Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Черепанова, Скорость приближения распределения числа циклов заданной длины случайной подстановки с известным числом циклов к предельным законам, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 3, 61–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm59>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:14:35

Скорость приближения распределения числа циклов заданной длины случайной подстановки с известным числом циклов к предельным законам

© 2006 г. Е. В. Черепанова

Рассматривается множество $S_{n,N}$ всех различных подстановок степени n , имеющих N циклов, на котором задано равномерное распределение вероятностей. Для распределения числа циклов заданной длины случайной подстановки из $S_{n,N}$ получены оценки скорости сходимости к предельным распределениям, когда $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 1$ или $n/N \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05-01-00007-а, и программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ 1758.2003.1.

В [1] рассматривалась классическая схема размещения n частиц по N ячейкам и были получены предельные распределения случайной величины $\mu_r(n, N)$, равной числу ячеек, содержащих ровно по r частиц, при различном характере стремления n, N к бесконечности. В частности, доказано, что если $r \geq 2$ фиксировано и выполнено одно из условий $n/N \rightarrow 0$, $n^r/r! N^{r-1} \rightarrow \infty$ или $n/N \rightarrow \infty$, $E\mu_r(n, N) \rightarrow \infty$, то распределения $\mu_r(n, N)$ сближаются одновременно с нормальным законом и распределением Пуассона. В указанных областях изменения параметров n, N получены оценки близости распределения $\mu_r(n, N)$ к этим законам, и указано, какое приближение является более точным в зависимости от значения параметра n/N . Аналогичная задача оценки скорости сходимости к предельным распределениям возникает для случайных подстановок с известным числом циклов.

Пусть на множестве $S_{n,N}$ всех различных подстановок степени n , имеющих N циклов, задано равномерное распределение вероятностей. Обозначим через μ_r случайную величину, равную числу циклов длины r в случайно выбранной подстановке из $S_{n,N}$. В [2, 3] изучалось предельное поведение μ_r при $n, N \rightarrow \infty$. В [3] доказано, что в некоторых зонах изменения параметров n, N, r имеет место сходимость распределения μ_r одновременно к нормальному закону и к распределению Пуассона. В данной статье в теоремах 1, 2 получены оценки скорости сходимости распределения μ_r к предельным законам при $n/N \rightarrow 1$ и $n/N \rightarrow \infty$, в теоремах 3, 4 найдены расстояния по вариации между распределением μ_r и предельными законами, а в следствиях 1–4 указано, какое из двух приближений лучше.

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ и $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_N^{(r)}$ такие, что

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{\lambda^k}{-k \ln(1 - \lambda)}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \neq r\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

В [4] показано, что для $k = 0, 1, \dots, N$ при любом значении параметра λ распределения (1) справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_N &= \xi_1 + \dots + \xi_N, \\ \zeta_{N-k}^{(r)} &= \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_{N-k}^{(r)}. \end{aligned}$$

Следуя [1], введем обозначения

$$\begin{aligned} \Pi(k, \alpha) &= \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}, \\ N(k, a, b^2) &= \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(k-a)^2}{2b^2}\right\}, \\ \beta &= \frac{(m-r)^2}{\sigma^2} p_r, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sigma_{rr}^2 = p_r(1 - p_r - \beta), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} m &= \mathbf{E}\xi_1 = -\frac{\lambda}{(1-\lambda)\ln(1-\lambda)}, \\ \sigma^2 &= \mathbf{D}\xi_1 = \frac{m}{1-\lambda} - m^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Будем считать далее, что параметр λ распределения (1) равен единственному решению уравнения

$$-\frac{\lambda}{(1-\lambda)\ln(1-\lambda)} = \frac{n}{N} \quad (7)$$

из интервала $(0, 1)$. Через $C, C_1, C_2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, не всегда различные. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что $Np_r \rightarrow \infty$, и выполнено одно из следующих условий:

$$(a) \quad n/N \rightarrow 1, \quad r \geq 3;$$

$$(б) \quad n/N \rightarrow \infty;$$

и пусть

$$(\beta + p_r)v_r^2 \rightarrow 0,$$

где

$$v_r = \frac{k - Np_r}{\sqrt{Np_r}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_r = k\} &= \Pi(k, Np_r) \left(1 + \frac{\beta + p_r}{2}(1 - v_r^2) \right) \\ &\quad + O((\beta^2 + p_r^2)(1 + v_r^4) + \beta p_r v_r^2 + R_1), \end{aligned}$$

где

$$R_1 = \begin{cases} O\left(\frac{1}{\sqrt{n - N}}\right), & \text{если } n/N \rightarrow 1; \\ o\left(\sqrt{\frac{\ln(n/N)}{N}}\right), & \text{если } n/N \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (8)$$

Теорема 2. Пусть $n, N \rightarrow \infty$, выполнено одно из условий (а), (б) теоремы 1, и

$$\frac{1 + u_r^6}{Np_r} \rightarrow 0, \quad (\beta + p_r)u_r^2 \leq C < \infty,$$

где

$$u_r = \frac{k - Np_r}{\sigma_{rr}\sqrt{N}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_r = k\} &= N(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2) \\ &\quad + \left(1 + \frac{3u_r - u_r^3}{6\sqrt{Np_r}} + O\left(\frac{|u_r| + |u_r|^3}{\sqrt{Np_r}}(\beta + p_r) + \frac{1 + u_r^6}{Np_r}\right) + R_2 \right), \end{aligned}$$

где

$$R_2 = \begin{cases} O\left(\frac{1}{\sqrt{n - N}}\right), & \text{если } n/N \rightarrow 1; \\ o\left((1 + |u_r|)\sqrt{\frac{\ln(n/N)}{N}}\right), & \text{если } n/N \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Введем расстояния по вариации (см. [5]) между распределением μ_r и аппроксимирующими распределениями:

$$\begin{aligned} \rho_{1r} &= \sum_{k=0}^N |\mathbf{P}\{\mu_r = k\} - \Pi(k, Np_r)|, \\ \rho_{2r} &= \sum_{k=0}^N |\mathbf{P}\{\mu_r = k\} - N(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2)|. \end{aligned}$$

Следуя [1], положим

$$c_1 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |1 - u^2| e^{-u^2/2} du = \sqrt{\frac{2}{\pi e}},$$

$$c_2 = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |u^3 - 3u| e^{-u^2/2} du = \frac{1 + 4e^{-3/2}}{3\sqrt{2\pi}}.$$

Теорема 3. Если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $Np_r \rightarrow \infty$ и выполнено одно из условий (а), (б) теоремы 1, то

$$\rho_{1r} = c_1(\beta + p_r) + o(\beta + p_r) + R_1,$$

где R_1 определено в (8).

Теорема 4. Если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $Np_r \rightarrow \infty$ и выполнено одно из условий (а), (б) теоремы 1, то

$$\rho_{2r} = \frac{c_2}{\sqrt{Np_r}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{Np_r}} + \sqrt{\beta e^{-1/\beta}} + \sqrt{p_r e^{-1/p_r}}\right).$$

Замечание 1. Из доказательств теорем 1–4 (см. ниже) ясно, что утверждения этих теорем справедливы и в случае $r \rightarrow \infty$.

Следствие 1. Пусть $r \geq 3$, $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 1$, $Np_r \rightarrow \infty$. Если $\beta = O(1/\sqrt{n - N})$, то лучшее приближение для распределения μ_r дает закон Пуассона, а если $1/Np_r = o(\beta e^{-1/\beta})$ и $1/\sqrt{n - N} = o(\beta)$, то лучшим приближением для распределения μ_r является нормальный закон.

Следствие 2. Если $r \geq 3$ фиксировано, $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 1$, $Np_r \rightarrow \infty$, $1/\sqrt{n - N} = o(\beta)$ и $\beta e^{-1/\beta} = O(1/(Np_r))$, то величины ρ_{1r} , ρ_{2r} асимптотически равны при $\lambda = \lambda_{1r}$, где

$$\lambda_{1r} = \left(\frac{c_2^2 r^3}{4c_1^2 (1 - r)^4 N} \right)^{1/(3r-5)} (1 + o(1)).$$

В этом случае лучшее приближение для распределения μ_r при $\lambda < \lambda_{1r}$ дает распределение Пуассона, при $\lambda > \lambda_{1r}$ — нормальный закон, а если $\lambda = \lambda_{1r}$, то расстояния между распределением μ_r и приближающими распределениями асимптотически равны

$$\rho_1 = (2c_1 c_2^2 (1 - r)^2)^{1/3} \left(\frac{4c_1^2 (1 - r)^4}{c_2^2 r^3 N^{3r-6}} \right)^{1/(9r-15)} (1 + o(1)).$$

Следствие 3. Пусть r фиксировано, $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$, $Np_r \rightarrow \infty$. Если $p_r = o(\sqrt{\ln(n/N)/N})$, то лучшим приближением для распределения μ_r является закон Пуассона, а если $\sqrt{\ln(n/N)/N} = O(p_r)$, $1/Np_r = o(p_r e^{-1/p_r})$, то более точное приближение для распределения μ_r дает нормальный закон.

Следствие 4. Пусть r фиксировано, $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$, $Np_r \rightarrow \infty$. При $\sqrt{\ln(n/N)/N} = O(p_r)$ и $p_r e^{-1/p_r} = O(1/(Np_r))$ величины ρ_{1r} , ρ_{2r} асимптотически равны при $\lambda = \lambda_{2r}$, где

$$\lambda_{2r} = 1 + \frac{r}{n} \left(\frac{Nc_2}{c_1} \right)^{2/3} (1 + o(1)).$$

В этом случае при $\lambda < \lambda_{2r}$ лучшим приближением для распределения μ_r является нормальный закон, при $\lambda > \lambda_{2r}$ — распределение Пуассона, а если $\lambda = \lambda_{2r}$, то расстояния между распределением μ_r и приближающими распределениями асимптотически равны

$$\rho_2 = \left(\frac{c_1 c_2^2}{N} \right)^{1/3} (1 + o(1)).$$

Ниже приводятся вспомогательные утверждения (леммы 1–3), затем с их помощью будут доказаны теоремы 1–4 и следствия 1–4. Введем обозначения:

$$m_r = \mathbf{E} \xi_1^{(r)}, \quad \sigma_r^2 = \mathbf{D} \xi_1^{(r)}, \quad \alpha_l = \mathbf{E} \xi_1^l, \quad \alpha_{lr} = \mathbf{E} (\xi_1^{(r)})^l, \quad l \geq 2, \\ \varphi(t) = \mathbf{E} \exp\{it \xi_1\}, \quad \psi(t) = \mathbf{E} \exp\left\{it \frac{\xi_N - mN}{\sigma \sqrt{N}}\right\} = \exp\left\{-\frac{itmN}{\sigma \sqrt{N}}\right\} \varphi^N\left(\frac{t}{\sigma \sqrt{N}}\right). \quad (9)$$

Учитывая (1), (2), нетрудно показать, что

$$\alpha_2 = \frac{m}{1-\lambda}, \quad \alpha_3 = \frac{m(1+\lambda)}{(1-\lambda)^2}, \\ \alpha_4 = \frac{m(1+4\lambda+\lambda^2)}{(1-\lambda)^3}, \quad \alpha_5 = \frac{m(1+11\lambda+11\lambda^2+\lambda^3)}{(1-\lambda)^4}, \\ \alpha_{lr} = \frac{1}{1-p_r} (\alpha_l - r^l p_r), \quad l = 2, 3, \dots, \quad (10)$$

$$m_r = \frac{1}{1-p_r} (m - r p_r), \quad (11)$$

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{1-p_r} \left(\frac{m}{1-\lambda} - r^2 p_r \right) - m_r^2, \quad (12)$$

$$\varphi(t) = \frac{\ln(1 - \lambda e^{it})}{\ln(1 - \lambda)}. \quad (13)$$

Положим

$$\beta_1 = -\frac{\alpha_3 - 3\alpha_2 m + 2m^3}{6\sigma^3 \sqrt{2N}}, \\ \beta_2 = \frac{\alpha_4 - 3\alpha_2^2 - 4\alpha_3 m + 12\alpha_2 m^2 - 6m^4}{8\sigma^4 N}, \\ u = \frac{l - mN}{\sigma \sqrt{N}}, \quad (14)$$

$$\gamma = \begin{cases} \frac{1}{n - N}, & \text{если } n/N \rightarrow 1, \\ \frac{\ln(n/N)}{N}, & \text{если } n/N \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (15)$$

Лемма 1. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ и выполнено одно из следующих условий:

- (i) $n/N \rightarrow 1, n - N \rightarrow \infty, r \geq 3$;
- (ii) $n/N \rightarrow \infty, N/\ln n \rightarrow \infty$.

Тогда при $e^{u^2/2}\gamma^2 \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = l\} = \frac{e^{-u^2/2}}{\sigma\sqrt{2\pi N}}(1 + \beta_1(6u - 4u^3) + \beta_2 - 15\beta_1^2 + O(e^{u^2/2}\gamma^2 + (u^2 + u^6)\gamma + (|u| + |u|^9)\gamma^{3/2})).$$

Доказательство. При $n/N \rightarrow 1$ из (7) получаем, что

$$\lambda = 2 \frac{n - N}{N} + o\left(\frac{n - N}{N}\right), \quad (16)$$

и из (6), (7) следует соотношение

$$\sigma^2 = \frac{n - N}{N}(1 + o(1)). \quad (17)$$

Если $n/N \rightarrow \infty$, то, как отмечено в [6], уравнение (7) приближенно удовлетворяется при

$$\lambda = 1 - \left(\frac{n}{N} \ln \frac{n}{N}\right)^{-1}, \quad (18)$$

и из (6), (7) находим, что

$$\sigma^2 = \left(\frac{n}{N}\right)^2 \ln \frac{n}{N}(1 + o(1)). \quad (19)$$

Пусть выполнены условия (i). Учитывая (16), из (13) получаем соотношение

$$\varphi(t) = e^{it} \left(1 - \frac{1}{\ln(1 - \lambda)} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(it)^l}{l!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)^l}{k} \lambda^k\right). \quad (20)$$

С помощью равенства (5.2.10) из [7] несложно показать, что при $|t|/(1 - \lambda) \leq \varepsilon < 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{l=6}^{\infty} \frac{(it)^l}{l!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)^l}{k} \lambda^k < \frac{C_1 \lambda^2 t^6}{(1 - \lambda)^6}.$$

Отсюда и из (6), (10), (20) получаем равенство

$$\begin{aligned} \varphi(t) = e^{it} & \left(1 + it(m-1) - \frac{t^2}{2}(\alpha_2 - 2m + 1) - \frac{it^3}{6}(\alpha_3 - 3\alpha_2 + 3m - 1) + \frac{t^4}{24}(\alpha_4 - 4\alpha_3 + 6\alpha_2 - 4m + 1) \right. \\ & \left. + \frac{it^5}{120}(\alpha_5 - 5\alpha_4 + 10\alpha_3 - 10\alpha_2 + 5m - 1) + O\left(\frac{m\lambda t^6}{(1 - \lambda)^5}\right)\right). \end{aligned} \quad (21)$$

При $|t| \leq (n - N)^{1/8}$ из (9) и (21) с помощью формулы Тейлора находим, что

$$\begin{aligned} \psi(t) = e^{-t^2/2} & \left(1 + i\sqrt{2}t^3\beta_1 + \frac{1}{3}t^4\beta_2 + it^5\beta_3 - t^6\beta_1^2 + i\frac{\sqrt{2}}{3}t^7\beta_1\beta_2 - \frac{\sqrt{2}}{3}t^9\beta_1^3 + O\left(\frac{(t^6 + t^{12})\lambda m}{(1 - \lambda)^5\sigma^6 N^2}\right)\right), \end{aligned} \quad (22)$$

где β_1, β_2 определены в (14),

$$\beta_3 = \frac{\alpha_5 - 5\alpha_4 m - 10\alpha_3 \alpha_2 + 20\alpha_3 m^2 + 30\alpha_2^2 m - 60\alpha_2 m^3 + 24m^5}{5! \sigma^5 N^{3/2}}.$$

Пусть выполнены условия (ii) и $|t| \leq C_2 \sqrt{N/\ln(n/N)}$. Тогда, в силу формулы Тейлора, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) = 1 + \frac{imt}{\sigma\sqrt{N}} - \frac{\alpha_2 t^2}{2\sigma^2 N} - \frac{i\alpha_3 t^3}{6\sigma^3 N^{3/2}} \\ + \frac{\alpha_4 t^4}{24\sigma^4 N^2} + \frac{i\alpha_5 t^5}{120\sigma^5 N^{5/2}} + O\left(\frac{mt^6}{(1-\lambda)^5 \sigma^6 N^3}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Используя (9), (23), как и выше, несложно получить соотношение (22).

По формуле обращения,

$$\mathbf{P}\{\xi_N = l\} = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{N}} \int_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-iut} \psi(t) dt,$$

и поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut} e^{-t^2/2} dt,$$

разность

$$R_N = \sqrt{2\pi}(\sigma\sqrt{2\pi N} \mathbf{P}\{\xi_N = l\} - e^{-u^2/2})$$

можно представить в виде

$$R_N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{|t| \leq A} e^{-iut} (\psi(t) - e^{-t^2/2}) dt, \quad I_2 = \int_{A < |t| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{N}} e^{-iut} \psi(t) dt, \\ I_3 = \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{N} < |t| \leq \pi\sigma\sqrt{N}} e^{-iut} \psi(t) dt, \quad I_4 = - \int_{|t| > A} e^{-iut - t^2/2} dt, \quad A = \gamma^{-1/8}; \end{aligned}$$

постоянная $\varepsilon > 0$ будет выбрана позднее.

Учитывая (6), (7), (10), (14)–(19), несложно показать, что

$$\beta_1 = O(\gamma^{1/2}), \quad \beta_2 = O(\gamma), \quad \beta_3 = O(\gamma^{3/2}). \quad (24)$$

Согласно равенству (2.5.36.5) в [7]

$$\int_0^\infty x^{2k+\delta} e^{-ax^2} \begin{Bmatrix} \sin bx \\ \cos bx \end{Bmatrix} dx = \frac{(-1)^k \sqrt{\pi}}{(2\sqrt{a})^{2k+1+\delta}} e^{-b^2/4a} H_{2k+\delta} \left(\frac{b}{2a} \right), \quad (25)$$

где

$$H_s(z) = (-1)^s e^{z^2} \frac{d^s e^{-z^2}}{dz^s}, \quad \delta = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Легко проверить, что при фиксированных l имеет место соотношение

$$\int_A^\infty t^l e^{-t^2/2} dt = O(A^{-16}). \quad (26)$$

С помощью (22), (24)–(26) находим, что

$$I_1 = \sqrt{2\pi} e^{-u^2/2} (\beta_1(6u - 4u^3) + \beta_2 - 15\beta_1^2 + O(e^{u^2/2}\gamma^2 + (u^2 + u^6)\gamma + (|u| + |u|^9)\gamma^{3/2})). \quad (27)$$

Для I_4 справедлива оценка

$$I_4 = o(\gamma^2). \quad (28)$$

Оценим I_2 . При выполнении условий (i) из (21) получаем, что при $|t| \leq \varepsilon$ и достаточно малом ε выполнено соотношение

$$|\varphi(t)|^2 \leq 1 - t^2\sigma^2/2 < e^{-t^2\sigma^2/2}.$$

Отсюда и из (9) следует, что

$$|I_2| \leq 2 \int_A^\infty e^{-t^2/4} dt = o(\gamma^2). \quad (29)$$

Пусть выполнены условия (ii). Интеграл I_2 представим в виде

$$I_2 = I_2^{(1)} + I_2^{(2)} + I_2^{(3)}, \quad (30)$$

где области интегрирования слагаемых соответственно равны

$$\begin{aligned} S_1 &= \{A < |t| \leq \delta \sqrt{N/\ln(n/N)}\}, \\ S_2 &= \{\delta \sqrt{N/\ln(n/N)} < |t| \leq \min\{N/\ln(n/N), \varepsilon\sigma\sqrt{N}\}\}, \\ S_3 &= \{N/\ln(n/N) < |t| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{N}\}, \end{aligned}$$

причем область S_3 пуста, если $N/\ln(n/N) \geq \varepsilon\sigma\sqrt{N}$, постоянная $\delta > 0$ будет выбрана позднее.

При $t \in S_1$ из (9), (23) получаем, что

$$\ln \psi(t) = -\frac{t^2}{2} \left(1 - i2\sqrt{2}\beta_1 t + O\left(\frac{t^2 \ln(n/N)}{N}\right) \right),$$

при этом $|t\beta_1| \leq \delta$, $t^2 \ln(n/N)/N \leq \delta^2$. Следовательно, найдется такое $\delta > 0$, что $|\psi(t)| \leq e^{-t^2/4}$ и

$$I_2^{(1)} = o\left(\frac{\ln^2(n/N)}{N^2}\right). \quad (31)$$

Пусть $|t| \leq \varepsilon$. Учитывая (13), функцию $\varphi(t)$ представим в виде

$$\varphi(t) = \frac{\ln|1 - \lambda e^{it}|}{\ln(1 - \lambda)} + i \frac{\arg(1 - \lambda e^{it})}{\ln(1 - \lambda)}, \quad (32)$$

где $|\arg(1 - \lambda e^{it})| \leq \pi$. Поскольку

$$\frac{\ln|1 - \lambda e^{it}|}{\ln(1 - \lambda)} = 1 + \frac{\ln(1 + 2\lambda(1 - \cos t)(1 - \lambda)^{-2})}{2 \ln(1 - \lambda)},$$

и $1 - \cos t \geq t^2/4$, получаем, что

$$\frac{\ln |1 - \lambda e^{it}|}{\ln(1 - \lambda)} \leq 1 - \frac{\ln(1 + \lambda t^2/2(1 - \lambda)^2)}{-2 \ln(1 - \lambda)}. \quad (33)$$

При $t \in S_2$ выполнено соотношение $|t|/(1 - \lambda)\sigma\sqrt{N} \geq \delta$, и из (33) находим, что

$$\frac{\ln |1 - \lambda e^{it/\sigma\sqrt{N}}|}{\ln(1 - \lambda)} \leq 1 - \frac{C_3}{-2 \ln(1 - \lambda)}.$$

Отсюда и из (9), (18), (32) следует неравенство

$$|\psi(t)| \leq \exp \left\{ -\frac{C_4 N}{\ln(n/N)} \right\},$$

с помощью которого получаем оценку

$$I_2^{(2)} = o \left(\frac{\ln^2(n/N)}{N^2} \right). \quad (34)$$

Пусть $N/\ln(n/N) < |t| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{N}$. Учитывая (18), из (33) находим, что

$$\frac{\ln |1 - \lambda e^{it/(\sigma\sqrt{N})}|}{\ln(1 - \lambda)} \leq 1 - \frac{\ln(|t|/(1 - \lambda)\sigma\sqrt{N})}{-\ln(1 - \lambda)} + \frac{C_5}{-\ln(1 - \lambda)}.$$

Используя это неравенство и (9), (18), (19), (32), получаем соотношение

$$|\psi(t)| \leq \left(1 - \frac{C_6 \ln(|t|/((1 - \lambda)\sigma\sqrt{N}))}{-\ln(1 - \lambda)} \right)^{N/2} \leq \left(\frac{|t|}{(1 - \lambda)\sigma\sqrt{N}} \right)^{-C_7 N/\ln(n/N)},$$

с помощью которого нетрудно показать, что

$$I_2^{(3)} = o \left(\frac{\ln^2(n/N)}{N^2} \right).$$

Отсюда и из (29)–(31), (34) следует оценка

$$I_2 = o(\gamma^2). \quad (35)$$

Пусть $\varepsilon\sigma\sqrt{N} < |t| \leq \pi\sigma\sqrt{N}$. При выполнении условий (i), используя (13) и формулу Тейлора, находим, что

$$\varphi \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) = e^{it} \left(1 + \frac{\lambda}{2}(e^{it} - 1) + o(\lambda) \right),$$

и с учетом формулы Эйлера получаем соотношение

$$\left| \varphi \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \right|^2 = 1 - \lambda \left(1 - \cos \frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) + o(\lambda) \leq 1 - C_8 \lambda.$$

Отсюда и из (9) следует неравенство $|\psi(t)| \leq e^{-C_9 N \lambda}$, и с помощью (15)–(17) находим, что

$$|I_3| \leq C_{10} \sigma \sqrt{N} e^{-C_9 N \lambda} = o(\gamma^2). \quad (36)$$

Пусть выполнены условия (ii). Поскольку максимальный шаг распределения ξ_1 равен 1, при $\varepsilon < |t|/(\sigma \sqrt{N}) \leq \pi$ имеет место неравенство

$$|\varphi(t/\sigma \sqrt{N})| \leq e^{-C_{11}}.$$

Используя это соотношение, (9), (15) и (19), нетрудно показать, что

$$|I_3| \leq C_{12} \sqrt{(\ln(n/N))/N} e^{-C_{11} N} = o(\gamma^2).$$

Отсюда и из (27), (28), (35), (36) получаем утверждение леммы.

Положим

$$v = \frac{l - m_r S}{\sigma_r \sqrt{S}}.$$

Лемма 2. Пусть $r \geq 3$, $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 1$, $n - N \rightarrow \infty$, и пусть $S \rightarrow \infty$ так, что $\sigma_r^2 S \rightarrow \infty$. Тогда при $e^{v^2}/(\sigma_r^2 S) \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = l\} = \frac{e^{-v^2/2}}{\sigma_r \sqrt{2\pi S}} \left(1 + O\left(\frac{e^{v^2/2}}{\sigma_r \sqrt{S}}\right) \right).$$

Лемма 3. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n/N, N/\ln n \rightarrow \infty$, и пусть $S \rightarrow \infty$ так, что $S/\ln n \rightarrow \infty$. Тогда при $e^{v^2} \ln(n/N)/S \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = l\} = \frac{e^{-v^2/2}}{\sigma_r \sqrt{2\pi S}} \left(1 + \beta_{1r} (6v - 4v^3) + O\left(\frac{e^{v^2/2} \ln(n/N)}{S}\right) \right),$$

где

$$\beta_{1r} = -\frac{1}{6\sigma_r^3 \sqrt{2S}} (\alpha_{3r} - 3\alpha_{2r} m_r + 2m_r^3) = O\left(\frac{\ln(n/N)}{S}\right).$$

Леммы 2, 3 являются уточнением леммы 1 из [3] при выполнении соответствующих условий и доказываются по такой же схеме, по которой доказана лемма 1.

Доказательство теорем 1, 2. Заметим, что из равенств (1), (4), (6), (7), (16), (18) следует, что

$$p_r \rightarrow 0, \quad \beta \rightarrow 0. \quad (37)$$

При выполнении условий теоремы 1, согласно теореме 2.5.2 из [1], имеет место равенство

$$\binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} = \Pi(k, N p_r) \left(1 + \frac{p_r}{2} (1 - v_r^2) + O\left(p_r^2 (1 + v_r^4) + \frac{1 + |v_r|}{\sqrt{N p_r}} p_r\right) \right). \quad (38)$$

Из леммы 1, учитывая (24) и (15), находим, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi N}}(1 + O(\gamma)). \quad (39)$$

С помощью (4), (6), (11), (12) несложно проверить, что

$$\sigma_r^2 = \frac{\sigma^2(1 - p_r - \beta)}{1 - p_r}, \quad (40)$$

и для $k = Np_r + v_r\sqrt{Np_r}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{(n - kr - (N - k)m_r)^2}{\sigma_r^2(N - k)} &= v_r^2\beta \left(1 + O\left(\beta + p_r + \frac{|v_r|p_r}{\sqrt{Np_r}}\right)\right), \\ N - k &= N \left(1 - p_r + O\left(\frac{|v_r|p_r}{\sqrt{Np_r}}\right)\right). \end{aligned}$$

Тогда, учитывая (37), (40) и соотношение $\beta v_r^2 \rightarrow 0$, из лемм 2, 3 получаем, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi N}}(1 + \beta(1 - v_r^2)/2 + O((p_r^2 + \beta^2)(1 + v_r^4) + p_r\beta v_r^2) + R_1),$$

где R_1 определено в (8). Отсюда и из (3), (38), (39) следует утверждение теоремы 1.

При выполнении условий теоремы 2 из теоремы 2.5.1 в [1] и легко проверяемого для $k = Np_r + u_r\sigma_{rr}\sqrt{N}$ равенства

$$\frac{(k - Np_r)^2}{Np_r(1 - p_r)} = \frac{u_r^2(1 - p_r - \beta)}{1 - p_r}$$

находим, что

$$\begin{aligned} \binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi Np_r(1 - p_r)}} \exp\left\{-\frac{u_r^2(1 - p_r - \beta)}{2(1 - p_r)}\right\} \\ &\times \left(1 + \frac{3u_r - u_r^3}{6\sqrt{Np_r}} + O\left(\frac{\beta + p_r}{\sqrt{Np_r}}(|u_r| + |u_r|^3) + \frac{1 + u_r^6}{Np_r}\right)\right). \end{aligned} \quad (41)$$

При $k = Np_r + u_r\sigma_{rr}\sqrt{N}$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \frac{(n - kr - (N - k)m_r)^2}{\sigma_r^2(N - k)} &= \frac{u_r^2\beta}{1 - p_r} + O\left(\frac{|u_r|^3\beta p_r}{\sqrt{Np_r}}\right), \\ N - k &= N \left(1 - p_r + O\left(\frac{|u_r|p_r}{\sqrt{Np_r}}\right)\right). \end{aligned}$$

Учитывая эти равенства и условия $\beta u_r^2 \leq C < \infty$, $u_r^6/Np_r \rightarrow 0$, из леммы 2 получаем, что при $n/N \rightarrow 1$

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi N(1 - p_r)}} \exp\left\{-\frac{u_r^2\beta}{2(1 - p_r)}\right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n - N}}\right)\right).$$

Аналогично, из леммы 3 находим, что при $n/N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\xi_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi N(1-p_r)}} \exp \left\{ -\frac{u_r^2 \beta}{2(1-p_r)} \right\} \times \left(1 + O \left(\frac{|u_r| p_r}{\sqrt{N p_r}} + \frac{\ln(n/N)}{N} + \frac{|u_r| \sqrt{\beta \ln(n/N)}}{\sqrt{N}} \right) \right).$$

Из этих соотношений и (3)–(5), (37), (39), (41) получаем утверждение теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Введем обозначение

$$\bar{v} = \min\{\beta^{-1/3}, p_r^{-1/3}\}$$

и представим ρ_{1r} в виде $\rho_{1r} = A_1 + A_2$, где

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{|v_r| \leq \bar{v}} |\mathbf{P}\{\mu_r = k\} - \Pi(k, Np_r)|, \\ A_2 &= \sum_{|v_r| > \bar{v}} |\mathbf{P}\{\mu_r = k\} - \Pi(k, Np_r)|, \\ v_r &= \frac{k - Np_r}{\sqrt{Np_r}}. \end{aligned}$$

Согласно равенству (2.5.9) в [1], для любого фиксированного l

$$\sum_{k=0}^{\infty} |v_r|^l \Pi(k, Np_r) = O(1). \quad (42)$$

Из теоремы 1 и (42) получаем, что

$$A_1 = \frac{\beta + p_r}{2} \sum_{|v_r| \leq \bar{v}} |1 - v_r^2| \Pi(k, Np_r) + O(\beta^2 + p_r^2) + R_1, \quad (43)$$

где R_1 определено в (8).

Поскольку $(1 + v_r^6)/(Np_r) \rightarrow 0$ при $|v_r| \leq v^* = \min\{\bar{v}, (Np_r)^{1/7}\}$, из теоремы 2.5.3 в [1] находим, что при $|v_r| \leq v^*$

$$\Pi(k, Np_r) = N(k, Np_r, Np_r) \left(1 + \frac{v_r^3 - 3v_r}{6\sqrt{Np_r}} + o \left(\frac{1 + v_r^6}{Np_r} \right) \right). \quad (44)$$

С помощью леммы 2.5.1 из [1] и соотношений (37) и $Np_r \rightarrow \infty$ несложно показать, что

$$\begin{aligned} \sum_{|v_r| \leq v^*} |1 - v_r^2| N(k, Np_r, Np_r) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |1 - u^2| e^{-u^2/2} du + o(1) \\ &= 2c_1 + o(1). \end{aligned} \quad (45)$$

Если $(Np_r)^{1/7} < \bar{v}$, то, учитывая (42) и условие $Np_r \rightarrow \infty$, легко увидеть, что

$$\sum_{v^* < |v_r| \leq \bar{v}} |1 - v_r^2| \Pi(k, Np_r) = o(1). \quad (46)$$

Поскольку

$$\frac{|v_r^3 - 3v_r|}{\sqrt{Np_r}} < C_{13}(Np_r)^{-1/14},$$

$$\frac{1 + v_r^6}{Np_r} \leq C_{14}(Np_r)^{-1/7},$$

используя (45), получаем неравенство

$$\sum_{|v_r| \leq v^*} |1 - v_r^2| N(k, Np_r, Np_r) \left(\frac{|v_r^3 - 3v_r|}{6\sqrt{Np_r}} + o\left(\frac{1 + v_r^6}{Np_r}\right) \right) \leq \frac{C_{15}}{(Np_r)^{1/14}}.$$

Отсюда и из (37), (43)–(46) следует, что

$$A_1 = (\beta + p_r)c_1 + o(\beta + p_r) + R_1. \quad (47)$$

Введем обозначения

$$P_l = \frac{\mathbf{P}\{\xi_{N-l} = n - lr\}}{\mathbf{P}\{\xi_N = n\}}, \quad l = 1, 2, \dots$$

С помощью (3) и равенства

$$\sum_{k=0}^{N-l} \binom{N-l}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-l-k} \frac{\mathbf{P}\{\xi_{N-l-k}^{(r)} = n - lr - kr\}}{\mathbf{P}\{\xi_N = n\}} = P_l$$

несложно показать, что

$$\begin{aligned} \sum_{|v_r| > \bar{v}} \mathbf{P}\{\mu_r = k\} &\leq \frac{1}{\bar{v}^4} \sum_{k=0}^N \left(\frac{k - Np_r}{\sqrt{Np_r}} \right)^4 \mathbf{P}\{\mu_r = k\} \\ &= \frac{1}{\bar{v}^4} ((Np_r)^2 (P_4 - 4P_3 + 6P_2 - 4P_1 + 1) + 6Np_r (P_3 - 2P_2 + P_1) \\ &\quad - 6Np_r^2 (P_4 - 2P_3 + P_2) - p_r (P_3 (18 - 12/N) - 12P_2) \\ &\quad + p_r^2 (P_4 (11 - 6/N) - 8P_3) - P_1 (4 - 1/Np_r) + 7P_2 (1 + 1/N)). \end{aligned}$$

Отсюда, используя лемму 1, находим, что

$$\sum_{|v_r| > \bar{v}} \mathbf{P}\{\mu_r = k\} \leq C_{16} \bar{v}^{-4} = o(\beta + p_r).$$

С учетом (42) легко видеть, что

$$\sum_{|v_r| > \bar{v}} \Pi(k, Np_r) \leq C_{17} \bar{v}^{-4} = o(\beta + p_r).$$

Из этих соотношений получаем оценку

$$A_2 = o(\beta + p_r).$$

Отсюда и из (47) следует утверждение теоремы 3.

Доказательство теоремы 4. Пусть

$$\bar{v} = \min\{(Np_r)^{1/7}, \sqrt{2}\beta^{-1/2}, \sqrt{2}p_r^{-1/2}\}.$$

Представим ρ_{2r} в виде $\rho_{2r} = A_1 + A_2$, где

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{|u_r| \leq \bar{v}} |\mathbf{P}\{\mu_r = k\} - N(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2)|, \\ A_2 &= \sum_{|u_r| > \bar{v}} |\mathbf{P}\{\mu_r = k\} - N(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2)|, \\ u_r &= \frac{k - Np_r}{\sigma_{rr}\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

Используя лемму 2.5.1 из [1] при замене суммирования интегрированием, равенство

$$\int_0^\infty u^l e^{-u^2/2} du = O(1),$$

справедливое при любом фиксированном l , и соотношения (5), (37), $Np_r \rightarrow \infty$, несложно показать, что

$$\begin{aligned} \sum_{|u_r| \leq \bar{v}} |3u_r - u_r^3| N(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty |3u - u^3| e^{-u^2/2} du + o(1) = 6c_2 + o(1), \\ \sum_{|u_r| \leq \bar{v}} (1 + |u_r| + |u_r|^3 + u_r^6) N(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2) &= O(1). \end{aligned} \quad (48)$$

Поскольку $\ln(n/N)/N = O(1/Np_r)$ при $n/N \rightarrow \infty$ и $1/(n - N) = o(1/Np_r)$ при $n/N \rightarrow 1$, с помощью теоремы 2 и (48) получаем, что

$$A_1 = \frac{c_2}{\sqrt{Np_r}} (1 + o(1)). \quad (49)$$

Аналогично, учитывая равенство

$$\int_{-\bar{v}}^{\bar{v}} (3u - u^3) e^{-u^2/2} du = 0,$$

можно показать, что

$$\sum_{|u_r| \leq \bar{v}} (\mathbf{P}\{\mu_r = k\} - N(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2)) = o\left(\frac{1}{\sqrt{Np_r}}\right). \quad (50)$$

Согласно равенству (2.5.4) в [1], для любого фиксированного l

$$\int_{\bar{v}}^\infty u^l e^{-u^2/2} du = O(\bar{v}^{l-1} e^{-\bar{v}^2/2}).$$

Используя это соотношение и лемму 2.5.1 из [1], находим, что

$$\sum_{|u_r| > \bar{v}} N(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2) = O\left(\frac{e^{-\bar{v}^2/2}}{\bar{v}} + \frac{e^{-\bar{v}^2/2}}{\sqrt{Np_r}}\right). \quad (51)$$

Из соотношений (50), (51), (5), (37), $Np_r \rightarrow \infty$ и леммы 2.5.3 из [1] получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{|u_r| > \bar{v}} \mathbf{P}\{\mu_r = k\} &= \sum_{|u_r| > \bar{v}} N(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2) + 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} N(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2) \\ &\quad - \sum_{|u_r| \leq \bar{v}} (\mathbf{P}\{\mu_r = k\} - N(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2)) \\ &= O\left(\frac{e^{-\bar{v}^2/2}}{\bar{v}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{Np_r}}\right). \end{aligned}$$

Из этого равенства и (51) следует, что

$$A_2 = o\left(\sqrt{\beta e^{-1/\beta}} + \sqrt{p_r e^{-1/p_r}} + \frac{1}{\sqrt{Np_r}}\right),$$

поскольку

$$e^{-\bar{v}^2/2}/\bar{v} \leq C_{18}(\sqrt{\beta e^{-1/\beta}} + \sqrt{p_r e^{-1/p_r}} + (Np_r)^{-1/7} e^{-(Np_r)^{2/7}/2}).$$

Отсюда и из (49) получаем утверждение теоремы 4.

Для доказательства следствий 1–4 заметим, что при $n/N \rightarrow 1$, $r \geq 3$ из равенств (4), (6), (7), (16), (17) следуют соотношения

$$p_r = o(\beta), \quad \beta \rightarrow 0,$$

и согласно теоремам 3, 4,

$$\begin{aligned} \rho_{1r} &= c_1 \beta (1 + o(1)) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n - N}}\right), \\ \rho_{2r} &= \frac{c_2}{\sqrt{Np_r}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{Np_r}} + \sqrt{\beta e^{-1/\beta}}\right). \end{aligned}$$

При $n/N \rightarrow \infty$ и фиксированных r из (4), (6), (7), (18), (19) получаем, что

$$\beta = o(p_r),$$

и из теорем 3, 4 следует, что

$$\begin{aligned} \rho_{1r} &= c_1 p_r + o(p_r + \sqrt{\ln(n/N)/N}) \\ \rho_{2r} &= \frac{c_2}{\sqrt{Np_r}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{Np_r}} + \sqrt{p_r e^{-1/p_r}}\right). \end{aligned}$$

Из этих соотношений нетрудно получить следствия 1–4.

Список литературы

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
2. Тимашев А. Н., О распределении числа циклов заданной длины в классе подстановок с известным числом циклов. *Дискретная математика* (2001) **13**, №4, 60–72.
3. Черепанова Е. В., Предельные распределения числа циклов заданной длины в случайной подстановке с известным числом циклов. *Дискретная математика* (2003) **15**, №3, 128–144.
4. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
5. Прохоров Ю. В., Асимптотическое поведение биномиального распределения. *Успехи матем. наук* (1953) **8**, №3, 135–142.
6. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2004.
7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., *Интегралы и ряды*. Наука, Москва, 1981.

Статья поступила 19.05.2005.