Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тимашёв, Большие отклонения для числа деревьев заданного объема и максимального объема дерева в случайном лесе, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 3, 77–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm60>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:10:35

УДК 519.2

Большие отклонения для числа деревьев заданного объема и максимального объема дерева в случайном лесе

© 2006 г. А. Н. Тимашёв

Рассматривается множество всех лесов, состоящих из N корневых деревьев, в предположении, что корни, а вместе с ними и сами деревья занумерованы числами $1, \dots, N$, а остальные n вершин каждого леса занумерованы числами $1, \dots, n$. В предположении, что на этом множестве задано равномерное распределение и $n, N \rightarrow \infty$, доказаны локальные предельные теоремы для распределений случайных величин, равных числу деревьев заданного объема и максимального объема дерева, позволяющие оценивать соответствующие локальные вероятности с точностью до остаточного члена известного порядка, в том числе и в области больших отклонений.

Рассмотрим класс всех однозначных отображений конечного множества в себя. Граф каждого такого отображения состоит из связанных компонент с одним циклом. Если убрать дуги, соединяющие циклические вершины графа, то оставшаяся часть графа образует лес, корневыми вершинами которого являются циклические вершины. Деревья этого леса обычно называют деревьями отображения. Рассмотрим множество $F_{n,N}$ всех лесов, состоящих из N корневых деревьев, в предположении, что корни, а вместе с ними и сами деревья, занумерованы числами $1, \dots, N$, а остальные n вершин каждого леса занумерованы числами $1, \dots, n$. Если $a_{n,N}$ — число всех лесов из $F_{n,N}$, то (см. [1])

$$a_{n,N} = N(n + N)^{n-1}. \quad (1)$$

Зададим на множестве $F_{n,N}$ равномерное распределение, приписав каждому лесу из $F_{n,N}$ вероятность $a_{n,N}^{-1}$. Известно [1], что при $0 < x \leq e^{-1}$

$$a_{n,N} = n! x^{-n} \exp(N\theta(x)) \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\}, \quad (2)$$

где

$$\theta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} x^k, \quad (3)$$

$$\theta(x)e^{-\theta(x)} = x, \quad (4)$$

$\xi_1, \dots, \xi_N$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых

$$p_k(x) = \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{(k+1)^{k-1}}{k!} x^k e^{-\theta(x)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Как обычно, объемом дерева назовем число его некорневых вершин. Если $\mu_r(F_{n,N})$ — случайная величина, равная числу деревьев объема r в случайно выбранном лесе из $F_{n,N}$, то [1]

$$\mathbf{P}\{\mu_r(F_{n,N}) = k\} = \binom{N}{k} p_r^k(x) (1 - p_r(x))^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} + \dots + \xi_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\}}, \quad (6)$$

где $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_{N-k}^{(r)}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \neq r\}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad k \neq r.$$

Всюду далее, если не оговорено противное, будем предполагать, что r фиксировано, $r = 0, 1, \dots$

Пусть при $n, N \rightarrow \infty$ целое неотрицательное число $k = k(n, N)$ меняется так, что выполняются условия

$$N - k \rightarrow \infty, \quad 0 < \alpha_0 \leq \alpha = \frac{n - kr}{N - k} \leq \alpha_1 < \infty, \quad (7)$$

где α_0, α_1 — постоянные и $\alpha_0 > 1$ при $r = 0$.

Заметим, что если при выполнении условий (7) параметр $r \geq 1$, то параметры n, N меняются в центральной области в том смысле, что существуют постоянные β_0 и β_1 такие, что

$$0 < \beta_0 \leq \beta = n/N \leq \beta_1 < \infty. \quad (8)$$

В случае $r = 0$ условие (8) выполняется, если дополнительно предположить, что

$$\frac{k}{N} \leq 1 - \varepsilon,$$

где ε — постоянная, $0 < \varepsilon < 1$.

В работе получена локальная предельная теорема, оценивающая вероятность $\mathbf{P}\{\mu_r(F_{n,N}) = k\}$ в предположении, что $n, N \rightarrow \infty$ и выполнены условия (7). При этом остаточный член есть $O((N - k)^{-1})$, а параметр k может попадать и в область больших отклонений. В доказательстве теоремы используются соотношения (1)–(6) и применяется метод условных распределений для сумм независимых случайных величин при специальном выборе обобщенной схемы размещения, в которой случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ имеют одинаковое распределение вида (5) (см. [1]). Заметим, что случайные леса из множества $F_{n,N}$ изучались в работах Ю. Л. Павлова (см., например, [2, 3, 4]), а также других авторов (см. библиографию в [4]). Однако случай, когда при $n, N \rightarrow \infty$ выполнены условия (7), до настоящего времени, по-видимому, не рассматривался, а большие отклонения для случайной величины $\mu_r(F_{n,N})$ не изучались.

Наиболее близкой в идейном плане к рассматриваемому в работе кругу вопросов является статья [6], где изучаются большие отклонения высоты случайного дерева.

Если обозначить $\eta(F_{n,N})$ максимальный объем дерева в случайном лесе из $F_{n,N}$, то, как показано в [1], при $r = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\eta(F_{n,N}) \leq r\} = (\mathbf{P}\{\xi_1 \leq r\})^N \frac{\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} + \dots + \tilde{\xi}_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\}},$$

где $\tilde{\xi}_1^{(r)}, \dots, \tilde{\xi}_N^{(r)}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = k\} = \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 = k\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 \leq r\}}, \quad k = 0, 1, \dots, r.$$

С использованием этих равенств в работе получена теорема о больших уклонениях для случайной величины $\eta(F_{n,N})$, оценивающая вероятность $\mathbf{P}\{\eta(F_{n,N}) \leq r\}$ при фиксированном $r = 1, 2, \dots$ и $n, N \rightarrow \infty$ в центральной области. Заметим, что случай, когда при условии (8) параметр

$$r = \ln N(\ln(1 + \beta^{-1}) - (1 + \beta)^{-1})^{-1}(1 + o(1)),$$

рассмотрен в [5].

Теорема 1. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ и целое неотрицательное число $k = k(n, N)$ меняется так, что выполнены условия (7). Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_r(F_{n,N}) = k\} &= \binom{N}{k} (p_r(x_r))^k (1 - p_r(x_r))^{N-k} \\ &\times \frac{n! (\theta(x_r))^N}{N(n+N)^{n-1} x_r^{n+N} \sqrt{2\pi(N-k)\sigma_r^2}} (1 + O((N-k)^{-1})), \end{aligned} \quad (9)$$

где x_r — единственный корень уравнения

$$\theta(x)(1 - \theta(x))^{-1} = \alpha + (r - \alpha)p_r(x), \quad (10)$$

принадлежащий интервалу $(0, e^{-1})$, величина $p_r(x)$ определена в (5) и

$$\sigma_r^2 = (1 - p_r(x_r))^{-1}(\gamma_r^3 + 3\gamma_r^2 - (\alpha + r - 1)\gamma_r + \alpha r) > 0, \quad (11)$$

$$\gamma_r = \alpha + (r - \alpha)p_r(x_r). \quad (12)$$

Доказательство. Нетрудно подсчитать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\xi_i^{(r)} &= \mathbf{E}\xi_1^{(r)} = (1 - p_r(x))^{-1}(\mathbf{E}\xi_1 - rp_r(x)) \\ &= (1 - p_r(x))^{-1}(\theta(x)(1 - \theta(x))^{-1} - rp_r(x)), \quad r = 0, 1, \dots, \quad i = 1, \dots, N - k. \end{aligned}$$

Если потребовать, чтобы $\mathbf{E}\xi_1^{(r)} = \alpha$, то окажется, что

$$\mathbf{E}(\xi_1^{(r)} + \dots + \xi_{N-k}^{(r)}) = (N - k)\mathbf{E}\xi_1^{(r)} = n - kr$$

и параметр x удовлетворяет уравнению (10). Легко проверить, что при $\alpha > 0$ и $r \geq 1$ это уравнение имеет единственный корень $x_r \in (0, e^{-1})$, при $r = 0$ нужно дополнительно потребовать, чтобы выполнялось неравенство $\alpha > 1$. Таким образом, при условиях (7) уравнение (10) имеет ровно один корень x_r , принадлежащий интервалу $(0, e^{-1})$.

Вычислим дисперсию $D\xi_1^{(r)}$.

Нетрудно убедиться, что при $x = x_r$ справедливо равенство

$$D\xi_1^{(r)} = \sigma_r^2,$$

где σ_r^2 определяется равенствами (11), (12), при этом $\sigma_r^2 > 0$, поскольку $\xi_1^{(r)}$ имеет невырожденное распределение. Применяя к оценке $P\{\xi_1^{(r)} + \dots + \xi_{N-k}^{(r)} = n - kr\}$ метод перевала и учитывая, что при $x = x_r$

$$E(\xi_1^{(r)} + \dots + \xi_{N-k}^{(r)}) = n - kr,$$

убеждаемся в том, что

$$P\{\xi_1^{(r)} + \dots + \xi_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(N-k)\sigma_r^2}}(1 + O((N-k)^{-1})) \quad (13)$$

равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$. Заметим, что аналогичный подход использован в [7].

Полагая в (2) $x = x_r$ и учитывая (1), (6) и (13), получаем оценку (9). Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Пусть $\mu_r(\Sigma_n^{(N)})$ — число деревьев объема r в графе отображения, выбираемого случайно равномерно в классе $\Sigma_n^{(N)}$ всех однозначных отображений n -элементного множества в себя, имеющих каждое ровно N деревьев, и пусть при $n, N \rightarrow \infty$ целое неотрицательное $k = k(n, N)$ меняется так, что $N - k \rightarrow \infty$,

$$0 < \delta_0 \leq \delta = \frac{n - N - kr}{N - k} \leq \delta_1 < \infty,$$

где δ_0, δ_1 — постоянные, причем $\delta_0 > 1$ при $r = 0$.

Тогда равномерно относительно $\delta \in [\delta_0, \delta_1]$

$$P\{\mu_r(\Sigma_n^{(N)}) = k\} = \binom{N}{k} (p_r(x_r))^k (1 - p_r(x_r))^{N-k} \times \frac{(n - N)! (\theta(x_r))^N}{N n^{n-N-1} x_r^n \sqrt{2\pi(N-k)\sigma_r^2}} (1 + O((N-k)^{-1})), \quad (14)$$

где параметры x_r и σ_r^2 определяются согласно (10)–(12) с заменой α на δ .

Замечание 1. Выбор параметра $x = x_r$ в процессе доказательства теоремы 1 обусловлен тем обстоятельством, что при другом значении x остаточный член в (13) будет иметь порядок $O((N-k)^{-1/2})$, что увеличивает относительную погрешность при использовании оценки, аналогичной (9).

Замечание 2. Теорема 1 позволяет оценить вероятность $P\{\mu_r(F_{n,N}) = k\}$ в области больших отклонений случайной величины $\mu_r(F_{n,N})$. Исключением является случай, когда при условиях этой теоремы

$$k = Np_r(x_r) + y\sqrt{N}, \quad |y| \leq C,$$

где C — положительная постоянная. В этом случае можно показать, что равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ и целых положительных k

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu_r(F_{n,N}) &= Np_r(x_r)(1 + O(N^{-1/2})), \\ \mathbf{D}\mu_r(F_{n,N}) &= N(\sigma^{(r)})^2(1 + O(N^{-1/2})), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} (\sigma^{(r)})^2 &= \frac{\sigma_r^2}{\sigma^2}(1 - p_r(x_r))^2 p_r(x_r) > 0, \\ \sigma^2 &= \theta(x_r)(1 - \theta(x_r))^{-3} > 0. \end{aligned}$$

Кроме того, в этом случае

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_r(F_{n,N}) = k\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N(\sigma^{(r)})^2}} \\ &\times \exp\left(-\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{p_r(x_r)(1 - p_r(x_r))} - \frac{(r - \alpha)^2}{\sigma^2}\right)\right)(1 + O(N^{-1/2})) \end{aligned}$$

равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ и целых положительных

$$k = Np_r(x_r) + y\sqrt{N}, \quad |y| \leq C,$$

где C — положительная постоянная. Последний результат, как нетрудно проверить, является частным случаем доказанной Ю. Л. Павловым в [2] локальной нормальной теоремы для случайной величины $\mu_r(F_{n,N})$.

Замечание 3. Чтобы решить уравнение (10) с любой заданной степенью точности, следует положить

$$\theta(x) = t, \quad \theta(x_r) = t_r, \quad r = 0, 1, \dots$$

В этих обозначениях согласно (10) и условиям теоремы 1 $t = t_r$ — единственный корень уравнения

$$\frac{t}{1-t} = \alpha + \frac{(r-\alpha)(r+1)^{r-1}}{r!} t^r e^{-(r+1)t}, \quad (15)$$

принадлежащий интервалу $(0, 1)$. Найдя из (15) значение t_r стандартными методами, далее используем соотношение

$$x_r = t_r e^{-t_r}.$$

Если учесть, что согласно (10), (12)

$$\gamma_r = t_r(1 - t_r)^{-1}, \quad r = 0, 1, \dots,$$

то можно вычислить дисперсию σ_r^2 в (11), а также дисперсии $\sigma^2 = t_r(1 - t_r)^{-3}$ и $(\sigma^{(r)})^2$.

Так, например, если $n = 10$, $N = 8$, $r = 0$, то $t_0 = 0,141899\dots$ с точностью до 10^{-6} , и оценка вероятности $\mathbf{P}\{\mu_0(F_{10,8}) = 0\}$ по формулам (9)–(12) при $k = 0$ дает величину $2,0110 \cdot 10^{-4}$ вместо значения $1,9285 \cdot 10^{-4}$ (все 5 знаков верны).

Если же $n = 10$, $r = 0$, $N = 60$, $k = 52$, то оценка вероятности $\mathbf{P}\{\mu_0(F_{10,60}) = 52\}$ дает величину 0,3372 вместо 0,3234 (с точностью до 10^{-4}). В то же время использование локальной нормальной теоремы (см. замечание 2) в хорошем случае, когда u достаточно мало (при наших условиях u принимает значение близкое к $-0,008$) дает оценку 0,3388 (с той же точностью).

Замечание 4. Используя метод моментов, нетрудно убедиться в том, что если $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$N \left(\frac{n}{N} \right)^r \rightarrow \frac{\lambda r!}{(r+1)^{r-1}},$$

где $\lambda > 0$, то случайная величина $\mu_r(F_{n,N})$ распределена в пределе по закону Пуассона с параметром λ , $r = 2, 3, \dots$. Такое же заключение справедливо, если $n, N, r \rightarrow \infty$ так, что $r = o(\sqrt{n})$ и

$$N \left(\frac{n}{n+N} \right)^r \exp \left(\frac{(r+1)N}{n+N} \right) r^{-3/2} \rightarrow \lambda \sqrt{2\pi},$$

где $\lambda > 0$.

Оба сформулированных результата, как несложно проверить, являются следствиями предельной теоремы пуассоновского типа, доказанной Ю. Л. Павловым в [2].

Теорема 2. Пусть $\eta(F_{n,N})$ — максимальный объем дерева в случайном лесе из $F_{n,N}$, и пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (8), причем

$$\beta_1 < e^{-1} S'_r(e^{-1})(S_r(e^{-1}))^{-1}. \quad (16)$$

Тогда равномерно относительно $\beta_1 \in [\beta_0, \beta_1]$

$$\mathbf{P}\{\eta(F_{n,N}) \leq r\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N(\sigma_r^*)^2}} \frac{n!(S_r(x_r^*))^N}{N(n+N)^{n-1}(x_r^*)^n} (1 + O(N^{-1})), \quad (17)$$

где x_r^* — единственный корень уравнения

$$x S'_r(x)(S_r(x))^{-1} = \beta, \quad (18)$$

принадлежащий интервалу $(0, e^{-1})$,

$$S_r(x) = \sum_{m=0}^r \frac{(m+1)^{m-1}}{m!} x^m, \quad (19)$$

$$(\sigma_r^*)^2 = (x_r^*)^2 S''_r(x_r^*)(S_r(x_r^*))^{-1} + \beta(1-\beta) > 0. \quad (20)$$

Доказательство. Используем для вероятности $\mathbf{P}\{\eta(F_{n,N}) \leq r\}$ приведенную выше формулу, полагая $x = x_r^*$. Поскольку функция

$$f(x) = x S'_r(x)(S_r(x))^{-1}$$

непрерывна и строго возрастает на интервале $(0, e^{-1})$ от 0 до значения $f(e^{-1})$, согласно (8), (16) уравнение (18) имеет единственный корень $x_r^* \in (0, e^{-1})$. При этом согласно (5) и (19) при $x = x_r^*$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \leq r\} = e^{-\theta(x_r^*)} S_x(x_r^*), \quad (21)$$

и при $k = 0, 1, \dots, r$

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = k\} = \frac{(k+1)^{k-1}}{k!} (x_r^*)^k (S_r(x_r^*))^{-1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\tilde{\xi}_1^{(r)} &= x_r^* S_r'(x_r^*) (S_r(x_r^*))^{-1} = \beta, \\ \mathbf{E}(\tilde{\xi}_1^{(r)} + \dots + \tilde{\xi}_N^{(r)}) &= n. \end{aligned}$$

Используя метод перевала, получаем, что равномерно относительно $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} + \dots + \tilde{\xi}_N^{(r)} = n\} \frac{1}{\sqrt{2\pi N(\sigma_r^*)^2}} (1 + O(N^{-1})), \quad (22)$$

где, как легко проверить, $\mathbf{D}\tilde{\xi}_1^{(r)} = (\sigma_r^*)^2$ и значение $(\sigma_r^*)^2$ определяется равенством (20).

Далее, при $x = x_r^*$ из (1), (2) следует, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\} = \frac{N(n + N)^{n-1} (x_r^*)^n}{n!} \exp(-N\theta(x_r^*)). \quad (23)$$

Подставляя значения вероятностей из (21)–(23) в указанную выше формулу, получаем оценку (17).

Теорема 2 доказана.

В практических расчетах оценка (17) оказывается весьма точной даже при небольших значениях n , N . Если взять, например, $r = 2$, $n = 6$, $N = 18$, то формула (17) дает оценку 0,6508 вместо значения $\mathbf{P}\{\eta(F_{6,18}) \leq 2\} = 0,6374 \dots$. В то же время использование соответствующей оценки из [5] при указанных условиях дает значение 0,4081.

Следствие 2. Пусть $\eta(\Sigma_n^{(N)})$ – максимальный объем дерева в графе отображения, выбираемого так же, как в следствии 1, и пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$1 < \beta_0 \leq \beta = n/N \leq \beta_1 < 1 + e^{-1} S_r'(e^{-1}) (S_r(e^{-1}))^{-1},$$

где β_0, β_1 – постоянные. Тогда равномерно относительно $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta(\Sigma_n^{(N)}) \leq r\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N(\sigma_r^*)^2}} (n - N)! \\ &\times (S_r(x_r^*))^N N^{-1} n^{N+1-n} (x_r^*)^{N-n} (1 + O(N^{-1})), \end{aligned} \quad (24)$$

где $r = 1, 2, \dots$, параметры x_r^* и $(\sigma_r^*)^2$ определяются из (18), (20) с заменой β на $\beta - 1$.

Оценка (24) следует из (17) с учетом соотношения из [1]

$$\mathbf{P}\{\eta(\Sigma_n^{(N)}) \leq r\} = \mathbf{P}\{\eta(F_{n-N, N}) \leq r\}, \quad r = 1, 2, \dots$$

Список литературы

1. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
2. Павлов Ю. Л., Предельные теоремы для числа деревьев заданного объема в случайном лесе. *Матем. сб.* (1977) **103**, №3, 392–403.
3. Павлов Ю. Л., *Случайные леса*. Карельский научн. центр, Петрозаводск, 1996.
4. Pavlov Yu. L., Random forests. In: *Probab. Methods in Discrete Math.* VSP, Utrecht, 1997, pp. 11–18.
5. Павлов Ю. Л., Асимптотическое распределение максимального объема дерева в случайном лесе. *Теория вероятностей и ее применения* (1977) **22**, №3, 523–533.
6. Макаров Г. Д., Большие отклонения высоты случайного дерева. *Дискретная математика* (1993) **5**, №2, 116–125.
7. Тимашев А. Н., Случайные разбиения множеств с известным числом блоков. *Дискретная математика* (2003) **15**, №2, 138–148.

Статья поступила 09.06.2004.