Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Шаповалов, Распределения чисел конечных подграфов в случайных неоднородных гиперграфах, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 3, 102–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm63>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:35:04

Распределения чисел конечных подграфов в случайных неоднородных гиперграфах

© 2006 г. А. В. Шаповалов

Рассматриваются два случайных гиперграфа с n вершинами и $M = M(n)$ ребрами, из которых $M_i = M_i(n)$ ребер состоят из i неупорядоченных вершин, $i = 0, 1, \dots, m$, $M = M_0 + M_1 + \dots + M_m$. Выбор вершин для каждого ребра осуществляется случайно, равномерно из n возможных вершин, для первого случайного гиперграфа по схеме с возвращением, для второго по схеме без возвращения. Исследуются распределения чисел подграфов, изоморфных заданному, при $n \rightarrow \infty$, $M = M(n)$. Понятия степени и сбалансированности графов распространены на неоднородные гиперграфы. Получена предельная многомерная пуассоновская теорема для чисел строго сбалансированных подграфов, имеющих одинаковую степень. Построена пороговая функция свойства, заключающегося в наличии подграфа, изоморфного произвольному конечному гиперграфу. Для случайных графов такие результаты получены в работах Эрдёша, Реньи, Боллобаша, для случайных однородных гиперграфов (то есть при $M = M_m$) — в работах автора.

1. Формулировка основных результатов

Один из эффективных методов изучения характеристик случайных систем уравнений предполагает использование структурных свойств случайных графов и случайных гиперграфов (см. [4, 5, 9]). В данной работе продолжается начатое в [9] исследование случайных неоднородных гиперграфов, которое в дальнейшем позволит получить широкий спектр асимптотических результатов для случайных линейных и нелинейных систем уравнений.

Под случайным гиперграфом понимается случайный элемент (см. [3]), принимающий значения в некотором множестве гиперграфов в соответствии с некоторой вероятностной мерой. Это множество гиперграфов называется множеством реализаций случайного гиперграфа. Рангом ребра будем называть число инцидентных ему вершин. Число элементов в конечном множестве Z будем, как обычно, обозначать $|Z|$.

Изучаемые случайные гиперграфы имеют n вершин и M ребер. Пусть m — фиксированное натуральное число, $m \geq 2$ и

$$0 \leq c_0 < 1, \quad 0 \leq c_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad c_0 + \dots + c_m = 1.$$

Множество реализаций случайного гиперграфа $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$ состоит из гиперграфов с множеством вершин X и M ребрами, из которых M_i имеют ранг i , $i = 0, 1, \dots, m$, $m \geq 1$, $M_0 + M_1 + \dots + M_m = M$, $|X| = n$ (в контексте данного определения полагается

$\bar{M} = (M_0, M_1, \dots, M_m)$. Вершины в ребрах неупорядочены, среди них могут быть совпадающие (применяется выборка вершин по схеме с возвращением), ребра с одинаковыми степенями различимы (или упорядочены, занумерованы). Вероятности всех реализаций одинаковы и равны $\prod_{i=1}^m \binom{n+i-1}{i}^{-M_i}$ (см. [6], с. 220). Такое определение эквивалентно следующей часто используемой форме определения случайного гиперграфа: для каждого i , $i = 0, 1, \dots, m$, последовательно случайно и равновероятно выбираются M_i ребер с рангом i из всех возможных $\binom{n+i-1}{i}$ ребер, имеющих ранг i . Ребра, имеющие ранг ноль, все одинаковы.

Случайный гиперграф $MG_{n, \bar{M}}$ определяется аналогично $M\hat{G}_{n, \bar{M}}$ с единственным отличием: выбор i переменных осуществляется не из $\binom{n+i-1}{i}$, а из $\binom{n}{i}$ равновероятных вариантов (выборка без возвращения). Вероятности реализаций случайного гиперграфа $MG_{n, \bar{M}}$ одинаковы и равны $\prod_{i=1}^m \binom{n}{i}^{-M_i}$.

Свойства случайных гиперграфов изучаются при $n \rightarrow \infty$, когда M зависит от n некоторым образом, то есть $M = M(n)$, а числа ребер с рангом i следующим образом связаны с константами c_i : если $c_i = 0$, то $M_i = 0$, если $c_i > 0$, то $M_i \sim c_i M$, $i = 1, \dots, m$. Все асимптотические формулы приводятся при $n \rightarrow \infty$.

Под вероятностью $\mathbf{P}(Q)$ свойства Q реализаций некоторого случайного гиперграфа понимается сумма вероятностей реализаций этого случайного гиперграфа, обладающих свойством Q . Эрдёш и Реньи в [13] при изучении случайных графов обнаружили, что многие свойства обладают пороговыми функциями, определяемыми в рассматриваемом случае следующим образом. Если существует функция $Q(n)$, возрастающая при $n \rightarrow \infty$ и такая, что вероятность свойства Q удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Q) = \begin{cases} 1 & \text{при } M(n)/Q(n) \rightarrow \infty, \\ 0 & \text{при } M(n)/Q(n) \rightarrow 0, \end{cases}$$

то такая функция называется пороговой функцией свойства Q , или порогом свойства Q в случайном гиперграфе.

Если свойство гиперграфа, заключающееся в наличии в его реализациях подграфов, изоморфных некоторому гиперграфу (одному из элементов некоторого множества гиперграфов) имеет пороговую функцию, будем называть ее пороговой функцией этого гиперграфа (множества гиперграфов).

Гиперграф называется I -графом, если он содержит l_i ребер, имеющих ранг i , $i = 0, 1, \dots, m$, где $\mathbf{l} = (l_0, l_1, \dots, l_m)$ (см. [9]). Говоря об I -графах, будем полагать, что $l_0 + l_1 + \dots + l_m = l$. Степенью (средневзвешенной) I -графа H с k вершинами назовем величину $D(H) = (\sum_{i=1}^m i l_i - k) / l$. Условие $k \neq \sum_{i=1}^m i l_i$ выполняется всегда, за исключением неинтересного случая, когда гиперграф состоит из попарно непересекающихся ребер. Максимальной (средневзвешенной) степенью $D_m(H)$ гиперграфа H будем называть максимальное значение степеней всех его собственных подграфов. Гиперграф сбалансирован и строго сбалансирован, если его степень, соответственно, не меньше и строго больше его максимальной степени. Будем называть ребро простым, если все инцидентные ему вершины различны, и особым в противном случае. Гиперграф H , являющийся I -графом, будем называть допустимым в реализациях случайного гиперграфа, если $c_i > 0$ для каждого $l_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Это означает, что в реализациях случайных гиперграфов имеются ребра со всеми рангами, которые имеют ребра гиперграфа H .

Теорема 1. *Непустой конечный класс конечных гиперграфов $\mathcal{B}_D$, допустимых в реализациях одного из случайных гиперграфов $MG_{n, \bar{M}}$, $M\hat{G}_{n, \bar{M}}$ и имеющих максимальную степень D , имеет пороговую функцию n^D .*

Следствие 1. Пусть в условиях теоремы 1 $\mathfrak{B}_D = \{H_1, \dots, H_t\}$ и $\zeta_n^{(j)}$ — число допустимых H_j -графов в реализациях случайного гиперграфа $MG_{n,\bar{M}}$ или $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$, $j = 1, 2, \dots, t$. Тогда при $M(n)/n^D \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\zeta_n^{(j)} \geq \mathbf{E}\zeta_n^{(j)}/2) = 1 + o(1), \quad \mathbf{E}\zeta_n^{(j)} \rightarrow \infty.$$

Следствие 2. В случайных гиперграфах $MG_{n,\bar{M}}$, $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$ при $c_s + \dots + c_m > 0$ пороговая функция гиперграфа, состоящего из двух простых ребер, пересекающихся по $s \geq 1$ вершинам, равна $n^{s/2}$.

Следствие 3. В случайных гиперграфах $MG_{n,\bar{M}}$, $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$ пороговая функция допустимого гипердерева, имеющего $l \geq 1$ ребер, равна $n^{1-1/l}$.

Следствие 4. В случайных гиперграфах $MG_{n,\bar{M}}$, $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$ при $c_0 + c_1 = 0$ пороговая функция связного конечного гиперграфа с единственным циклом равна n .

Следствие 5. В случайном гиперграфе $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$ при $c_s > 0$, $1 \leq r \leq s-1$, $2 \leq s \leq t$, особое ребро ранга s , состоящее из $s-r$ вершин (как элементов множества X), имеет пороговую функцию, равную n^r .

Теорема 2. Пусть $H_1, H_2, \dots, H_t$ — фиксированные неизоморфные строго сбалансированные гиперграфы, допустимые в реализациях случайных гиперграфов $MG_{n,\bar{M}}$ и $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$, причем H_j имеет $k^{(j)}$ вершин и $l^{(j)} = \sum_{i=1}^m l_i^{(j)}$ ребер, где $l_i^{(j)}$ — число ребер ранга i , $i = 1, 2, \dots, m$, $a^{(j)}$ — порядок группы автоморфизмов, все гиперграфы имеют одинаковую степень $D > 0$, $m \geq 1$, $\zeta_n^{(j)}$ — число H_j -графов в рассматриваемых случайных гиперграфах, $j = 1, 2, \dots, t$.

Тогда при $M \sim cn^D$, где c — положительная постоянная, для любого натурального t распределение векторной случайной величины $(\zeta_n^{(1)}, \zeta_n^{(2)}, \dots, \zeta_n^{(t)})$ слабо сходится к многомерному распределению Пуассона с независимыми компонентами и вектором средних значений $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t)$, а для любых целых неотрицательных $s, t_1, t_2, \dots, t_s$, для которых $t_1 + t_2 + \dots + t_s = t$, распределение векторной случайной величины

$$\left(\sum_{j=1}^{t_1} \zeta_n^{(j)}, \sum_{j=t_1+1}^{t_1+t_2} \zeta_n^{(j)}, \dots, \sum_{j=t_1+t_2+\dots+t_{s-1}+1}^t \zeta_n^{(j)} \right)$$

слабо сходится к многомерному распределению Пуассона с независимыми компонентами и вектором средних значений

$$\left(\sum_{j=1}^{t_1} \lambda_j, \sum_{j=t_1+1}^{t_1+t_2} \lambda_j, \dots, \sum_{j=t_1+t_2+\dots+t_{s-1}+1}^t \lambda_j \right),$$

где

$$\lambda_j = \frac{c^{l^{(j)}}}{a^{(j)}} \prod_{i=1}^m (i!c_i)^{l_i^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \dots, t.$$

Пороговая функция для класса сбалансированных графов получена в [13], для класса сбалансированных однородных гиперграфов анонсирована в [1], для произвольного, вообще говоря, не обязательно конечного графа в [11, 12], для произвольного конечного

однородного гиперграфа в [7]. Ее изменение можно проследить на примере пороговой функции гиперграфа H в $MG_{n,\bar{M}}$. В соответствии с теоремой 1 пороговая функция гиперграфа H в случайном неоднородном гиперграфе $MG_{n,\bar{M}}$ равна $n^{(\sum_{i=1}^m i l_i - k)/l}$, где l_i — число ребер ранга i в подграфе гиперграфа H , имеющем максимальную степень, $i = 1, 2, \dots, m$; k — число вершин в этом подграфе. Для случайного однородного гиперграфа при $c_m = 1$ получаем пороговую функцию $n^{m-k/l}$, где k и l — числа вершин и ребер в подграфе гиперграфа H , имеющем максимальную степень. При $c_2 = 1$ отсюда получается пороговая функция $n^{2-k/l}$ для случайного графа.

Следствие 1 вносит существенное дополнение к пороговым свойствам конечных подграфов: при $M(n)/n^D \rightarrow \infty$ реализации рассматриваемых случайных гиперграфов не только содержат хотя бы один H_j -граф, но их число стремится к бесконечности со стремляющейся к единице вероятностью при $n \rightarrow \infty$.

Первые результаты о пуассоновском распределении чисел строго сбалансированных графов в случайном графе опубликованы в [11, 12]. При развитии другого подхода доказательства результатов такого вида в [10] применена техника нормальной аппроксимации Стейна [14]. Обобщения на случайные однородные гиперграфы получены в [8].

Для доказательства теоремы 1 получаются оценки среднего и дисперсии числа изучаемых подграфов и применяются неравенства Маркова, Чебышёва. Доказательство теоремы 2 проводится методом моментов.

Обзоры работ по случайным графам и гиперграфам можно найти в [4, 5, 7, 9, 12, 13], определения из теории гиперграфов в [2, 7–9].

2. Доказательства утверждений

Будем обозначать $V(F)$ и $R(F)$ множества вершин и ребер гиперграфа F , $R_i(F)$ множество его ребер, имеющих ранг i , $i = 0, 1, \dots, m$.

Введем определение декомпозиции гиперграфа, обобщая соответствующее определение декомпозиции для графа и однородного гиперграфа в смысле Боллоба (см. [7, 11, 12]). Пусть H — подграф гиперграфа F , и F имеет на k^* вершин и на l_i^* ребер ранга i больше, чем H , $i = 1, 2, \dots, m$. Дополнительной (средневзвешенной) степенью гиперграфа F над H назовем величину

$$D(F | H) = \left(\sum_{i=1}^m i l_i^* - k^* \right) / l^*.$$

Максимальной (средневзвешенной) дополнительной степенью гиперграфа F над H будем называть максимальное значение дополнительных степеней всех подграфов гиперграфа F над H :

$$m(F | H) = \max\{D(F | H): H \subset F' \subset F, V(H) \neq V(F')\}.$$

Определим последовательность подграфов гиперграфа F : F_1 — подграф, имеющий степень, равную максимальной степени гиперграфа F , то есть $D(F_1) = D_m(F)$, причем F_1 не имеет собственных подграфов, обладающих таким свойством. Гиперграф F_{i+1} определяется следующим образом:

$$V(F_i) \subset V(F_{i+1}) \neq V(F), \quad V(F_{i+1}) \neq V(F_i), \quad D(F_{i+1} | F_i) = m(F | F_i).$$

Полученную таким образом последовательность $F_1, F_2, \dots, F_t$, где $F_t = F$, будем называть декомпозицией гиперграфа F . Из определения следует, что

$$D(F_1) = D_m(F) \geq D(F_2 | F_1) \geq D(F_3 | F_2) \geq \dots \geq D(F_t | F_{t-1})$$

и то, что не все гиперграфы имеют единственную декомпозицию.

2.1. Доказательство теоремы 1 и следствий

Проведем доказательство для $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$. Для второго случайного гиперграфа доказательство полностью повторяется с заменой в формулах величин $\binom{n+i-1}{i}$ на величины $\binom{n}{i}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Рассмотрим гиперграф F , имеющий подграф F_0 , причем F имеет на $k \geq 1$ вершин и l_i ребер ранга i больше, чем F_0 , $i = 1, 2, \dots, m$, и F — единственный подграф в F с максимальной дополнительной степенью над F_0 :

$$m(F | F_0) = D(F | F_0) = \left(\sum_{i=1}^m i l_i - k \right) / l.$$

Гиперграф F допустим в реализациях случайного гиперграфа $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$, поэтому $l_i = 0$ при $c_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Пусть $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ и

$$|V_2| = n_2 \sim \theta_2 n, \quad \theta_2 > 0, \quad M/n_2^{(\sum_{i=1}^m i l_i - k)/l} \rightarrow \infty$$

при $n \rightarrow \infty$, и пусть $\tilde{F}_0$ — фиксированный F_0 -гиперграф, множество вершин $V(\tilde{F}_0)$ которого лежит в V_1 .

Докажем, что вероятность того, что имеющие подграф $\tilde{F}_0$ реализации случайного гиперграфа $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$, содержат F -граф H , имеющий этот подграф $\tilde{F}_0$, стремится к единице, то есть, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_M \{ M\hat{G}_{n,\bar{M}} \supset H \supset \tilde{F}_0 : H \cong F \mid M\hat{G}_{n,\bar{M}} \supset \tilde{F}_0 \} = 1. \quad (1)$$

Из определения F следует, что $k \leq \sum_{i=1}^m i l_i$, причем равенство достигается в том и только том случае, когда l_i ребер ранга i , $i = 0, 1, \dots, m$, о которых идет речь в определении F , изолированы в F (то есть каждое из этих ребер не инцидентно остальными ребрам F). Учитывая замечание о соотношении величин c_i и l_i , убеждаемся в очевидности утверждения формулы (1) при условии, что $k = \sum_{i=1}^m i l_i$. Поэтому далее в доказательстве рассматриваем случай $k < \sum_{i=1}^m i l_i$.

Рассмотрим вероятностное пространство, элементами которого являются все реализации случайного гиперграфа $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$, имеющие на множестве вершин $V(\tilde{F}_0)$ подграф $\tilde{F}_0$. Введем на нем равномерную меру и обозначим соответствующий гиперграф через $M\hat{G}_{n,\bar{M}}(\tilde{F}_0)$. Несложно убедиться, что $M\hat{G}_{n,\bar{M}}(\tilde{F}_0)$ имеет $\prod_{i=1}^m \binom{n+i-1}{i}^{M_i - l_i^{(0)}}$ реализаций, где $l_i^{(0)}$ — число ребер ранга i в F_0 , $i = 0, 1, \dots, m$. Для рассматриваемой нами вероятности справедлива оценка

$$\mathbf{P}_M \{ M\hat{G}_{n,\bar{M}} \supset H \supset \tilde{F}_0 : H \cong F \mid M\hat{G}_{n,\bar{M}} \supset \tilde{F}_0 \} = \mathbf{P}_M \{ M\hat{G}_{n,\bar{M}}(\tilde{F}_0) \supset H \supset \tilde{F}_0 : H \cong F \}. \quad (2)$$

Для доказательства формулы (1) достаточно получить оценку для правой части последнего равенства при $n \rightarrow \infty$. Обозначим через ζ_n число F -графов в случайном графе $M\hat{G}_{n,\bar{M}}(\tilde{F}_0)$ таких, что $H \supset \tilde{F}_0$, $V(H) \setminus V(\tilde{F}_0) \subset V_2$ и существует изоморфизм гиперграфов H и F , отображающий $\tilde{F}_0$ в F_0 . Среднее значение случайной величины ζ_n определяется формулой

$$\mathbf{E}\zeta_n = \binom{n_2}{k} t \prod_{i=1}^m \left((M_i - l_i^{(0)})_{l_i} \binom{n+i-1}{i}^{M_i - l_i^{(0)} - l_i} \binom{n+i-1}{i}^{-(M_i - l_i^{(0)})} \right).$$

Действительно, число способов выбора недостающих k вершин из множества V_2 для H -графов равно $\binom{n_2}{k}$; $t \geq 1$ — константа, зависящая только от F и F_0 , равная числу размещений l_i ребер ранга i из $\{R(F) \setminus R(\tilde{F}_0)\}$, $i = 0, 1, \dots, m$, так, чтобы получившиеся H -графы были различными (без учета меток ребер); $(M_i - l_i^{(0)})_{l_i}$ — число способов выбора номеров для этих l_i ребер ранга i из $M_i - l_i^{(0)}$ номеров; $\binom{n+i-1}{i}^{M_i - l_i^{(0)} - l_i}$ — число вариантов выбора оставшихся $M_i - l_i^{(0)} - l_i$ ребер ранга i ; $\prod_{i=1}^m \binom{n+i-1}{i}^{M_i - l_i^{(0)}}$ — общее число гиперграфов в $M\hat{G}_{n,\bar{M}}(\tilde{F}_0)$.

Убеждаемся, что

$$\mathbf{E}\zeta_n \sim t \frac{n_2^k}{k!} \prod_{i=1}^m \left(\frac{i! M_i}{n^i} \right)^{l_i} = \theta_2^k \frac{t}{k!} \prod_{i=1}^m (i! c_i)^{l_i} \left(\frac{M}{n^{(\sum_{i=1}^m i l_i - k)/l}} \right)^l.$$

Следовательно, в условиях леммы $\mathbf{E}\zeta_n \rightarrow \infty$.

Второй факториальный момент случайной величины ζ_n равен математическому ожиданию числа всех упорядоченных пар (H_1, H_2) в F -графах, удовлетворяющих условиям

$$H_i \supset \tilde{F}_0, \quad \{V(H_i) \setminus V(\tilde{F}_0)\} \subset V_2, \quad i = 1, 2, \quad H_1 \neq H_2$$

(при этом ребра учитываются вместе с метками).

Пусть Σ_1 — сумма математических ожиданий таких пар (H_1, H_2) в F -графах, для которых $V(H_1) \cap V(H_2) = V(\tilde{F}_0)$. Тогда

$$\Sigma_1 = \binom{n_2}{k} \binom{n_2 - k}{k} t^2 \prod_{i=1}^m \left((M_i - l_i^{(0)})_{2l_i} \binom{n+i-1}{i}^{-2l_i} \right) \sim (\mathbf{E}\zeta_n)^2.$$

Рассмотрим теперь подграфы H_1, H_2 , для которых

$$|V(H_1) \cap V(H_2) \cap V_2| = s \geq 1,$$

$$0 \leq |\{R_i(H_1) \cap R_i(H_2)\} \setminus R_i(\tilde{F}_0)| = r_i < l_i,$$

причем под пересечением множеств ребер понимаются ребра, имеющие не только одинаковые множества вершин, но и номера. Среднее значение числа таких пар (H_1, H_2) в F -графах, для которых $s \geq 1$, оценивается сверху величиной

$$t^2 \sum_{s=1}^k \binom{n_2}{k} \binom{n_2 - k}{k - s} \binom{k}{s} \prod_{i=1}^m \left((M_i - l_i^{(0)})_{2l_i} \binom{n+i-1}{i}^{-2l_i} \right) = O\left(\frac{1}{n} (\mathbf{E}\zeta_n)^2\right)$$

при $r_1 + \dots + r_m = r = 0$ и величиной

$$\sum_{1 \leq r_1 + \dots + r_m < l} t^2 \sum_{1 \leq s \leq k} \binom{n_2}{k} \binom{n_2 - k}{k - s} \binom{k}{s} \prod_{i=1}^m \left((M_i - l_i^{(0)})_{2l_i - r_i} \binom{n + i - 1}{i}^{-(2l_i - r_i)} \right)$$

при $1 \leq r = r_1 + \dots + r_m < l$. Тогда для

$$\Sigma_2 = \mathbf{E}\zeta_n^{[2]} - \Sigma_1$$

справедлива оценка

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= O\left(\frac{1}{n}(\mathbf{E}\zeta_n)^2\right) + O\left(\left(\frac{M \sum_{i=1}^m l_i}{n \sum_{i=1}^m i l_i - k}\right)^2 \sum_{r_1 + \dots + r_m = 1}^{l-1} \frac{n \sum_{i=1}^m i r_i - s}{M \sum_{i=1}^m r_i}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n}(\mathbf{E}\zeta_n)^2\right) + O\left(\left(\frac{M}{n \sum_{i=1}^m i l_i - k/l}\right)^{2l} \sum_{r_1 + \dots + r_m = 1}^{l-1} \left(\frac{n \sum_{i=1}^m i r_i - s}{M}\right)^r\right). \end{aligned}$$

Так как F — единственный подграф в F с максимальной дополнительной степенью над F_0 , заключаем, что

$$\left(\sum_{i=1}^m i r_i - s\right)/r < \left(\sum_{i=1}^m i l_i - k\right)/l$$

и $M/n \sum_{i=1}^m i r_i - s/r \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $\Sigma_2 = o((\mathbf{E}\zeta_n)^2)$, откуда $\mathbf{D}\zeta_n = o((\mathbf{E}\zeta_n)^2)$ и с помощью неравенства Чебышёва получаем, что $\mathbf{P}(\zeta_n = 0) \rightarrow 0$, так как

$$\mathbf{P}(\zeta_n = 0) \leq \mathbf{P}\left(|\zeta_n - \mathbf{E}\zeta_n| \geq \frac{\mathbf{E}\zeta_n}{2}\right) \leq \frac{4\mathbf{E}\zeta_n}{(\mathbf{E}\zeta_n)^2}$$

и $\mathbf{E}\zeta_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Теперь формула (1) следует из формулы (2). Отсюда следует также, что при $M/n^D \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$\mathbf{P}\left(\zeta_n \geq \frac{\mathbf{E}\zeta_n}{2}\right) = 1 + o(1). \quad (3)$$

Докажем теорему для класса гиперграфов, состоящего из одного элемента. Общий случай будет следовать из этого частного случая в результате рассмотрения гиперграфа, состоящего из объединения гиперграфов, входящих в класс $\mathcal{B}_D$.

Рассмотрим декомпозицию $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_t = F$ гиперграфа F . Не ограничивая общности, можем считать, что F_i — единственный подграф в F_i , имеющий максимальную дополнительную степень над F_{i-1} , $i = 2, 3, \dots, t$. Пусть η_n — число F_1 -графов, являющихся l -графами на k вершинах в случайном гиперграфе. Тогда

$$\mathbf{E}\eta_n = \binom{n}{k} \frac{k!}{a} \prod_{i=1}^m \left((M_i)_{l_i} \binom{n + i - 1}{i}^{-l_i} \right),$$

где a — порядок группы автоморфизмов гиперграфа F_1 , $R_i(F_1) = l_i$, $i = 1, 2, \dots, m$. Следовательно,

$$\mathbf{E}\eta_n \sim \frac{1}{a} \prod_{i=1}^m (i! c_i)^{l_i} \left(\frac{M}{n \sum_{i=1}^m i l_i - k/l} \right)^l$$

и при $M/n(\sum_{i=1}^m i l_i - k)/l \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ с помощью неравенства Маркова убеждаемся в справедливости первой части теоремы:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\eta_n \geq 1) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \eta_n = 0$$

(если нет F_1 -графов, то F -графов тем более нет).

Пусть теперь $M/n(\sum_{i=1}^m i l_i - k)/l \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Разобьем множество вершин V на t непересекающихся частей $V_1, V_2, \dots, V_t$ таких, что

$$\bigcup_{i=1}^t V_i = V, \quad |V_j| \sim n/t, \quad j = 1, 2, \dots, t.$$

Из (1) следует, что для $i = 2, 3, \dots, t$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(M \hat{G}_{n, \bar{M}} \left[\bigcup_{j=1}^i V_j \right] \supset F_i \mid M \hat{G}_{n, \bar{M}} \left[\bigcup_{j=1}^{i-1} V_j \right] \supset F_{i-1} \right) = 1.$$

Здесь $M \hat{G}_{n, \bar{M}} \left[\bigcup_{j=1}^i V_j \right] \supset F_i$ — событие, заключающееся в том, что на множестве вершин $\bigcup_{j=1}^i V_j$ случайного гиперграфа $M \hat{G}_{n, \bar{M}}$ имеется F_i -граф. Проведя необходимые выкладки (как и при доказательстве формулы (1)), убеждаемся, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M \hat{G}_{n, \bar{M}} [V_1] \supset F_1) = 1.$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M \hat{G}_{n, \bar{M}} \supset F_t) = 1,$$

что завершает доказательство теоремы 1.

Утверждение следствия 1 получено в формуле (3). Для доказательства следствий 2—5 достаточно вычислить максимальные степени приведенных в них гиперграфов и воспользоваться теоремой 1.

2.2. Доказательство теоремы 2

Доказательство первой части утверждения теоремы 2 для случайного гиперграфа $M G_{n, \bar{M}}$ проведем методом моментов в многомерном случае. Для случайного гиперграфа $M \hat{G}_{n, \bar{M}}$ достаточно в этом доказательстве величины $\binom{n}{i}$ заменить на $\binom{n+i-1}{i}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Вторая часть утверждения следует из первой и аддитивного свойства распределения Пуассона.

Определим r -ю факториальную степень множества $\mathcal{B}$ как множество, элементами которого являются все упорядоченные наборы по r штук элементов $\mathcal{B}$, среди которых нет совпадающих. Обозначать это множество будем $\mathcal{B}^{[r]}$. Пусть $\mathcal{B}_j$ — множество всех H_j -графов в реализациях рассматриваемого случайного гиперграфа, $j = 1, 2, \dots, t$. Заномеруем элементы каждого из множеств $\mathcal{B}_j$ некоторым образом и обозначим их $S(v_i^{(j)})$, $i = 1, 2, \dots, b_j$, где $|\mathcal{B}_j| = b_j$. Если $I(v_i^{(j)})$ — случайная величина, равная индикатору

события, заключающегося в том, что в случайном гиперграфе имеется H_j -граф $S(v_i^{(j)})$, то

$$\xi_n^{(j)} = \sum_{i=1}^{b_j} I(v_i^{(j)}).$$

Введем обозначение $\bar{v}^{(j)} = (v_1^{(j)}, \dots, v_{r_j}^{(j)})$. Справедливо равенство

$$\mathbf{E} \xi_1^{[r_1]} \dots \xi_t^{[r_t]} = \sum \mathbf{E} I(v_1^{(1)}) \dots I(v_{r_1}^{(1)}) \dots I(v_1^{(t)}) \dots I(v_{r_t}^{(t)}),$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $\bar{v} = (\bar{v}^{(1)}, \dots, \bar{v}^{(t)})$, для которых соответствующие им наборы подграфов принадлежат декартову произведению факториальных степеней $\mathfrak{B}_1^{[r_1]} \times \dots \times \mathfrak{B}_t^{[r_t]}$.

Разобьем эту сумму на две, Σ_1 и Σ_2 . К первой из них отнесем слагаемые, соответствующие наборам индексов $\bar{v}$, которым соответствуют гиперграфы $S(v_1^{(1)}), \dots, S(v_{r_1}^{(1)}), \dots, S(v_1^{(t)}), \dots, S(v_{r_t}^{(t)})$, множества вершин которых не пересекаются, а ко второй — все остальные наборы. Тогда

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = & \binom{n}{r_1 k^{(1)}} \binom{n - r_1 k^{(1)}}{r_2 k^{(2)}} \dots \binom{n - r_1 k^{(1)} - \dots - r_{t-1} k^{(t-1)}}{r_t k^{(t)}} \\ & \times \prod_{j=1}^t \left(\frac{(r_j k^{(j)})!}{(a^{(j)})^{r_j}} \right) \prod_{i=1}^m \left((M_i)_{\sum_{j=1}^t r_j l_i^{(j)}} r_j l_i^{(j)} \binom{n}{i}^{-\sum_{j=1}^t r_j l_i^{(j)}} \right). \end{aligned}$$

Действительно, $\binom{n}{r_1 k^{(1)}}$ — число способов выбора вершин для r_1 непересекающихся H_1 -графов, $\binom{n - r_1 k^{(1)}}{r_2 k^{(2)}}$ — число способов выбора вершин для r_2 непересекающихся H_2 -графов так, чтобы они не имели общих вершин с уже выбранными $r_1 k^{(1)}$ вершинами, и так далее, наконец, $\binom{n - r_1 k^{(1)} - \dots - r_{t-1} k^{(t-1)}}{r_t k^{(t)}}$ — число способов выбора вершин для r_t непересекающихся H_t -графов так, чтобы они не имели общих вершин со всеми выбранными до этого вершинами; величины

$$(r_j k^{(j)})! / ((a^{(j)})^{r_j}) = (r_j k^{(j)})! (k^{(j)})!^{r_j} / ((k^{(j)})!^{r_j} (a^{(j)})^{r_j}), \quad j = 1, 2, \dots, t,$$

равны числам различных способов размещения без пересечений r_j упорядоченных H_j -графов на $r_j k^{(j)}$ вершинах; $(M_i)_{\sum_{j=1}^t r_j l_i^{(j)}}$, $i = 1, 2, \dots, m$, — число различных вариантов выбора $\sum_{j=1}^t r_j l_i^{(j)}$ ребер ранга i с учетом их порядка для H_j -графов, $j = 1, \dots, t$; произведение $\prod_{i=1}^m \binom{n}{i}^{-\sum_{j=1}^t r_j l_i^{(j)}}$ получается как отношение величины $\prod_{i=1}^m \binom{n}{i}^{M_i - \sum_{j=1}^t r_j l_i^{(j)}}$, равной числу вариантов выбора оставшихся $M_i - \sum_{j=1}^t r_j l_i^{(j)}$ ребер ранга i , $i = 1, 2, \dots, m$, в реализациях случайного гиперграфа $MG_{n, \bar{M}}$, к величине $\prod_{i=1}^m \binom{n}{i}^{M_i}$, равной общему числу его реализаций.

Проводя необходимые преобразования, получаем, что

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &\sim \prod_{j=1}^t \left(\frac{n^{r_j k^{(j)}}}{(a^{(j)})^{r_j}} \right) \prod_{i=1}^m \left((i! c_i)^{\sum_{j=1}^t r_j l_i^{(j)}} n^{-\sum_{j=1}^t (r_j i l_i^{(j)})} M^{\sum_{j=1}^t r_j l_i^{(j)}} \right) \\ &= \prod_{j=1}^t \left(\frac{1}{(a^{(j)})^{r_j}} n^{r_j (k^{(j)} - \sum_{i=1}^m i l_i^{(j)})} M^{r_j \sum_{i=1}^m l_i^{(j)}} \prod_{i=1}^m \left((i! c_i)^{l_i^{(j)}} \right)^{r_j} \right) \\ &= \prod_{j=1}^t \left(\left(\frac{M}{n (\sum_{i=1}^m i l_i^{(j)} - k^{(j)}) / l^{(j)}} \right)^{l^{(j)}} \frac{\prod_{i=1}^m (i! c_i)^{l_i^{(j)}}}{a^{(j)}} \right)^{r_j}.\end{aligned}$$

Учитывая, что рассматриваемые гиперграфы $H_1, H_2, \dots, H_t$ строго сбалансированы, имеют одинаковую степень

$$D = \left(\sum_{i=1}^m i l_i^{(j)} - k^{(j)} \right) / l^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, t,$$

и $M \sim cn^D$, заключаем, что

$$\Sigma_1 \sim \lambda_1^{r_1} \dots \lambda_t^{r_t}.$$

Для завершения доказательства первой части теоремы нам достаточно убедиться в справедливости формулы $\Sigma_2 = o(1)$.

Пусть G_j и F_j — некоторые конечные допустимые в реализациях $MG_{n, \bar{M}}$ гиперграфы, F_j изоморфен одному из гиперграфов $H_1, \dots, H_t$.

Если $0 < |V(F_j) \cap V(G_j)| < |V(F_j)|$, то в силу строгой сбалансированности F_j справедливо неравенство

$$\frac{\sum_{i=1}^m i |R_i(F_j \cap G_j)| - |V(F_j \cap G_j)|}{|R(F_j \cap G_j)|} < \frac{\sum_{i=1}^m i |R_i(F_j)| - |V(F_j)|}{|R(F_j)|} = D,$$

откуда

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^m i |R_i(F_j \cap G_j)| - |V(F_j \cap G_j)| \right) |R(F_j)| \\ \leq \left(\sum_{i=1}^m i |R_i(F_j)| - |V(F_j)| \right) |R(F_j \cap G_j)| - 1,\end{aligned}$$

и

$$\sum_{i=1}^m i |R_i(F_j \cap G_j)| - |V(F_j \cap G_j)| \leq D |R(F_j \cap G_j)| - \frac{1}{|R(F_j)|}. \quad (4)$$

Если $|V(F_j) \cap V(G_j)| = 0$, то

$$\sum_{i=1}^m i |R_i(F_j \cap G_j)| - |V(F_j \cap G_j)| = D |R(F_j \cap G_j)| = 0.$$

В случае $|V(F_j) \cap V(G_j)| = |V(F_j)|$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^m i |R_i(F_j \cap G_j)| - |V(F_j \cap G_j)| \leq D |R(F_j \cap G_j)|.$$

Теперь рассмотрим произвольный из r -наборов

$$(F_1, \dots, F_r) = S(v_1^{(1)}), \dots, S(v_{r_t}^{(t)}),$$

по которым ведется суммирование в Σ_2 , $r = r_1 + \dots + r_t$. Введем обозначения

$$G_j = \bigcup_{i=j+1}^r F_i, \quad j = 0, 1, \dots, r-1.$$

При $k \geq 1$

$$|R_i(G_{k-1})| = |R_i(F_k \cup G_k)| = |R_i(F_k)| - |R_i(F_k \cap G_k)| + |R_i(G_k)|,$$

откуда

$$\left| R_i \left(\bigcup_{k=1}^r F_k \right) \right| = |R_i(G_0)| = \sum_{k=1}^r |R_i(F_k)| - \sum_{k=1}^{r-1} |R_i(F_k \cap G_k)|$$

и

$$\sum_{i=1}^m i |R_i(G_0)| = \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m i |R_i(F_k)| - \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{i=1}^m i |R_i(F_k \cap G_k)|.$$

Аналогично получаем формулы

$$|R(G_0)| = \sum_{i=1}^m |R_i(G_0)| = \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m |R_i(F_k)| - \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{i=1}^m |R_i(F_k \cap G_k)|,$$

$$|V(G_0)| = \sum_{k=1}^r |V(F_k)| - \sum_{k=1}^{r-1} |V(F_k \cap G_k)|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m i |R_i(G_0)| - |V(G_0)| &= \sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^m i |R_i(F_k)| - |V(F_k)| \right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{r-1} \left(\sum_{i=1}^m i |R_i(F_k \cap G_k)| - |V(F_k \cap G_k)| \right). \quad (5) \end{aligned}$$

Выше было показано, что для $k = 1, 2, \dots, t$

$$\sum_{i=1}^m i |R_i(F_k \cap G_k)| - |V(F_k \cap G_k)| \leq D |R(F_k \cap G_k)|, \quad (6)$$

однако в силу определения Σ_2

$$\left| \bigcup_{i=j+1}^r F_i \right| = v < k = r_1 k_1 + \dots + r_t k_t, \quad (7)$$

и существует хотя бы одно число j в множестве $\{1, 2, \dots, r-1\}$, для которого $0 < |V(F_j) \cap V(G_j)| < |V(F_j)|$, следовательно, для F_j и G_j справедливо неравенство (4). Из соотношений (4), (5), (6) получаем оценку

$$\sum_{i=1}^m i |R_i(G_0)| - |V(G_0)| \geq D \left(\sum_{k=1}^r |R(F_k)| - \sum_{k=1}^{r-1} |R(F_k \cap G_k)| \right) + \frac{1}{|R(F_j)|}.$$

Учитывая формулу

$$|R(G_0)| \leq \sum_{k=1}^t r_k |R(F_k)|$$

и полученную выше оценку для $|R(G_0)|$, получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^m i |R_i(G_0)| - |V(G_0)|}{|R(G_0)|} &\geq D + \frac{1}{|R(F_j)| |R(G_0)|} \\ &\geq D + \frac{1}{R_0 \sum_{k=1}^t r_k |R(F_k)|} > D, \end{aligned} \quad (8)$$

где R_0 — максимальное значение $R(F_k)$ для $k = 1, 2, \dots, t$.

Среднее значение числа наборов $(F_1, \dots, F_r)$ в сумме Σ_2 , удовлетворяющих условиям

$$\left| V \left(\bigcup_{k=1}^r F_k \right) \right| = v, \quad \left| R_i \left(\bigcup_{k=1}^r F_k \right) \right| = R_i^{(0)}, \quad i = 1, \dots, m,$$

сверху можно оценить величиной $A(n, v, R_1^{(0)}, \dots, R_m^{(0)})$, имеющей порядок

$$\binom{n}{v} \prod_{i=1}^m \binom{(M_i)_{R_i^{(0)}}}{i} \binom{n}{i}^{-R_i^{(0)}} = O \left(\left(\frac{M}{n^{\sum_{i=1}^m i R_i^{(0)} - v}} \right)^{\sum_{i=1}^m R_i^{(0)}} \right).$$

Из (7) следует, что

$$\left(\sum_{i=1}^m i R_i^{(0)} - v \right) / \sum_{i=1}^m R_i^{(0)} \geq D + \frac{1}{R_0 \sum_{k=1}^t r_k |R(F_k)|},$$

поэтому

$$\begin{aligned} A(n, v, R_1^{(0)}, \dots, R_m^{(0)}) &= O \left(\left(M n^{-(D+1/(R_0 \sum_{k=1}^t r_k |R(F_k)|))} \right)^{\sum_{i=1}^m R_i^{(0)}} \right) \\ &= O \left(n^{-\sum_{i=1}^m R_i^{(0)} / (R_0 \sum_{k=1}^t r_k |R(F_k)|)} \right) = o(1). \end{aligned}$$

Из этой оценки, учитывая, что набор параметров $\nu, R_1^{(0)}, \dots, R_m^{(0)}$ может принимать конечное число различных значений, убеждаемся, что $\Sigma_1 = o(1)$. Таким образом, факториальные моменты рассматриваемой векторной случайной величины сходятся к факториальным моментам многомерного распределения Пуассона с независимыми компонентами и указанными в утверждении теоремы средними значениями. Доказательство завершается применением теоремы 21 главы 1 работы [12].

Список литературы

1. Ванцян А. Г., Эволюция случайных однородных гиперграфов. В сб.: *Вероятностные задачи дискретной математики*. МИЭМ, Москва, 1987, с. 126–131.
2. Зыков А. А., Гиперграфы. *Успехи матем. наук* (1974) **29**, №6, 89–154.
3. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
4. Колчин В. Ф., *Системы случайных уравнений*. МИЭМ, Москва, 1988.
5. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2004.
6. Сачков В. Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 2004.
7. Шаповалов А. В., О связности и пороговых функциях подграфов случайных однородных гиперграфов. *Дискретная математика* (1993) **5**, №3, 105–115.
8. Шаповалов А. В., О числе строго сбалансированных подграфов случайных однородных гиперграфов. *Дискретная математика* (1993) **5**, №4, 133–144.
9. Шаповалов А. В., Вероятность совместности случайных систем булевых уравнений. *Дискретная математика* (1995) **7**, №2, 146–159.
10. Barbour A. D., Poisson convergence and random graphs. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* (1982) **92**, 349–359.
11. Bollobás B., Threshold functions for small subgraphs. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* (1981) **90**, №2, 197–206.
12. Bollobás B., *Random graphs*. Academic Press, London, 1985.
13. Erdős P., Rényi A., On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* (1960) **5**, 17–61.
14. Stein C., A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. *Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob.* 1970, v.2, 583–602.

Статья поступила 10.06.2005.