Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чеплюкова, Об одной характеристике случайного отображения с известным числом циклов, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 3, 43–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm58>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 09:01:33

УДК 519.2

Об одной характеристике случайного отображения с известным числом циклов

© 2006 г. И. А. Чеплюкова

Рассматривается случайная величина, равная числу деревьев заданного объема в графе случайного однозначного отображения множества n элементов в себя, содержащем m компонент связности. Получены предельные теоремы описывающие распределение этой характеристики в случае, когда $n \rightarrow \infty$, $m/\ln n \rightarrow \infty$, $m/\ln n = O(\ln n)$.

Работа выполнена при поддержке программой Президента Российской Федерации государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации, грант НШ 1758.2003.1, и гранта 2005 г. Фонда содействия отечественной науке.

Рассмотрим однозначное отображение множества из n элементов в себя, граф которых содержит m компонент связности. На множестве $\Sigma_{n,m}$ всех таких отображений введем равномерное распределение вероятностей. Тогда числовые характеристики этих отображений являясь случайными величинами. Если в графе отображения из $\Sigma_{n,m}$ удалить ребра, соединяющие циклические вершины, то оставшаяся часть графа образует лес. Поэтому естественно использовать для получения результатов о случайных отображениях известные результаты о случайных лесах. Эта идея была впервые использована Ю. Л. Павловым в [1, 2]. Здесь мы будем рассматривать множество лесов $\mathcal{F}$, состоящих из N корневых деревьев, корни которых имеют номера $1, 2, \dots, N$, и из $n - N$ некорневых вершин, имеющих номера $1, \dots, n - N$, при условии, что распределение вероятностей, заданное на $\mathcal{F}$, является равномерным. В [3] показано, что такому случайному лесу соответствует ветвящийся процесс с пуассоновским распределением числа прямых потомков каждой частицы. Обозначим x параметр этого распределения и положим $x = (n - N)/n \exp\{-(n - N)/n\}$.

Через $\lambda^{(n,m)}$ обозначим число циклических вершин графа случайного отображения объема n с m циклами. Если распределение $\lambda^{(n,m)}$ известно, то, усредняя по нему распределения различных характеристик случайного леса, можно получить распределения соответствующих характеристик случайного отображения (см. [3]). Через $\lambda_r^{(n,m)}$ обозначим случайную величину, равную числу деревьев, содержащих r некорневых вершин в случайном отображении с m циклами. В случае ограниченного отношения $m/\ln n$ предельное поведение случайной величины $\lambda_r^{(n,m)}$ было получено в [3]. В настоящей работе мы дополним эти результаты, исследовав поведение $\lambda_r^{(n,m)}$ при $n \rightarrow \infty$ так, что $m/\ln n \rightarrow \infty$, $m/\ln n = O(\ln n)$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\sqrt{n}}{m}, & \beta &= \frac{m}{\ln \alpha}, & \mu &= \frac{\beta}{2} \left(1 - \frac{\ln \ln \alpha}{\ln \alpha}\right), \\ p_r &= \frac{(r+1)^r}{(r+1)!} \exp\{-(r+1)\}, & r &= 0, 1, \dots, \\ b &= p_r \sqrt{n/(2\mu)}, & \gamma &= \sqrt{(b+2)/b}, \quad \theta = p_r \sqrt{2\mu n}.\end{aligned}\quad (1)$$

Кроме того, будем писать $f(n) \asymp g(n)$ (см. [4]), если неравенства $|f(n)| \leq C_1 |g(n)|$ и $|g(n)| \leq C_2 |f(n)|$ выполняются для всех достаточно больших n (здесь и далее $C_1, C_2, \dots$ означают некоторые положительные постоянные). Выражение $f(n) \succ g(n)$ означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n)/f(n) = 0$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $n \rightarrow \infty$ так, что $m/\ln n \rightarrow \infty$, $m/\ln n = O(\ln n)$, $r = o((\mu n)^{1/3})$. Тогда

$$\gamma p_r \sqrt{n} \mathbf{P}\{\lambda_r^{(n,m)} = k\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2/2} + o(1)$$

равномерно относительно целых положительных k таких, что $z = (k/(p_r \sqrt{n}) - \sqrt{2\mu})/\gamma$ лежит в любом фиксированном конечном интервале.

Теорема 2. Если $n \rightarrow \infty$ так, что $m/\ln n \rightarrow \infty$, $m/\ln n = O(\ln n)$, $r \asymp (\mu n)^{1/3}$, то для любого $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\lambda_r^{(n,m)} = k\} = \frac{1}{k!} \theta^k e^{-\theta} (1 + o(1)).$$

Теорема 3. Пусть $n \rightarrow \infty$ так, что $m/\ln n \rightarrow \infty$, $m/\ln n = O(\ln n)$, $r \succ (\mu n)^{1/3}$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\lambda_r^{(n,m)} = 0\} = 1 + o(1).$$

Приведем несколько теорем, с помощью которых докажем теоремы 1–3. В [5] доказаны следующие утверждения (теорема 4 и 5).

Теорема 4. Если $n \rightarrow \infty$, $m/\ln n \rightarrow \infty$, $m/\ln n = O(\ln n)$, $z = N/\sqrt{n}$, то

$$\beta^\mu e^{-\beta/2} \sqrt{\pi n} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} = z^{2\mu} e^{-z^2/2} (1 + o(1))$$

равномерно относительно целых N , для которых $z - \sqrt{2\mu}$ лежит в любом фиксированном конечном интервале, где α, β, μ определены в (1).

Пусть $\xi^{(n)}$ обозначает число циклов отображения множества объема n в себя.

Теорема 5. Пусть $n \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow \infty$, $m/\ln n = O(\ln n)$. Тогда

$$\frac{(m-1)! \sqrt{2\beta n}}{(-\ln(1-x_1))^{m-1} e^{\beta/2} \beta^\mu} \mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\} = e^{-\gamma_1} (1 + o(1)),$$

где

$$x_1 = 1 - \frac{1}{\alpha \ln \alpha}, \quad \gamma_1 = \frac{\beta}{8 \ln \alpha} \ln^2(2\mu),$$

а α, β, μ определены в (1).

Обозначим $\lambda_r(\mathcal{F})$ число деревьев леса из $\mathcal{F}$, содержащих r некорневых вершин. Пусть

$$p_r(x) = \frac{(r+1)^r}{(r+1)!} \left(\frac{n-N}{n} e^{-(n-N)/n} \right)^r e^{-(n-N)/n},$$

$$\sigma_{rr}^2 = p_r(x) \left(1 - p_r(x) - \left(\frac{n-N}{N} - r \right)^2 p_r(x) N^3 / ((n-N)n^2) \right). \quad (2)$$

В [3] доказана следующая теорема для случайной величины $\lambda_r(\mathcal{F})$.

Теорема 6. Пусть $N, n, r \rightarrow \infty$, тогда для целых неотрицательных k

$$\mathbf{P}\{\lambda_r(\mathcal{F}) = k\} = (k!)^{-1} (N p_r(x))^k \exp\{-N p_r(x)\} (1 + o(1))$$

равномерно относительно $(k - N p_r(x)) / \sqrt{N p_r(x)}$ в любом конечном интервале.

Перейдем к доказательству теорем 1–3.

Пусть выполнены условия теоремы 1. Доказательство этого утверждения разделим на несколько случаев:

- (1) r фиксировано;
- (2) $r = o(n^{1/3}/\mu^{6/5})$;
- (3) $r \asymp (n^{1/3}/\mu^{6/5})$;
- (4) $r \succ n^{1/3}/\mu^{6/5}$, $r = o((n/\mu)^{1/3})$;
- (5) $r \asymp (n/\mu)^{1/3}$;
- (6) $r \succ (n/\mu)^{1/3}$.

Рассмотрим первый случай. В [3] было показано, что

$$\mathbf{P}\{\lambda_r^{(n,m)} = k\} = \sum_{N=k}^{n-kr} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \mathbf{P}\{\lambda_r(F) = k\}. \quad (3)$$

Из соотношений (1) видно, что $\gamma = 1 + o(1)$ при фиксированном r . Тогда

$$\begin{aligned} \gamma p_n \sqrt{n} \mathbf{P}\{\lambda_r^{(n,m)} = k\} &= p_r \sqrt{n} \sum_{N=k}^{n-kr} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \mathbf{P}\{\lambda_r(\mathcal{F}) = k\} (1 + o(1)) \\ &= \sum_{i=1}^4 S_i (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$S_i = p_r \sqrt{n} \sum_{N_i} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \mathbf{P}\{\lambda_r(\mathcal{F}) = k\}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (5)$$

$$N_1 = \{N: k \leq N < (\sqrt{2\mu} + z)\sqrt{n} - (2\mu)^{1/4} n^{7/24} p_r^{-5/12}\},$$

$$N_2 = \{N: (\sqrt{2\mu} + z)\sqrt{n} - (2\mu)^{1/4} n^{7/24} p_r^{-5/12} \leq N \leq (\sqrt{2\mu} + z)\sqrt{n} + (2\mu)^{1/4} n^{7/24} p_r^{-5/12}\},$$

$$N_3 = \{N: (\sqrt{2\mu} + z)\sqrt{n} + (2\mu)^{1/4} n^{7/24} p_r^{-5/12} < N \leq n^{2/3}\},$$

$$N_4 = \{N: n^{2/3} < N \leq n - kr\}.$$

Основной вклад в сумму, стоящую в правой части (4), дает слагаемое S_2 . Из теоремы 4 следует, что

$$S_2 = p_r e^{-z^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{N_2} \mathbf{P}\{\lambda_r(\mathcal{F}) = k\} (1 + o(1)). \quad (6)$$

Известно (см. [1]), что $p_r(x) = p_r(1 + o(1))$ и $\sigma_{rr}^2 = p_r(1 - p_r)(1 + o(1))$ при фиксированном r в области $n/N \rightarrow \infty$, где p_r определена в (1). Тогда из теоремы 3.1.2 [3] и соотношения (6) находим, что

$$S_2 = p_r e^{-z^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{N_2} \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi N p_r(1 - p_r)}} \exp \left\{ -\frac{(k - N p_r)^2}{N p_r(1 - p_r)} \right\}. \quad (7)$$

Полагая

$$N = (z + \sqrt{2\pi})\sqrt{n} + y(2\mu n)^{1/4} \sqrt{(1 - p_r)/p_r},$$

из (7) нетрудно получить, что

$$S_2 = (1 + o(1)) \frac{e^{-z^2}}{\pi \sqrt{2}} \sum_y \sqrt{\frac{p_r}{1 - p_r}} \frac{1}{(2\mu n)^{1/4}} e^{-y^2},$$

где суммирование по y осуществляется в области $|y| \leq n^{1/24} p_r^{1/12} / \sqrt{1 - p_r}$ с шагом $(2\mu n)^{-1/4} \sqrt{p_r/(1 - p_r)}$. Заменяя суммирование интегрированием, находим, что

$$S_2 = (1 + o(1)) \frac{e^{-z^2}}{\pi \sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} (1 + o(1)).$$

Рассмотрим сумму S_3 . Обозначим через $\lambda^{(n)}$ число циклических точек отображения множества объема n в себя (без ограничения на число циклов), а через χ_N — случайную величину, равную числу циклов в случайной подстановке степени N . В [3] показано, что

$$\mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} = \frac{\mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{\chi_N = m\}}{\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\}}. \quad (8)$$

Тогда

$$S_3 = p_r \sqrt{n} \sum_{N_3} \frac{\mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{\chi_N = m\}}{\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\}} \mathbf{P}\{\lambda_r(\mathcal{F}) = k\} (1 + o(1)). \quad (9)$$

Из теоремы 4.2.6 из [6] следует, что

$$\mathbf{P}\{\chi_N = m\} \leq C_3 \left(\ln \left(\frac{N}{m} \ln \frac{N}{m} \right) \right)^{m-1} \sqrt{\ln \frac{N}{m}} \exp \left\{ \frac{m}{\ln(N/m)} \right\} ((m-1)! N \sqrt{n})^{-1}, \quad (10)$$

а из теоремы 5 вытекает, что

$$\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\} \geq C_4 \frac{e^{\beta/2 - \gamma_1} \beta^\mu (\ln(\alpha \ln \alpha))^{m-1}}{\sqrt{n \beta} (m-1)!}, \quad (11)$$

где β и μ определены в (1), а γ_1 определена в формулировке теоремы 5.

Обозначим через $\xi_1, \dots, \xi_N$ независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение вероятностей $\mathbf{P}\{\xi_1 = j\} = p_j$, $j = 0, 1, \dots$, где величины p_j определены в (1). Через $\xi_i^{(r)}$, $i = 1, \dots, N$, $r = 0, 1, \dots$, обозначим независимые случайные величины, распределения которых задаются вероятностями $\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)} = j\} = \mathbf{P}\{\xi_i = j \mid \xi_i \neq r\}$. Обозначим также $\nu = \xi_1 + \dots + \xi_N$, $\xi_s^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_s^{(r)}$. Согласно лемме 3.1.1 из [3],

$$\mathbf{P}\{\lambda_r(F) = k\} = \binom{N}{k} p_r^k(x) (1 - p_r(x))^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\xi_{N-k}^{(r)} = n - k(r+1)\}}{\mathbf{P}\{\nu = n\}}. \quad (12)$$

Из (1) и (2) нетрудно видеть, что при $N/n \rightarrow 0$

$$p_r(x) = p_r \exp \left\{ \frac{N}{n} + O \left(\frac{rN^2}{n^2} \right) \right\} = p_r \left(1 + \frac{N}{n} + O \left(\frac{rN^2}{n^2} \right) \right). \quad (13)$$

Из леммы 5 из [1] находим, что

$$\mathbf{P}\{\nu = n\} = \frac{N}{\sqrt{2\pi(n-N)n}} (1 + o(1)). \quad (14)$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi_{N-k}^{(r)} = n - k(r+1)\}}{\mathbf{P}\{\nu = n\}} \leq C_5 \frac{n^{3/2}}{N}. \quad (15)$$

Кроме того, известно (см., например, [7]), что

$$\mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \leq N/n. \quad (16)$$

Из соотношений (9), (11)–(16) получаем, что

$$S_3 \leq C_6 n p_r e^{m+\beta-\gamma_1} \beta^{-\mu} \sum_{N_3} \binom{N}{k} p_r^k(x) (1 - p_r(x))^{N-k}.$$

Нетрудно показать, что выражение $\binom{N}{k} p_r^k(x) (1 - p_r(x))^{N-k}$ монотонно убывает при $N > k/p_r(x)$. Обозначим

$$N_0 = (\sqrt{2\mu} + z)\sqrt{n} + (2\mu)^{1/4} n^{7/24} p_r^{-5/12}.$$

Поскольку $N_0 < N$ при $N \in N_3$ и $N_0 > k/p_r(x)$, используя нормальное приближение для биномиального распределения, находим, что

$$\begin{aligned} S_3 &\leq C_7 n p_r e^{m+\beta/2+\gamma_1} \beta^{-\mu} \sum_{N_3} \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 p_r(x)(1-p_r(x))}} \exp \left\{ -\frac{(k - N_0 p_r(x))^2}{2N_0 p_r(x)(1-p_r(x))} \right\} \\ &\leq C_7 n^{5/3} p_r e^{m+\beta/2+\gamma_1} \beta^{-\mu} \frac{1}{(\sqrt{2\mu n} p_r)^{1/2}} \exp \{ -C_8 n^{1/12} p_r^{1/6} \} \\ &= C_7 \exp \{ -C_8 n^{1/12} p_r^{1/6} (1 + o(1)) \} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Для оценки суммы S_4 используем неравенство, полученное при доказательстве теоремы 5 (см.[5]):

$$\frac{\sum_{N_4} \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{\chi_N = m\}}{\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\}} \leq \sqrt{n} \exp\{-C_9 n^{1/3}(1 + o(1))\}.$$

Отсюда следует, что

$$S_4 \leq p_r \sqrt{n} \sum_{N_4} \frac{\mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{\chi_N = m\}}{\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\}} \rightarrow 0.$$

Рассмотрим S_1 . Из (5), (12), (13) и (15) находим, что

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \frac{n^2 p_r}{k} \sum_{N_1} \binom{N}{k} p_r^k(x) (1 - p_r(x))^{N-k} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \\ &\leq C_{10} \frac{n^2 p_r}{k} \sum_{N_1} \binom{N}{k} p_r^k \exp\left\{\frac{kN}{n}\right\} (1 - p_r)^{N-k} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что выражение $\binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k}$ возрастает при $N < k/p_r$, нетрудно показать, что

$$S_1 \leq C_{10} \frac{n^{3/2} p_r}{\sqrt{2\mu}} \binom{N_0}{k} (1 - p_r)^{N_0-k} p_r^k \exp\left\{k \sqrt{\frac{2\mu}{n}}\right\} \sum_{N_1} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\},$$

где

$$N_0 = (\sqrt{2\mu} + z) \sqrt{n} - (2\mu)^{1/4} n^{7/12} p_r^{-5/12}.$$

Тогда, используя нормальное приближение для биномиального распределения, находим, что $S_1 \rightarrow 0$, что завершает доказательство теоремы 1 для первого случая.

Рассмотрим второй случай. Из (1) легко показать, что в этом случае

$$\gamma = 1 + o(1).$$

Отсюда и из (3) находим, что

$$\begin{aligned} \gamma p_r \sqrt{n} \mathbf{P}\{\lambda_r^{(n,m)} = k\} &= p_r \sqrt{n} \sum_{N=k}^{n-kr} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = k\} \mathbf{P}\{\lambda_r(F) = k\} (1 + o(1)) \\ &= \sum_{i=1}^7 S_i (1 + o(1)), \end{aligned} \tag{17}$$

где S_i , $i = 1, 2, \dots, 7$, определены в (5), а области суммирования N_1 – N_7 имеют вид

$$\begin{aligned} N_1 &= \{N: k \leq N < \beta^{1/2-\delta} \sqrt{n}\}, \\ N_2 &= \{N: \beta^{1/2-\delta} \sqrt{n} \leq N < (\sqrt{2\mu} - A) \sqrt{n}\}, \\ N_3 &= \{N: (\sqrt{2\mu} - A) \sqrt{n} \leq N < (\sqrt{2\mu} + z) \sqrt{n} - (2\mu)^{1/4} n^{7/24} p_r^{-5/12}\}, \\ N_4 &= \{N: (\sqrt{2\mu} + z) \sqrt{n} - (2\mu)^{1/4} n^{7/24} p_r^{-5/12} \leq N \leq (\sqrt{2\mu} + z) \sqrt{n} \\ &\quad + (2\mu)^{1/4} n^{7/24} p_r^{-5/12}\}, \\ N_5 &= \{N: (\sqrt{2\mu} + z) \sqrt{n} + (2\mu)^{1/4} n^{7/24} p_r^{-5/12} < N < \beta \sqrt{n}\}, \\ N_6 &= \{N: \beta \sqrt{n} \leq N < n^{2/3}\}, \\ N_7 &= \{N: n^{2/3} \leq N \leq n - kr\}; \end{aligned}$$

выбор постоянных δ и A будет ясен из дальнейшего.

Основной вклад в сумму, стоящую в правой части соотношения (17), вносит слагаемое S_4 . Из теоремы 4 следует, что

$$S_4 = p_r \sqrt{n} \sum_{N_4} \left(\frac{N}{\sqrt{n}} \right)^{2\mu} \exp \left\{ -\frac{N^2}{2n} + \frac{\beta}{2} \right\} \beta^{-\mu} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \mathbf{P}\{\lambda_r(\mathcal{F}) = k\} (1 + o(1)).$$

Используя соотношения (1), нетрудно получить, что при $N \in N_4$ выполняется соотношение

$$S_4 = p_r e^{-z^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{N_4} \mathbf{P}\{\lambda_r(\mathcal{F}) = k\} (1 + o(1)).$$

В [3] показано (см. доказательство теоремы 5.2.2), что утверждение теоремы 6 остается верным равномерно относительно $(k - Np_r(x))/(Np_r(x))^{7/12}$ в любом конечном интервале. Используя (13), нетрудно проверить выполнение условий теоремы 6, тогда

$$S_4 = \frac{p_r e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{N_4} \frac{1 + o(1)}{k!} (Np_r(x))^k \exp\{-Np_r(x)\}.$$

Отсюда и из (13), используя явный вид k , получаем, что

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{p_r e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{N_4} \frac{1 + o(1)}{k!} (Np_r)^k \exp\{-Np_r\} \\ &= \frac{p_r e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{N_4} \frac{1 + o(1)}{((z\gamma\sqrt{n} + \sqrt{2\mu n})p_r)!} (Np_r)^{(z\gamma\sqrt{n} + \sqrt{2\mu n})p_r} \exp\{-Np_r\}. \end{aligned}$$

Применяя формулу Стирлинга, и полагая

$$N = (\sqrt{2\mu} + z) \sqrt{n} + y(2\mu n)^{1/4} \sqrt{(1 + p_r)/p_r},$$

находим, что

$$S_4 = \frac{p_r e^{-z^2}}{\pi} \sum_y \exp \left\{ -\frac{y^2(1 - p_r)}{2(1 + z\gamma/\sqrt{2\mu})} \right\} \frac{(1 + o(1))}{\sqrt{2(\sqrt{2\mu n} + z\gamma\sqrt{n})p_r}},$$

где суммирование по y осуществляется в области $|y| \leq n^{1/24} p_r^{1/12} / \sqrt{1-p_r}$ с шагом $(2\mu n)^{-1/4} \sqrt{p_r/(1-p_r)}$. Заменяя суммирование интегрированием, получаем, что

$$S_4 = \frac{e^{-z^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt (1 + o(1)) = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} (1 + o(1)).$$

Оценим сумму S_5 . Согласно лемме 5.2.2 из [3],

$$\mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} = \frac{N}{n} e^{-N^2/(2n)} (1 + o(1)), \quad (18)$$

а из леммы 3.2.2 из [3] следует, что

$$\mathbf{P}\{\xi_{N-k}^{(r)} = n - k(r+1)\} \leq C_{11} N/n^{3/2}. \quad (19)$$

Тогда, используя нормальное приближение для биномиального распределения, из соотношений (5), (8), (10)–(12), (14), (18), (19) получаем, что

$$\begin{aligned} S_5 &= \sqrt{n} p_r \sum_{N_5} \frac{\mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{x_N = m\}}{\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\}} \mathbf{P}\{\lambda_r(F) = k\} \\ &\leq C_{12} p_r \sqrt{n} \sum_{N_5} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-N^2/(2n)} \left(\frac{\ln((N/m) \ln(N/m))}{\ln(\alpha \ln \alpha)} \right)^{m-1} \frac{\sqrt{\beta \ln(N/m)}}{\sqrt{m}} \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{m}{\ln(N/m) - \beta/2 + \gamma_1} \right\} \beta^{-\mu} (2\pi N p_r(x)(1-p_r(x)))^{-1/2} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{(k - N p_r(x))^2}{N p_r(x)(1-p_r(x))} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (13) нетрудно видеть, что при $N \in N_5$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi N p_r(x)(1-p_r(x))}} \exp \left\{ -\frac{(k - N p_r(x))^2}{N p_r(x)(1-p_r(x))} \right\} \\ &\leq C_{13} \frac{1}{\sqrt{2\pi N p_r(1-p_r)}} \exp \left\{ -C_{14} \frac{(k - N p_r)^2}{N p_r(1-p_r)} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Кроме того, при доказательстве теоремы 5 (см. [5]) было получено, что при $y = N/\sqrt{n}$, $N \in N_5$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\ln(N/m \ln(N/m))}{\ln(\alpha \ln \alpha)} \right)^{m-1} \frac{\sqrt{\beta \ln(N/m)}}{\sqrt{m}} \exp \left\{ \frac{m}{\ln(N/m) - \beta/2} \right\} \\ &= \exp \left\{ \beta/2 - \frac{m \ln^2 y}{2 \ln^2(\sqrt{n}/m)} \right\} y^{\beta(1-\ln \alpha/\ln \alpha)} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (22)$$

Сделав необходимые преобразования, из (20)–(22) можно получить, что $S_5 \rightarrow 0$.

Рассмотрим слагаемое S_6 . Из (5), (8), (10)–(14) и леммы 3.2.2 из [3] следует, что

$$\begin{aligned} S_6 &\leq C_{15} p_r \sum_{N_6} \left(\frac{\ln(N/m \ln(N/m))}{\ln(\alpha \ln \alpha)} \right)^{m-1} \sqrt{\frac{\beta \ln(N/m)}{m}} \exp \left\{ \frac{m}{\ln(N/m) - \beta/2} \right\} \\ &\quad \times \beta^{-\mu} e^{\gamma_1} e^{-N^2/(2n)} \binom{N}{k} p_r^k(x) (1-p_r(x))^{N-k}. \end{aligned}$$

При каждом фиксированном значении $p_r(x)$ выражение $\binom{N}{k} p_r^k(x) (1 - p_r(x))^{N-k}$ убывает при $N > k/p_r(x)$. Поэтому

$$S_6 \leq C_{15} p_r \sum_{N_6} \left(\frac{\ln(N/m \ln(N/m))}{\ln(\alpha \ln \alpha)} \right)^{m-1} \frac{\beta \ln(N/m)}{m} \exp \left\{ \frac{m}{\ln(N/m)} - \frac{\beta}{2} + \gamma_1 \right\} \\ \times \beta^{-mu} e^{-N^2/(2n)} \binom{N_0}{k} p_r^k(x) (1 - p_r(x))^{N_0-k}, \quad (23)$$

где

$$N_0 = (\sqrt{2\mu} + z)\sqrt{n} + (2\mu)^{1/4} n^{7/24} p_r^{-5/12}.$$

Обозначая $y = N/\sqrt{n}$, нетрудно показать, что при $N \in N_6$

$$\left(\frac{\ln(N/m \ln(N/m))}{\ln(\alpha \ln \alpha)} \right)^{m-1} \sqrt{\frac{\beta \ln(N/m)}{m}} \leq y^\beta, \quad \exp \left\{ \frac{m}{\ln(N/m)} \right\} \leq e^\beta.$$

Отсюда и из (23), используя нормальное приближение биномиального распределения, находим, что

$$S_6 \leq C_{15} p_r (\sqrt{2\mu n} p_r)^{-1/2} \exp\{-C_{16} n^{1/12} p_r^{1/6} + \beta/2 + \gamma_1\} \beta^{-\mu} \sum_{\beta < y < n^{1/6}} y^\beta e^{-y^2/2}. \quad (24)$$

Нетрудно показать, что при $\beta \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\beta < y < n^{1/6}} y^\beta e^{-y^2/2} \leq \int_{\beta}^{\infty} \exp\{-C_{17} y^2\} dy \rightarrow 0.$$

Отсюда и из (24) следует, что $S_6 \rightarrow 0$.

Оценим сумму S_7 . При доказательстве теоремы 5 было показано (см. [5]), что

$$\frac{\sum_{N_7} \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{x_N = m\}}{\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\}} \leq C_{18} \sqrt{n} \beta^{-\mu} \exp \left\{ -\frac{n^{1/3}}{2} + m + \frac{\beta}{2} + \gamma_1 \right\}.$$

Тогда

$$S_7 = p_r \sqrt{n} \sum_{N_7} \frac{\mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{x_N = m\}}{\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\}} \mathbf{P}\{\lambda_r(F) = k\} \\ \leq p_r \sqrt{n} \sum_{N_7} \frac{\mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{x_N = m\}}{\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\}} \rightarrow 0.$$

Рассмотрим S_3 . Из теоремы 4, соотношений (5), (12)–(14) и (18), учитывая, что выра-

жение $\binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k}$ при $N \in N_3$ возрастает, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} S_3 &\leq p_r \sqrt{n} e^{\beta/2} \beta^{-\mu} \sum_{N_5} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{N}{\sqrt{n}} \right)^{2\mu} e^{-N^2/(2n)} \binom{k}{N} p_r^k(x) (1 - p_r(x))^{N-k} \\ &\leq C_{19} p_r \exp\{\beta/2 + C_{20} 2\mu p_r\} \beta^{-\mu} \binom{N_0}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N_0-k} \sum_{N_5} \left(\frac{N}{\sqrt{n}} \right)^{2\mu} e^{-N^2/(2n)} \\ &\leq C_{19} p_r \sqrt{n} \beta^{-\mu} \binom{N_0}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N_0-k} \exp\{\beta/2 + C_{20} 2\mu p_r\} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\sqrt{2\mu}-A \leq y \leq \sqrt{2\mu}+A} y^{2\mu} e^{-y^2/2}, \end{aligned}$$

где

$$N_0 = (\sqrt{2\mu} + z) \sqrt{n} - n^{7/24} (2\mu)^{1/4} p_r^{-5/12}, \quad y = N/\sqrt{n}.$$

Заменяя суммирование интегрированием по $t = N/\sqrt{n} - \sqrt{2\mu}$, получаем, что при достаточно большом A

$$S_3 \leq C_{21} p_r \sqrt{n} \binom{N_0}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N_0-k} e^{C_{20} 2\mu p_r}.$$

Тогда, применяя нормальное приближение биномиального распределения, нетрудно показать, что S_3 стремится к нулю. Аналогично оценке S_3 можно получить, что $S_2 \rightarrow 0$.

Осталось рассмотреть сумму S_1 . Если $\beta \asymp \ln n$, то, применяя результаты, полученные при доказательстве теоремы 5 (см. [5]), легко найти, что при достаточно малом δ

$$S_1 \leq p_r \sqrt{n} \frac{\sum_{N_1} \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{x_N = m\}}{\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\}} \leq \exp\{\ln(\sqrt{n} p_r) - C_{22} \beta \ln \beta\} \rightarrow 0.$$

Если $\beta = o(\ln n)$, то разобьем область суммирования N_1 на три части:

$$\begin{aligned} N_1^{(1)} &= \{N: k \leq N < \varepsilon_1 \sqrt{n}\}, \\ N_1^{(2)} &= \{N: \varepsilon_1 \sqrt{n} \leq N < (\ln \beta) \sqrt{n}\}, \\ N_1^{(3)} &= \{N: (\ln \beta) \sqrt{n} \leq N < \beta^{1/2-\delta} \sqrt{n}\}, \end{aligned}$$

выбор положительной постоянной ε_1 будет ясен из дальнейшего, а соответствующие суммы обозначим через $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ и $S_1^{(3)}$.

Из соотношений (5), (12)–(14) и (19) нетрудно найти, что

$$\begin{aligned} S_1^{(3)} &\leq C_{23} p_r \sqrt{n} \sum_{N_1^{(3)}} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \binom{N}{k} p_r^k(x) (1 - p_r(x))^{N-k} \\ &\leq C_{24} p_r \sqrt{n} \sum_{N_1^{(3)}} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \binom{N}{k} p_r^k \exp\{kN/n\} (1 - p_r)^{N-k}. \end{aligned}$$

Поскольку выражение $\binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k}$ возрастает при $N < k/p_r$, то при достаточно малом δ

$$S_1^{(3)} \leq C_{25} \sqrt{n} p_r \binom{N_0}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N_0-k} \exp\{C_{26} \mu p_r\},$$

где

$$N_0 = (\sqrt{2\mu} + z) \sqrt{n} - (2\mu)^{1/4} n^{7/24} p_r^{-5/12}.$$

Тогда, используя нормальное приближение биномиального распределения, легко получить, что $S_1^{(3)} \rightarrow 0$.

Следуя рассуждениям, приведенным для оценки $S_1^{(3)}$, нетрудно показать, что при достаточно малом ε_1 суммы $S_1^{(2)}$ и $S_1^{(1)}$ стремятся к нулю, при этом для оценки $S_1^{(2)}$ применяют лемму 3 из [1], а для $S_1^{(1)}$ — леммы 3.3.1, 3.3.2, 2.3.3 и 2.3.4 из [3], что и завершает доказательство теоремы 1 для второго случая.

Рассмотрим третий случай. Вероятность $\mathbf{P}\{\lambda_r^{(n,m)} = k\}$ можно представить в виде суммы (17), где S_i , $i = 1, \dots, 7$, определены в (5), а

$$\begin{aligned} N_1 &= \{N: k \leq N < \beta^{1/2-\delta} \sqrt{n}\}, \\ N_2 &= \{N: \beta^{1/2-\delta} \sqrt{n} \leq N < (\sqrt{2\mu} - A) \sqrt{n}\}, \\ N_3 &= \{N: (\sqrt{2\mu} - A) \sqrt{n} \leq N < (\sqrt{2\mu} + z) \sqrt{n} - n^{7/24} p_r^{-5/12} (2\mu)^{1/4} (\ln \mu)^{-1}\}, \\ N_4 &= \{N: (\sqrt{2\mu} + z) \sqrt{n} - n^{7/24} p_r^{-5/12} (2\mu)^{1/4} (\ln \mu)^{-1} \leq N \leq (\sqrt{2\mu} + z) \sqrt{n} \\ &\quad + n^{7/24} p_r^{-5/12} (2\mu)^{1/4} (\ln \mu)^{-1}\}, \\ N_5 &= \{N: (\sqrt{2\mu} + z) \sqrt{n} + n^{7/24} p_r^{-5/12} (2\mu)^{1/4} (\ln \mu)^{-1} < N < \beta \sqrt{n}\}, \\ N_6 &= \{N: \beta \sqrt{n} \leq N < n^{2/3}\}, \\ N_7 &= \{N: n^{2/3} \leq N \leq n - kr\}; \end{aligned}$$

выбор положительных постоянных δ и A будет ясен из дальнейшего.

Основной вклад в сумму, стоящую в правой части соотношения (17), вносит слагаемое S_4 . Нетрудно показать, что при $N \in N_4$ можно использовать теоремы 4 и 6. Аналогично тому, как это было сделано для суммы S_4 во втором случае, находим, что

$$S_4 = \frac{p_r e^{-z^2}}{\pi} \sum_y \exp \left\{ -\frac{y^2(1 - p_r)}{2(1 + z\gamma/\sqrt{2\mu})} \right\} \frac{1}{\sqrt{2p_r(\sqrt{2\mu} + z\gamma)\sqrt{n}}} (1 + o(1));$$

суммирование в последней сумме осуществляется с шагом $(2\mu n)^{-1/4} \sqrt{p_r/(1 - p_r)}$ по области $|y| \leq n^{1/24} p_r^{1/12} / (\sqrt{1 - p_r} \ln \mu)$. Заменяя суммирование интегрированием, получаем, что

$$S_4 = e^{-z^2} \frac{(1 + o(1))}{\sqrt{\pi}}.$$

Оценка сумм S_1 , S_2 , S_5 – S_7 проводится аналогично оценкам S_1 , S_2 , S_5 – S_7 , приведенным в доказательстве второго случая.

Рассмотрим S_3 . Рассуждая так же, как и при оценивании S_3 в предыдущем случае, находим, что при достаточно большом A

$$S_3 \leq C_{27} p_r \sqrt{n} \binom{N_0}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N_0-k},$$

где

$$N_0 = (\sqrt{2\mu} + z)\sqrt{n} - n^{7/24}(2\mu)^{1/4}p_r^{-5/12}\ln^{-1}\mu.$$

Отсюда, используя нормальное приближение биномиального распределения, легко получить, что $S_3 \rightarrow 0$, значит, и для третьего случая утверждение теоремы 1 доказано.

Докажем справедливость теоремы 1 для четвертого случая. Учитывая, что в этом случае $\gamma = 1 + o(1)$, вероятность $\mathbf{P}\{\lambda_r^{(n,m)} = k\}$ можно представить в виде

$$\gamma p_r \sqrt{n} \mathbf{P}\{\lambda_r^{(n,m)} = k\} = \sum_{i=1}^6 S_i (1 + o(1)), \quad (25)$$

где S_i , $i = 1, \dots, 6$, определены в (5), а

$$\begin{aligned} N_1 &= \{N: \beta^{1/2-\delta}\sqrt{n} \leq N < \sqrt{2\mu n} + z\sqrt{n} - (2\mu n)^{7/24}p_r^{-5/12}\}, \\ N_2 &= \{N: \sqrt{2\mu n} + z\sqrt{n} - (2\mu n)^{7/24}p_r^{-5/12} \leq N < \sqrt{2\mu n} + z\sqrt{n} \\ &\quad - (2\mu)^{5/24}n^{7/24}p_r^{-5/12}\}, \\ N_3 &= \{N: \sqrt{2\mu n} + z\sqrt{n} - (2\mu)^{5/24}n^{7/24}p_r^{-5/12} \leq N \leq \sqrt{2\mu n} + z\sqrt{n} \\ &\quad + (2\mu)^{5/24}n^{7/24}p_r^{-5/12}\}, \\ N_4 &= \{N: \sqrt{2\mu n} + z\sqrt{n} + (2\mu)^{5/24}n^{7/24}p_r^{-5/12} < N \leq \sqrt{2\mu n} + z\sqrt{n} \\ &\quad + (2\mu n)^{7/24}p_r^{-5/12}\}, \\ N_5 &= \{N: \sqrt{2\mu n} + z\sqrt{n} + (2\mu n)^{7/24}p_r^{-5/12} < N \leq \beta^{1/2+\delta}\sqrt{n}\}, \\ N_6 &= \{N: N \notin N_i, i = 1, \dots, 5\}; \end{aligned}$$

выбор положительной постоянной δ будет ясен из дальнейшего.

Основной вклад в сумму, стоящую в правой части равенства (25), вносит слагаемое S_3 . Из теорем 4 и 7, соотношений (1), (5) и (13) можно получить, что

$$\begin{aligned} S_3 &= p_r \sqrt{n} \sum_{N_3} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \mathbf{P}\{\lambda_r(\mathcal{F}) = k\} \\ &= p_r \sqrt{n} \sum_{N_3} \frac{1}{k!} (N p_r(x))^k \exp\{-N p_r(x)\} \frac{(N/\sqrt{n})^{2\mu} e^{-N^2/(2n)} \beta^{-\mu} e^{\beta/2}}{\sqrt{\pi n}} (1 + o(1)) \\ &= p_r e^{-z^2} \frac{1 + o(1)}{\sqrt{\pi}} \sum_{N_3} \frac{1}{k!} (N p_r)^k \exp\{-N p_r\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Положим

$$N = (\sqrt{2\mu} + z)\sqrt{n} + y(2\mu n)^{1/4} \sqrt{(1 - p_r)/p_r}.$$

Используя явный вид k и формулу Стирлинга, из (26) находим, что

$$S_3 = p_r e^{-z^2} \frac{1 + o(1)}{\sqrt{\pi}} \sum_y \exp\left\{-\frac{y^2(1 - p_r)}{2(1 + z\gamma/\sqrt{2\mu})}\right\} \frac{1}{\sqrt{2p_r(\sqrt{2\mu} + z\gamma)\sqrt{n}}},$$

где суммирование по y осуществляется в области $|y| \leq n^{1/24}(2\mu)^{1/24}p_r^{1/12}$ с шагом $(2\mu n)^{1/4}\sqrt{p_r/(1-p_r)}$. Заменяя суммирование интегрированием, получаем, что

$$S_3 = e^{-z^2} \frac{1 + o(1)}{\sqrt{\pi}}.$$

Нетрудно проверить, что в области N_2 условия теоремы 6 выполнены. Из этой теоремы и соотношений (5), (13), учитывая, что функция $f(N) = (Np_r)^k \exp\{-Np_r\}$ в области N_2 возрастает, несложно найти следующую оценку для S_2 :

$$\begin{aligned} S_2 &= p_r \sqrt{n} \sum_{N_2} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \frac{1}{k!} (Np_r)^k \exp\{-Np_r\} (1 + o(1)) \\ &\leq C_{28} \left(\frac{p_r \sqrt{n}}{2\pi \sqrt{2\mu}} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (2\mu)^{-1/12} n^{1/12} p_r^{1/6} \right\} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

поскольку, согласно условиям теоремы, $p_r \sqrt{n/(2\mu)} \rightarrow \infty$.

Оценка суммы S_1 проводится аналогично оценке S_2 , с использованием того, что функция $f(N)$ в области N_1 убывает.

Оценим сумму S_4 . Из теорем 4 и 6 и соотношений (5), (13) нетрудно получить, что при выполнении условий теоремы

$$\begin{aligned} S_4 &= p_r \sqrt{n} \sum_{N_4} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \frac{1}{k!} (Np_r(x))^k \exp\{-Np_r(x)\} (1 + o(1)) \\ &= p_r \sqrt{n} \sum_{N_4} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \frac{1}{k!} (Np_r)^k \exp\{-Np_r\} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Отсюда, используя формулу Стирлинга, находим, что

$$\begin{aligned} S_4 &\leq p_r \sqrt{n} (k!)^{-1} (k + (2\mu)^{5/24} n^{7/24} p_r^{7/12})^k \exp\{-(k + (2\mu)^{5/24} n^{7/24} p_r^{7/12})\} \\ &\leq \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \exp \left\{ \frac{b^{1/6}}{2} (1 + o(1)) \right\} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим слагаемое S_5 . Из соотношений (5), (12)–(14) и леммы 3.2.2 из [3] следует, что

$$\begin{aligned} S_5 &\leq p_r \sqrt{n} \sum_{N_5} \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \binom{N}{k} p_r^k(x) (1 - p_r(x))^{N-k} \\ &\leq C_{27} p_r \sqrt{n} \sum_{N_5} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \binom{N}{k} p_r^k \exp\{kN/n\} (1 - p_r)^{N-k}. \end{aligned}$$

Выражение $\binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k}$ при $N > k/p_r$ убывает. Тогда, применяя нормальное приближение биномиального распределения, получаем, что

$$\begin{aligned} S_5 &\leq C_{29} p_r \sqrt{n} \binom{N_0}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N_0-k} \exp\{C_{30} \beta^{1+\delta} p_r\} \\ &\leq C_{31} (p_r \sqrt{n/(2\mu)})^{1/2} \exp\{-C_{31} (\mu n)^{1/12} p_r^{1/6}\} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Осталось рассмотреть сумму S_6 :

$$\begin{aligned} S_6 &= p_r \sqrt{n} \sum_{N_6} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \mathbf{P}\{\lambda_r(F) = k\} \leq \mu^{9/5} \sum_{N_6} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \\ &= \mu^{9/5} \frac{\sum_{N_6} \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{\chi_N = m\}}{\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\}}. \end{aligned} \quad (27)$$

В доказательстве теоремы 5 (см. [5]) показано, что при достаточно малом δ

$$\frac{\sum_{N_6} \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{\chi_N = m\}}{\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\}} \leq \sqrt{n} \exp\{-C_{31} n^{1/3}\}.$$

Отсюда и из (27) следует, что $S_6 \rightarrow 0$. Значит, и для четвертого случая утверждение теоремы 1 остается верным.

Докажем справедливость теоремы 1 для пятого случая. Представим вероятность $\mathbf{P}\{\lambda_r^{(n,m)} = k\}$ в виде суммы (25), где

$$S_i = \gamma p_r \sqrt{n} \sum_{N_i} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \mathbf{P}\{\lambda_r(\mathcal{F}) = k\}, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (28)$$

$$N_1 = \{N: \beta^{1/2-\delta} \sqrt{n} \leq N < \sqrt{2\mu n} - (2\mu n)^{7/24} p_r^{-5/12}\},$$

$$N_2 = \{N: \sqrt{2\mu n} - (2\mu n)^{7/24} p_r^{-5/12} \leq N < \sqrt{2\mu n} - A\sqrt{n}\},$$

$$N_3 = \{N: \sqrt{2\mu n} - A\sqrt{n} \leq N \leq \sqrt{2\mu n} + A\sqrt{n}\},$$

$$N_4 = \{N: \sqrt{2\mu n} + A\sqrt{n} < N < \sqrt{2\mu n} + (2\mu n)^{7/24} p_r^{-5/12}\},$$

$$N_5 = \{N: \sqrt{2\mu n} + (2\mu n)^{7/24} p_r^{-5/12} < N \leq \beta^{1/2+\delta} \sqrt{n}\},$$

$$N_6 = \{N: N \notin N_i, i = 1, \dots, 5\};$$

выбор положительной постоянной A будет ясен из дальнейшего.

Основной вклад в сумму, стоящую в правой части соотношения (25), дает слагаемое S_3 .

Положим $y = N/\sqrt{n}$. Из теорем 4 и 6 и соотношений (1), (13), (28) нетрудно получить, что

$$S_3 = \frac{(p_r \sqrt{n})^k p_r \beta^{-\mu} e^{\beta/2} \gamma}{k! \sqrt{\pi}} \sum_{|y - \sqrt{2\mu}| \leq A} \exp\left\{-\frac{y^2}{2} - y p_r \sqrt{n}\right\} y^{2\mu+k} (1 + o(1)).$$

Отсюда видно, что при достаточно большом A

$$S_3 = e^{-z^2} \frac{1 + o(1)}{\sqrt{\pi}}.$$

Из соотношений (12)–(14) и леммы 3.2.2 [3] находим, что

$$\begin{aligned} S_1 &= \gamma p_r \sqrt{n} \sum_{N_1} \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{\lambda_r(F) = k\} \\ &\leq C_{34} \gamma p_r \sqrt{n} \sum_{N_1} \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \binom{N}{k} (p_r(x))^k (1 - p_r(x))^{N-k} \\ &\leq C_{34} \gamma p_r \sqrt{n} \sum_{N_1} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \binom{N}{k} p_r^k \exp\{kN/n\} (1 - p_r)^{N-k}. \end{aligned}$$

Положим

$$N_0 = \sqrt{2\mu n} - (2\mu n)^{7/24} p_r^{-5/12}.$$

Выражение $\binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k}$ возрастает при $N \in N_1$. Учитывая, что в рассматриваемом случае γ ограничено, и используя нормальное приближение биномиального распределения, находим, что

$$\begin{aligned} S_1 &\leq C_{35} p_r \sqrt{n} \binom{N_0}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N_0-k} \exp\{C_{36} \mu p_r\} \\ &\leq C_{35} \left(\frac{p_r \sqrt{n}}{\sqrt{2\mu}} \right)^{1/2} \exp\{-C_{37} (\sqrt{2\mu n} p_r)^{1/6}\} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Из теоремы 6, соотношений (8), (13), (28), учитывая, что γ ограничено, а функция $f(x) = x^k e^{-x}$ возрастает при $x < k$, получаем оценку

$$\begin{aligned} S_2 &= \gamma p_r \sqrt{n} \sum_{N_2} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \frac{1}{k!} (N p_r)^k \exp\{-N p_r\} (1 + o(1)) \\ &\leq \frac{\gamma p_r \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi k}} \exp\left\{-\frac{A^2 (p_r \sqrt{n})^2}{2k}\right\} \sum_{N_2} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \\ &= \frac{\gamma p_r \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi k}} \exp\left\{-\frac{A^2 (p_r \sqrt{n})^2}{2k}\right\} \frac{\sum_{N_2} \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{x_N = m\}}{\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\}}. \end{aligned} \quad (29)$$

При доказательстве теоремы 5 (см. [5]) было показано, что

$$\frac{\sum_{N_2} \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{x_N = m\}}{\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\}} = o(1).$$

Отсюда и из (29) получаем, что $S_2 \rightarrow 0$.

Оценка суммы S_4 проводится аналогично оценке S_2 , учитывая, что в области N_4 функция $f(N) = (N p_r)^k e^{-N p_r}$ убывает. Оценки S_5 и S_6 совпадают с оценками S_5 и S_6 , соответственно, полученными при доказательстве четвертого случая. Следовательно, и для пятого случая утверждение теоремы 1 справедливо.

Докажем справедливость теоремы 1 для шестого случая. Вероятность $\mathbf{P}\{\lambda_r^{(n,m)} = k\}$ можно представить в виде (25), где S_i , $i = 1, \dots, 6$, определены в (28), а

$$\begin{aligned} N_1 &= \{N: \beta^{1/2+\delta} \sqrt{n} \leq N < \sqrt{2\mu n} - (2\mu n)^{7/24} p_r^{-5/12}\}, \\ N_2 &= \{N: \sqrt{2\mu n} - (2\mu n)^{7/24} \leq N < \sqrt{2\mu n} - A\sqrt{n}\}, \\ N_3 &= \{N: \sqrt{2\mu n} - A\sqrt{n} \leq N \leq \sqrt{2\mu n} + A\sqrt{n}\}, \\ N_4 &= \{N: \sqrt{2\mu n} + A\sqrt{n} < N \leq \sqrt{2\mu n} + (2\mu n)^{7/24} p_r^{-5/12}\}, \\ N_5 &= \{N: \sqrt{2\mu n} + (2\mu n)^{7/24} p_r^{-5/12} < N \leq \beta^{1/2+\delta} \sqrt{n}\}, \\ N_6 &= \{N: N \notin N_i, i = 1, \dots, 5\}; \end{aligned}$$

выбор положительной постоянной A будет ясен из дальнейшего.

Рассмотрим сумму S_3 . Из теорем 4 и 6 и соотношения (13), получаем, что

$$\begin{aligned} S_3 &= \gamma p_r \sqrt{n} \sum_{N_3} \frac{1}{k!} (N p_r(x))^k \exp\{-N p_r(x)\} \left(\frac{N}{\sqrt{n}}\right)^{2\mu} e^{-N^2/(2n)} \beta^{-\mu} e^{\beta/2} \frac{1+o(1)}{\sqrt{\pi n}} \\ &= \gamma p_r \sqrt{n} \sum_{N_3} \frac{1}{k!} (N p_r)^k \exp\left\{-N p_r - \frac{N^2}{2n} + \frac{\beta}{2}\right\} \left(\frac{N}{\sqrt{n}}\right)^{2\mu} \beta^{-\mu} \frac{1+o(1)}{\sqrt{\pi n}}. \end{aligned}$$

Полагая

$$t = N/\sqrt{n} - \sqrt{2\mu},$$

нетрудно найти, что

$$S_3 = \gamma(p_r \sqrt{n})^k p_r \beta^{-\mu} \exp\{-\mu \sqrt{2\mu n} p_r + \beta/2\} (2\mu)^{\mu+k/2} \frac{1}{k!} \sum_{|t| \leq A} \exp\{-t^2\} (1+o(1)).$$

Суммирование в последней сумме осуществляется с шагом $1/\sqrt{n}$. Переходя от суммирования к интегрированию, получаем, что при достаточно большом A

$$S_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} (1+o(1)).$$

Оценим S_1 . Из (12), (13) и (28) следует, что

$$\begin{aligned} S_1 &= \gamma p_r \sqrt{n} \sum_{N_1} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \mathbf{P}\{\lambda_r(\mathcal{F}) = k\} \\ &\leq C_{38} \gamma p_r \sqrt{n} \exp\left\{C_{39} \frac{2\mu n p_r}{n}\right\} \sum_{N_1} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \binom{N}{k} p_r^k (1-p_r)^{N-k}. \end{aligned}$$

Выражение $\binom{N}{k} p_r^k (1-p_r)^{N-k}$ при $N \in N_1$ возрастает. Положим

$$N_0 = \sqrt{2\mu n} - (2\mu n)^{7/24} p_r^{-5/12}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_1 &\leq C_{38} \gamma p_r \sqrt{n} \exp\{C_{39} 2\mu p_r\} \sum_{N_1} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \binom{N_0}{k} p_r^k (1-p_r)^{N_0-k} \\ &\leq C_{38} \gamma p_r \sqrt{n} \binom{N_0}{k} p_r^k (1-p_r)^{N_0-k} \exp\{C_{39} 2\mu p_r\}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя нормальное приближение биномиального распределения, легко показать, что $S_1 \rightarrow 0$.

Суммы S_2 и S_4 оцениваются так же, как S_2 в доказательстве четвертого случая. Функция $f(x) = x^k e^{-x}$ достигает максимального значения при $x = k$. Тогда, используя формулу Стирлинга, из соотношений (1), (8), (13), (28) и теоремы 6 находим, что

$$\begin{aligned} S_2 + S_4 &= \gamma p_r \sqrt{n} \sum_{N_2 \cup N_4} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \frac{1}{k!} (N p_r)^k e^{-N p_r} (1+o(1)) \\ &\leq \sum_{N_2 \cup N_4} \frac{\mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{x_N = m\}}{\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\}}. \end{aligned}$$

При доказательстве теоремы 5 (см. [5]) показано, что

$$\frac{\sum_{N_2 \cup N_4} \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{\chi_N = m\}}{\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\}} = o(1).$$

Следовательно, $S_2 + S_4 \rightarrow 0$.

Рассмотрим S_5 . Из (1), (8), (12)–(14), (28) и леммы 3.2.2 из [3], используя тот факт, что при $N \in N_5$ выражение $\binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k}$ убывает, находим, что

$$\begin{aligned} S_5 &= \gamma p_r \sqrt{n} \sum_{N_5} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \mathbf{P}\{\lambda_r(F) = k\} \\ &\leq C_{40} \frac{p_r \sqrt{n}}{\sqrt{b}} \sum_{N_5} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} \\ &\leq C_{40} \frac{p_r \sqrt{n}}{\sqrt{b}} \exp\{C_{38} \beta^{1+\delta} p_r\} \sum_{N_5} \binom{N_0}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} \mathbf{P}\{\lambda^{(N,m)} = N\}, \end{aligned}$$

где

$$N_0 = \sqrt{2\mu n} + (2\mu n)^{7/24} p_r^{-5/12}.$$

Тогда, используя нормальное приближение биномиального распределения, легко показать, что $S_5 \rightarrow 0$.

Сумма S_6 оценивается так же, как S_6 при доказательстве четвертого случая теоремы 1. Теперь теорема 1 доказана полностью.

Пусть выполнены условия теоремы 2. Вероятность $\mathbf{P}\{\lambda_r^{(n,m)} = k\}$ можно представить в виде суммы

$$\mathbf{P}\{\lambda_r^{(n,m)} = k\} = \sum_{N=m}^{n-kr} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \mathbf{P}\{\lambda_r(F) = k\} = S_1 + S_2, \quad (30)$$

где

$$S_i = \sum_{N_i} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} \mathbf{P}\{\lambda_r(F) = k\}, \quad i = 1, 2, \quad (31)$$

$$N_1 = \{N: \sqrt{2\mu n} - A\sqrt{n} \leq N \leq \sqrt{2\mu n} + A\sqrt{n}\}, \quad N_2 = \{N: N \notin N_1\};$$

выбор положительной постоянной A будет ясен из дальнейшего.

Рассмотрим сумму S_1 . Из теорем 4, 6 и соотношений (13), (30) получаем, что при выполнении условий теоремы 2

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{N_1} \frac{1}{k!} (N p_r(x))^k \exp\{-N p_r(x)\} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} (1 + o(1)) \\ &= \sum_{N_1} \frac{1}{k!} (N p_r)^k \exp\{-N p_r\} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} (1 + o(1)) \\ &= \frac{1}{k!} \theta^k e^{-\theta} \sum_{N_1} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} (1 + o(1)) \\ &= \frac{1 + o(1)}{k!} \theta^k e^{-\theta + \beta/2} \beta^{-\mu} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \sum_{N_1} \left(\frac{N}{\sqrt{n}}\right)^{2\mu} \exp\left\{-\frac{N^2}{2n}\right\}. \end{aligned}$$

Обозначим $t = N/\sqrt{n} - \sqrt{2\mu}$; нетрудно показать, что

$$S_1 = \frac{1}{k!} \theta^k e^{-\theta} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \sum_{-A \leq t \leq A} \exp\{-t^2\} (1 + o(1)).$$

Заменяя суммирование интегрированием, находим, что при достаточно большом A

$$S_1 = \frac{1}{k!} \theta^k e^{-\theta} (1 + o(1)). \quad (32)$$

Нетрудно показать, что $S_2 = o(1)$. Действительно,

$$S_2 \leq \sum_{N_2} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} = \frac{\sum_{N_2} \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{x_N = m\}}{\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\}} = o(1). \quad (33)$$

Последнее соотношение было получено при доказательстве теоремы 5 (см. [5]). Отсюда и из (32) следует справедливость теоремы 2.

Пусть выполнены условия теоремы 3. Вероятность $\mathbf{P}\{\lambda_r^{(n,m)} = k\}$ можно представить в виде (30), где S_i , $i = 1, 2$, определены в (31).

Из теорем 4 и 6 находим, что при $k = 0$

$$S_1 = (1 + o(1)) \sum_{N_1} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} = 1 + o(1),$$

а для суммы S_2 справедлива оценка (33). Отсюда вытекает утверждение теоремы 3.

Список литературы

1. Павлов Ю. Л., Предельные теоремы для числа деревьев заданного объема в случайном лесе. *Матем. сб.* (1977) **103**, №3, 392–403.
2. Павлов Ю. Л., Асимптотические распределения максимального объема дерева в случайном лесе. *Теория вероятностей и ее применения* (1977) **22**, №3, 523–533.
3. Павлов Ю. Л., *Случайные леса*. Петрозаводск, 1996.
4. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О., *Конкретная математика*. Мир, Москва, 1998.
5. Чеплюкова И. А., Один случай предельного распределения числа циклических вершин в случайном отображении. *Дискретная математика* (2004) **16**, №3, 76–84.
6. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2000.
7. Сачков В. И., *Вероятностные методы в комбинаторном анализе*. Наука, Москва, 1978.

Статья поступила 14.03.2005.