in Z^{(1)}} \Omega(z),$$

тогда G_1 — подгруппа конечной группы G . Зафиксируем произвольное $z' \in L_d(1, 1)$, $x_1 \in \Omega(z')$ и обозначим через H_1 минимальную подгруппу среди подгрупп L группы G ,

удовлетворяющих соотношению

$$\Omega(z) \subset x_1^{l(z)} \cdot L \quad \forall z \in Z^{(1)}. \quad (2)$$

Соотношение (2) выполнено при $L = G_1$, поэтому H_1 есть подгруппа G_1 , пусть r_1 — индекс H_1 в G_1 .

Согласно основной теореме параграфа 3 в [1], для любого $l \in \{0, 1, \dots, r_1 - 1\}$ последовательность распределений случайных величин $\eta_{i,j}^{(s_N)}$, $s_N = v(i, j) + (l + r_1 N)d$, при $N \rightarrow \infty$ сходится к равновероятному распределению на множестве

$$\sigma_{1,i}^{-1} \cdot x_1^{l+\gamma(i,j)} \cdot H_1 \cdot \sigma_{1,j}. \quad (3)$$

Нас будут интересовать необходимые и достаточные условия существования такого натурального числа

$$s = v + d(l + Nr_1), \quad v \in \{0, \dots, d-1\}, \quad l \in \{0, \dots, r_1-1\}, \quad N \geq 0, \quad (4)$$

что для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$, удовлетворяющих условию $p^{(s)}(i, j) > 0$, распределение случайной величины $\eta_{i,j}^{(s)}$ совпадает с равновероятным распределением на множестве (3). В этом случае мы будем говорить, что имеет место достижимость предельных распределений $\eta_{i,j}^{(k)}$ на конечном шаге s .

При доказательстве основной теоремы параграфа 3 в [1] было показано, что для любых i, j и s вида (4), удовлетворяющих условию $p^{(s)}(i, j) > 0$, множество

$$\Omega(\eta_{i,j}^{(s)}) \subset \sigma_{1,i}^{-1} \cdot x_1^{l+\gamma(i,j)} \cdot H_1 \cdot \sigma_{1,j}. \quad (5)$$

Отсюда следует, что в случае, когда имеет место достижимость предельных распределений на некотором шаге s , аналогичное свойство выполняется на шаге $(s + k)$ для любого $k \geq 1$. Таким образом, в случае достижимости на конечном шаге, однозначно определено минимальное значение s , для которого достижимость выполняется на шаге s , такое s будем называть индексом достижимости.

Пусть K^* — произвольный класс сопряженных элементов группы G , если множество $K = K^* \cap G_1$ непусто, то K — класс сопряженных элементов группы G_1 . Ввиду соотношения (2), выполненного при $L = H_1$, коммутант группы G_1 содержится в H_1 . Следовательно, H_1 — нормальный делитель в G_1 , и в силу (2) (при $L = H_1$), факторгруппа G_1/H_1 циклическая, порожденная смежным классом $x_1 \cdot H_1$. Так как группа G_1/H_1 абелева, для любого натурального s либо $K \subset (x_1^s \cdot H_1)$, либо $K \cap (x_1^s \cdot H_1) = \emptyset$ — пустое множество.

Будем обозначать через f максимальную степень неприводимого представления группы G над полем комплексных чисел. Для квадратной матрицы $Q = [q_{i,j}]$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$, обозначим $\text{Sp}(Q)$ след $q_{1,1} + q_{2,2} + \dots + q_{m,m}$ матрицы Q .

Теорема 1. Достижимость предельных распределений $\eta_{i,j}^{(k)}$ на некотором конечном шаге имеет место тогда и только тогда, когда для всех $s \in \{1, \dots, nf\}$ таких, что d делит s , и любого класса K^* сопряженных элементов группы G верно равенство

$$\sum_{j=1}^n p^{(s)}(j, j) \mathbf{P}(\eta_{j,j}^{(s)} \in K^*) = \begin{cases} \text{Sp}(P^s) |K^* \cap G_1| / |H_1|, & \text{если } K^* \cap G_1 \subset x_1^s \cdot H_1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (6)$$

Доказательство. Проведем предварительные рассуждения. Пусть

$$\bar{\xi}_{i,j} = \sigma_{1,i} \cdot \xi_{i,j} \cdot \sigma_{1,j}^{-1}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad p(i, j) > 0,$$

и пусть $\bar{\eta}_{i,j}^{(k)}$ суть произведения случайных величин, определяемых цепью Маркова $\mathfrak{Z}$ и исходными распределениями $\bar{\xi}_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$, $p(i, j) > 0$. Тогда

$$\bar{\eta}_{i,j}^{(k)} = \sigma_{1,i} \cdot \eta_{i,j}^{(k)} \cdot \sigma_{1,j}^{-1}, \quad \forall k, \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad p^{(k)}(i, j) > 0. \quad (7)$$

Из равенств (7) следует, что достижимость предельных распределений $\eta_{i,j}^{(k)}$ на конечном шаге имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие достижимости предельных распределений на конечном шаге для случайных величин $\bar{\eta}_{i,j}^{(k)}$.

Из соотношения (5) следует, что случайные величины $\bar{\xi}_{i,j}$, $\bar{\eta}_{i,j}^{(k)}$ можно рассматривать как случайные величины со значениями в группе G_1 . Найдем выражение для матричной характеристической функции $\Phi_{\bar{\eta}_{i,j}^{(k)}}(U)$, где U — произвольное неприводимое представление группы G_1 над полем комплексных чисел (см. §1 в [1]). Пусть n_U — степень U и

$$\Phi(U) = \begin{bmatrix} \Phi_{1,1}(U) & \dots & \Phi_{1,n}(U) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n,1}(U) & \dots & \Phi_{n,n}(U) \end{bmatrix}$$

— блочная $n n_U \times n n_U$ матрица, у которой на месте с номером (i, j) стоит нулевая квадратная матрица размера n_U , если $p(i, j) = 0$, и матрица $p(i, j) \Phi_{\bar{\xi}_{i,j}}(U)$, если $p(i, j) > 0$. Матрицу $\Phi(U)^k$, $k = 1, 2, \dots$, также можно рассматривать как блочную матрицу с n^2 квадратными блоками $\Phi_{i,j}^{(k)}(U)$ размера n_U :

$$\Phi(U)^k = \begin{bmatrix} \Phi_{1,1}^{(k)}(U) & \dots & \Phi_{1,n}^{(k)}(U) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n,1}^{(k)}(U) & \dots & \Phi_{n,n}^{(k)}(U) \end{bmatrix}$$

Как показано в параграфе 3 в [1], верно равенство

$$\Phi_{\bar{\eta}_{i,j}^{(k)}}(U) = \frac{1}{p^{(k)}(i, j)} \Phi_{i,j}^{(k)}(U), \quad p^{(k)}(i, j) > 0. \quad (8)$$

Вычислим след матриц $\Phi(U)^{dk}$, $k \geq 1$. Из соотношения (8) следует, что для всех $k \geq 1$ и всех U

$$\text{Sp}(\Phi(U)^{dk}) = \sum_{j=1}^n p^{(kd)}(j, j) \text{Sp} \Phi_{\bar{\eta}_{j,j}^{(kd)}}(U), \quad (9)$$

В правой части (9) в случае $p^{(kd)}(j, j) = 0$ соответствующее слагаемое считается равным 0.

По теореме о выражении матричных характеристических функций случайных величин через распределение (см. [1]) и в силу линейности функции след для всех $j \in \{1, \dots, n\}$, всех $k \geq 1$ таких, что $p^{(kd)}(j, j) > 0$, и всех U справедливо равенство

$$\text{Sp}(\Phi_{\bar{\eta}_{j,j}^{(kd)}}(U)) = \sum_{\sigma \in G} \mathbf{P}(\bar{\eta}_{j,j}^{(kd)} = \sigma) \text{Sp} U(\sigma). \quad (10)$$

Пусть χ_U — неприводимый характер группы G , соответствующий представлению U , тогда $\text{Sp}(U(\sigma)) = \chi_U(\sigma)$ для всех $\sigma \in G$, и из (9) и (10) следуют равенства

$$\text{Sp}(\Phi(U)^{dk}) = \sum_{\sigma \in G} \chi_U(\sigma) \left(\sum_{j=1}^n p^{(kd)}(j, j) \mathbf{P}(\bar{\eta}_{j,j}^{(kd)} = \sigma) \right), \quad (11)$$

справедливые для всех $k \geq 1$ и всех U .

Пусть B — множество классов сопряженных элементов группы G_1 . Каждый характер группы постоянен на любом классе сопряженных элементов, поэтому

$$\chi_U(\sigma) = \chi_U(K), \quad \forall \sigma \in K, \quad \forall K \in B. \quad (12)$$

Из соотношений (11) и (12) следует, что для всех $k \geq 1$ и всех U

$$\text{Sp}(\Phi(U)^{dk}) = \sum_{K \in B} \chi_U(K) \left(\sum_{j=1}^n p^{(kd)}(j, j) \mathbf{P}(\bar{\eta}_{j,j}^{(kd)} \in K) \right). \quad (13)$$

Докажем необходимость условий (6) теоремы. Пусть достижимость предельных распределений $\bar{\eta}_{i,j}^{(k)}$ на конечном шаге s , $s = v + d(l + Nr_1)$, имеет место для некоторых $v \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, $l \in \{0, 1, \dots, r_1-1\}$ и натурального числа N . Тогда для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ таких, что $p^{(s)}(i, j) > 0$, распределение случайной величины $\bar{\eta}_{i,j}^{(s)}$ совпадает с равномерным распределением на множестве $x_1^{l+\gamma(i,j)} \cdot H_1$ (см. (3) и (7)).

Рассмотрим случай, когда ядро $\text{Ker } U$ неприводимого представления U группы G_1 не содержит H_1 . Обозначим через η случайную величину со значениями в G_1 , имеющую равномерное распределение на множестве H_1 . Разлагая ограничение $\text{Res}_{H_1} U$ представления U на подгруппу H_1 на неприводимые компоненты и используя теорему о выражении характеристических функций через распределение (см. §1 в [1]) и теорему Клиффорда [3], получаем соотношение

$$\Phi_\eta(U) = O_{n_U \times n_U} \quad \forall U: \text{Ker } U \not\supset H_1 \quad (14)$$

В правой части соотношения (14) стоит нулевая квадратная матрица размера n_U . Следовательно, для всех $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ таких, что $p^{(s)}(i, j) > 0$,

$$\Phi_{\bar{\eta}_{i,j}^{(s)}}(U) = U(x_1^{l+\gamma(i,j)}) \cdot \Phi_\eta(U) = O_{n_U \times n_U}. \quad (15)$$

Из соотношений (8), (15) следует, что для всех U таких, что $\text{Ker } U \not\supset H_1$,

$$\Phi(U)^s = O_{n_U \times n_U} \quad (16)$$

Из условия (16) вытекает, что все собственные числа матрицы $\Phi(U)$ равны 0, но тогда то же верно и для всех собственных чисел матриц $\Phi(U)^k$, $k \geq 1$. Таким образом, для всех $k \geq 1$ и всех U таких, что $\text{Ker } U \not\supset H_1$,

$$\text{Sp}(\Phi(U)^{dk}) = 0. \quad (17)$$

Из соотношений (13) и (17) следует, что для всех $k \geq 1$ и всех U таких, что $\text{Ker } U \not\supset H_1$,

$$\sum_{K \in B} \chi_U(K) \left(\sum_{j=1}^n p^{(kd)}(j, j) \mathbf{P}(\bar{\eta}_{j,j}^{(kd)} \in K) \right) = 0. \quad (18)$$

Пусть теперь $\text{Ker } U \supset H_1$. Так как G_1/H_1 — циклическая группа, порожденная смежным классом $x_1 \cdot H_1$ порядка r_1 , ясно, что U — одномерное представление, $U = \chi_U$, $\chi_U(x_1)^{r_1} = 1$. Из соотношений (5) и (7) с учетом равенства $\gamma(j, j) = 0$, справедливого для всех $j = 1, \dots, n$, следует, что для всех $j = 1, \dots, n$ и $k \geq 1$ таких, что $p^{(kd)}(j, j) > 0$, и всех U таких, что $\text{Ker } U \supset H_1$, справедливо равенство

$$\Phi_{\bar{\eta}_{j,j}^{(kd)}}(U) = \chi_U(x_1^k). \quad (19)$$

Согласно (8) и (19)

$$\text{Sp}(\Phi(U)^{kd}) = \text{Sp}(P^{kd}) \cdot \chi_U(x_1^k) \quad (20)$$

для всех $k \geq 1$ и всех U таких, что $\text{Ker } U \supset H_1$.

Из соотношений (13) и (20) получаем, что для всех $k \geq 1$ и всех U таких, что $\text{Ker } U \supset H_1$, справедливо равенство

$$\sum_{K \in B} \chi_U(K) \left(\sum_{j=1}^n p^{(kd)}(j, j) \mathbf{P}(\bar{\eta}_{j,j}^{(kd)} \in K) \right) = \text{Sp}(P^{kd}) \cdot \chi_U(x_1^k). \quad (21)$$

Зафиксируем $k \geq 1$ и рассмотрим систему линейных уравнений относительно неизвестных y_K , $K \in B$,

$$\sum_{K \in B} \chi_U(K) \cdot y_K = \begin{cases} 0, & \text{Ker } U \not\supset H_1, \\ \text{Sp}(P^{kd}) \cdot \chi_U(x_1^k), & \text{Ker } U \supset H_1. \end{cases} \quad (22)$$

Так как число неприводимых характеров конечной группы совпадает с числом ее классов сопряженных элементов, число уравнений в системе (22) совпадает с числом неизвестных. Ввиду линейной независимости характеров, матрица системы (22) является невырожденной, и данная система имеет единственное решение, которым, в силу (18) и (21), является набор значений

$$y_K = \sum_{j=1}^n p^{(kd)}(j, j) \mathbf{P}(\bar{\eta}_{j,j}^{(kd)} \in K), \quad K \in B. \quad (23)$$

Используя теорему Клиффорда, можно показать, что решением (22) также является набор значений y_K , $K \in B$, где

$$y_K = \begin{cases} (|K|/|H_1|) \cdot \text{Sp}(P^{kd}), & K \subset x_1^k \cdot H_1, \\ 0, & K \not\subset x_1^k \cdot H_1. \end{cases}$$

Система уравнений (22) имеет единственное решение, поэтому для всех $K \in B$ и $k \geq 1$

$$\sum_{j=1}^n p^{(kd)}(j, j) \mathbf{P}(\bar{\eta}_{j,j}^{(kd)} \in K) = \begin{cases} (|K|/|H_1|) \cdot \text{Sp}(P^{kd}), & K \subset x_1^k \cdot H_1, \\ 0, & K \not\subset x_1^k \cdot H_1. \end{cases} \quad (24)$$

Для каждого класса K сопряженных элементов подгруппы G_1 однозначно определен класс K^* сопряженных элементов группы G такой, что $K = K^* \cap G_1$, при этом, согласно соотношениям (5), (7), при $i = j$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$ и для всех $k \geq 1$ таких, что

$p^{(kd)}(j, j) \geq 0$, события $\{\bar{\eta}_{j,j}^{(kd)} \in K\}$ и $\{\eta_{j,j}^{(kd)} \in K^*\}$ совпадают и их вероятности равны между собой.

Таким образом, справедливость условия (6) следует из доказанного соотношения (24).

Докажем достаточность условий (6) для достижимости предельных распределений $\eta_{i,j}^{(k)}$ на конечном шаге.

Из условий (6) следуют равенства (24), а тогда набор значений (23) есть решение системы (22) для любого натурального числа k такого, что $s = kd \leq nf$. В частности, при этих же значениях k выполняются равенства (18), а с ними (с учетом (13)) и равенства (17).

Заметим, что $\text{Sp}(\Phi(U)^s) = 0$, если d не делит s , таким образом, для всех $s \in \{1, \dots, nf\}$ и всех U таких, что $\text{Ker } U \not\supset H_1$, справедливо равенство

$$\text{Sp}(\Phi(U)^s) = 0. \quad (25)$$

Рассмотрим характеристический многочлен $f_U(\lambda)$ матрицы $\Phi(U)$, его коэффициенты с помощью формул Ньютона можно выразить в виде значений многочленов (с нулевыми свободными членами) от чисел $\text{Sp}(\Phi(U)^s)$, $s = 1, 2, \dots, nn_U$. Но тогда, поскольку $nn_U \leq f$, из (25) следует, что $f_U(\lambda) = \lambda^{nn_U}$, и по теореме Гамильтона–Кэли

$$\Phi(U)^{nn_U} = O_{nn_U \times nn_U} \quad (26)$$

для всех U таких, что $\text{Ker } U \not\supset H_1$.

Из соотношений (26) и (8) получаем, что для всех $i, j = 1, \dots, n$ таких, что $p^{(nf)}(i, j) > 0$, и для всех U таких, что $\text{Ker } U \not\supset H_1$, справедливо равенство

$$\Phi_{\bar{\eta}_{i,j}^{(nf)}}(U) = O_{n_U \times n_U}, \quad (27)$$

Так как, в силу (5) и (7), множество $\Omega(\bar{\eta}_{i,j}^{(nf)})$ содержится в одном смежном классе группы G_1 по ее подгруппе H_1 , из (27) следует, что распределение $\bar{\eta}_{i,j}^{(nf)}$ совпадает с равновероятным распределением на соответствующем смежном классе G_1 по H_1 для всех $i, j = 1, \dots, n$ таких, что $p^{(nf)}(i, j) > 0$. Таким образом, для случайных величин $\bar{\eta}_{i,j}^{(k)}$, а с ними и для случайных величин $\eta_{i,j}^{(k)}$ имеет место достижимость предельных распределений на конечном шаге nf .

Теорема доказана.

Следствие 1. Если достижимость предельных распределений $\eta_{i,j}^{(k)}$ на конечном шаге имеет место, то индекс достижимости не превосходит nf .

Заметим, что, согласно доказательству теоремы 1, в качестве значения f в теореме 1 и следствии 1 можно рассматривать максимальную степень неприводимого представления подгруппы G_1 группы G .

Будем говорить, что для случайных величин $\eta_{i,j}^{(k)}$ имеет место достижимость равновероятного распределения на группе G на конечном шаге, если существует натуральное число s такое, что для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$, для которых $p^{(s)}(i, j) > 0$, распределение случайной величины $\eta_{i,j}^{(s)}$ совпадает с равновероятным распределением на группе G ; минимальное s с указанным свойством назовем индексом достижимости на конечном шаге равновероятного распределения на группе G .

Следствие 2. *Достижимость равновероятного распределения на группе G на конечном шаге для случайных величин $\eta_{i,j}^{(k)}$ имеет место тогда и только тогда, когда для любого числа $s \in \{1, \dots, nf\}$ такого, что d делит s , и любого класса K^* сопряженных элементов группы G верно равенство*

$$\sum_{j=1}^n p^{(s)}(j, j) \mathbf{P}(\bar{\eta}_{j,j}^{(s)} \in K^*) = \text{Sp}(P^s) \frac{|K^*|}{|G|}.$$

Если достижимость равновероятного распределения на группе G имеет место, то индекс достижимости не превосходит nf .

Доказательство следствия 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1, при этом всюду в качестве представления U рассматривается некоторое неприводимое комплексное представление группы G и условие $\text{Ker } U \not\supset H_1$, заменяется на условие, что U есть неединичное представление.

Для случая положительно-регулярных цепей Маркова утверждение следствия 2 было доказано Ю. Н. Горчинским.

Список литературы

1. Горчинский Ю. Н., Круглов И. А., Капитонов В. М., Вопросы теории распределений на конечных группах. *Труды по дискретной математике* (1997) 1, 85–112.
2. Бахтурин Ю. А. *Основные структуры современной алгебры*. Наука, Москва, 1990.
3. Кэртис Ч., Райнер И., *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр*. Наука, Москва, 1964.

Статья поступила 14.03.2006.