Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Колмыков, Эндоморфизмы функциональных графов, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 3, 115–119

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm64>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 10:17:56

Эндоморфизмы функциональных графов

© 2006 г. В. А. Колмыков

Функциональный граф — это орграф, описывающий действие функции на множестве. Эндоморфизмы таких орграфов представляют интерес в теории полугрупп: централизатор элемента полугруппы всех отображений множества в себя совпадает с множеством всех эндоморфизмов орграфа, соответствующего этому элементу. В статье рассматриваются функциональные графы со счетным множеством вершин. Введено понятие линеалов и вычислена мощность множества эндоморфизмов функциональных графов, не являющихся линеалами.

1. Введение

Рассмотрим отображение $g: M \rightarrow M$. Сколько существует отображений $f: M \rightarrow M$, для которых $f \circ g = g \circ f$?

На алгебраическом языке этот вопрос формулируется следующим образом. Симметрической полугруппой называется множество всех отображений $M \rightarrow M$ с операцией суперпозиции. Централизатором элемента a полугруппы S называется множество всех $b \in S$ таких, что $ab = ba$. Таким образом, нас интересует, какова мощность централизатора произвольного элемента симметрической полугруппы.

Несмотря на простоту такого вопроса, ответа на него в настоящее время нет. Причина этого, вероятно, в том, что вопрос находится на стыке алгебры и теории множеств, а отвечать на него удобно на языке теории графов.

Действие отображения $g: M \rightarrow M$ на множестве M можно представить орграфом O_g со множеством вершин M и множеством стрелок $E = \{(x, g(x))\}_{x \in M} \subseteq M^2$. Централизатор элемента g симметрической полугруппы совпадает с множеством всех эндоморфизмов орграфа O_g .

Идея исследовать централизатор как множество эндоморфизмов некоторого объекта принадлежит классу простых алгебраических идей. Однако для ее реализации необходимо осуществлять нетривиальные теоретико-графовые рассуждения. Орграф O_g — это так называемый функциональный граф. Эндоморфизмы функциональных графов изучались, например, в [1–3] с алгебраической точки зрения и с дополнительными условиями. В [4] на теоретико-графовом языке вычислена мощность централизатора инъекции или сюръекции, действующей на счетном множестве.

В настоящей статье мы рассматриваем функциональные графы со счетным множеством вершин. Мы вводим понятие линеалов и доказываем, что мощность множества эндоморфизмов счетных функциональных графов, не являющихся линеалами, равна $\aleph_0^{k\tau}$, где k — число компонент, а τ — ветвление орграфа.

Вопрос о мощности множества эндоморфизмов линеала остается нерешенной проблемой.

2. Формулировка результата

Оргграф — это пара (V, E) , где $E \subseteq V^2$. Элемент $\vec{uv} = (u, v) \in E$ называется стрелкой с началом u и концом v . Оргграф со счетным множеством вершин называется счетным.

Эндоморфизм оргграфа — это отображение множества его вершин в себя $v \mapsto \tilde{v}$ такое, что наличие стрелки $\vec{uv}$ влечет наличие стрелки $\vec{\tilde{u}\tilde{v}}$. Множество всех эндоморфизмов оргграфа G обозначается $\text{End}(G)$.

Функциональный граф — это оргграф, в котором из каждой вершины выходит ровно одна стрелка (на число входящих стрелок ограничений не накладывается, стрелки-петли допускаются).

Напомним, что две вершины слабо связаны, если они связаны в неориентированном графе, получающемся заменой стрелок ребрами. Мощность множества компонент слабой связности оргграфа G обозначается $k(G)$.

Степенью вершины оргграфа называется сумма мощности множества входящих в нее стрелок и мощности множества выходящих из нее стрелок (стрелка-петля принадлежит обоим множествам). Узел — это вершина степени, не меньшей 3. Ветвлением $\tau(G)$ оргграфа G назовем сумму степеней его узлов; если в G нет узлов, то положим $\tau(G) = 2$.

Если все ребра корневого дерева ориентировать по направлению к корню, то полученное корневое ордереве будем называть ориентированным к корню. Одновершинное корневое дерево P_1 удобно считать ориентированным к корню. Множество всевозможных конечных корневых ордеревьев, ориентированных к корню, обозначим $\dot{\mathcal{T}}_{\text{fin}}$. В каждой конечной n -вершинной цепи P_n , где $n \geq 2$, в качестве корня возьмем концевую вершину. Каждую такую корневую цепь ориентируем к корню. Множество, состоящее из полученных корневых орцепей и P_1 , обозначим $\dot{\mathcal{P}}$.

Пусть $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — последовательность с членами из множества $\dot{\mathcal{T}}_{\text{fin}}$. Рассмотрим оргграф $\vec{N}$, для которого $V = \{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $E = \{\vec{v_i v_{i+1}}\}_{i \in \mathbb{N}}$. Через $\vec{N}(\alpha)$ обозначим оргграф, получающийся отождествлением корня оргграфа α_i и вершины v_i для любого $i \in \mathbb{N}$. Последовательность α назовем почти $\dot{\mathcal{P}}$ -последовательностью, если выполнены два условия:

- (1) для всех достаточно больших i справедливо включение $\alpha_i \in \dot{\mathcal{P}}$,
- (2) множество индексов i , для которых $\alpha_i \neq P_1$, бесконечно.

Пусть K — либо пустой оргграф, либо функциональный граф конечного ветвления, имеющий конечное число компонент (то есть $k\tau < \aleph_0$), а $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s)}$ — набор почти $\dot{\mathcal{P}}$ -последовательностей.

Линеалом назовем оргграф

$$K \cup \vec{N}(\alpha^{(1)}) \cup \dots \cup \vec{N}(\alpha^{(s)}).$$

Теорема 1. Если G — счетный функциональный граф, не являющийся линеалом, то

$$|\text{End}(G)| = \aleph_0^{k(G)\tau(G)}.$$

3. Доказательство теоремы

Утверждение теоремы вытекает из нижеследующих лемм 1, 2 и 4. Первые две леммы доказаны в [4].

Лемма 1. Пусть G — счетный функциональный граф и $k(G) = \aleph_0$. Тогда

$$|\text{End}(G)| = \aleph_0^{\aleph_0}.$$

Лемма 2. Если G — счетный функциональный граф и $k(G)\tau(G) < \aleph_0$, то

$$|\text{End}(G)| = \aleph_0.$$

Для доказательства лемм 3–4 введем следующие обозначения и понятия.

Множество всех вершин орграфа G обозначается $V(G)$. Пусть G — функциональный граф. Если $v \in V(G)$, то через v^+ обозначается вершина, являющаяся концом стрелки, выходящей из v .

Нитью назовем нумерованное подмножество $\{u_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ множества $V(G)$ такое, что $(u_i)^+ = u_{i+1}$ для любого i . Пусть $l \in \mathbb{N}$, $I_l = [-l; 0] \cap \mathbb{Z}$. Конечным хвостом (длины l) вершины v_0 назовем нумерованное подмножество $\{v_i\}_{i \in I_l} \subseteq V(G)$ такое, что $(v_i)^+ = v_{i+1}$ для любого ненулевого индекса $i \in I_l$. Пусть I — множество всех неположительных целых чисел. Бесконечным хвостом вершины v_0 назовем нумерованное подмножество $\{v_i\}_{i \in I} \subseteq V(G)$ такое, что $(v_i)^+ = v_{i+1}$ для любого ненулевого индекса $i \in I$.

Множество всех вершин, принадлежащих какому-либо хвосту вершины u , обозначим $T(u)$. Хвост $\{u_i\}_{i \in I}$ назовем простым, если ни одна из вершин, имеющих отрицательный индекс, не принадлежит контуру орграфа (если таковой имеется). Пусть $\{u_i\}_{i \in I}$ — простой хвост. Расстоянием $r(u_i, u_j)$ от u_i до u_j назовем $|i - j|$.

Пусть зафиксировано несколько простых хвостов вершины v . Через $\tilde{T}(v)$ обозначим множество всех вершин, входящих хотя бы в один из зафиксированных хвостов. Пусть $\{u_i\}_{i \in I}$ — некоторый хвост. Будем говорить, что отображение $g: V(G) \rightarrow V(G)$ схлопывает $\tilde{T}(v)$ в $\{u_i\}_{i \in I}$, если g переводит вершину $w \in \tilde{T}(v)$ в $u_{-r(w,v)}$. При этом, если $M \subseteq \tilde{T}(v)$, то будем говорить, что M схлопывается в $\{u_i\}_{i \in I}$.

Орграф, в котором отмечена одна вершина, называется корневым, а отмеченная вершина — корнем. Эндоморфизмом корневого орграфа называется всякий эндоморфизм орграфа, переводящий корень в корень. Включение $G \subseteq G'$ корневых орграфов $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ означает включения $V \subseteq V'$, $E \subseteq E'$ и совпадение их корней.

Пусть $\bar{N}$ — корневое ордеререво, для которого $V = \{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $E = \{\bar{v}_i \bar{v}_{i-1}\}_{i \geq 2}$, вершина v_1 является корнем.

Лемма 3. Пусть корневое ордеререво G ориентировано к корню и не принадлежит множеству $\dot{\Phi} \cup \{\bar{N}\}$. Тогда $\text{End}(G)$ содержит не менее двух элементов.

Доказательство. Нам надо построить некоторый нетождественный эндоморфизм. Корень орграфа G обозначим v .

Пусть среди вершин из $V(G) \setminus \{v\}$ есть вершина u степени один. Через w обозначим ближайшую к u вершину такую, что она есть либо узел, либо корень. Хвост $\{u, \dots, w\}$ обозначим V_1 и положим $V_2 = T(w) \setminus V_1$. Если существует вершина $u' \in V_2$ такая, что $r(u', w) \geq r(u, w)$, то искомым эндоморфизм определим как тождественный на V_2 , а хвост V_1 схлопывается в хвост $\{u', \dots, w\}$. Если для любой вершины $u' \in V_2$ справедливо неравенство $r(u', w) < r(u, w)$, то искомым эндоморфизм определим как тождественный вне V_2 , а V_2 схлопывается в V_1 .

Пусть все вершины из $V(G) \setminus \{v\}$ имеют степень, не меньшую 2. Тогда $\bar{N} \subset G$. Искомым эндоморфизм определим как тождественный на $V(\bar{N})$, а остальные вершины схлопываются в $V(\bar{N})$.

Лемма 4. Пусть G — счетный функциональный граф и $k(G) < \aleph_0$. Если $\tau(G) = \aleph_0$ и G не является линеалом, то

$$|\text{End}(G)| = \aleph_0^{\aleph_0}.$$

Доказательство. Очевидно, что для всякого счетного орграфа $|\text{End}(G)| \leq \aleph_0^{\aleph_0}$.

Ветвлением $\tau(v)$ вершины v назовем сумму степеней узлов из $T(v)$. Рассмотрим три возможных случая.

Случай 1. Пусть в G имеется вершина u бесконечной степени. Пусть $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — множество вершин таких, что ни одна из них не принадлежит контуру и из каждой из этих вершин направлена стрелка в u . Рассмотрим орграф, порожденный вершинами $\{u\} \cup T(u_{2i-1}) \cup T(u_{2i})$. Если в нем присутствует стрелка-петля $\overrightarrow{uu}$, то удалим ее (саму же вершину u сохраним). В качестве корня выберем вершину u . Полученное корневое ордереве ориентировано к корню. Обозначим его G_i . Для всякого $i \in \mathbb{N}$ множество $\text{End}(G_i)$ содержит (согласно лемме 3) не менее двух элементов. Поэтому $\text{End}(G)$ содержит не менее $2^{\aleph_0}$ элементов.

Случай 2. Пусть в G нет вершин бесконечной степени, но есть вершина бесконечного ветвления. Выберем вершину v_0 бесконечного ветвления, не принадлежащую контуру. Вершины $v_{-1}, v_{-2}, \dots$ бесконечного ветвления выберем индуктивно: $v_i^+ = v_{i+1}$. Определим бесконечный хвост $T_*(v_i) = \{u_n\}_{n=0, -1, -2, \dots}$, где $u_n = v_{i+n}$. Через $T^*(v_i)$ обозначим объединение всех хвостов вершины v_i , не содержащих вершину v_{i-1} . Через M обозначим множество всех индексов i таких, что вершина $v_i \in T_*(v_0)$ является узлом. Множество M бесконечно (иначе для достаточно больших i ветвление v_i равнялось бы двум). Для всякого $P \subseteq M$ определим $\varphi_P \in \text{End}(G)$ следующим образом. Для всякого $j \in P$ отображение φ_P схлопывает $T^*(v_j)$ в $T_*(v_j)$. На вершинах, не принадлежащих объединению $\bigcup_{j \in P} T^*(v_j)$, отображение φ_P действует как тождественное. Множество отображений вида φ_P имеет мощность $2^{\aleph_0}$.

Случай 3. Пусть все вершины G имеют конечное ветвление.

В G есть компонента H бесконечного ветвления, не являющаяся линеалом. Покажем, что в H нет контура. Предположим, что контур есть. Множество его вершин обозначим V_1 . Через V_2 обозначим множество всех вершин $v \in V(H) \setminus V_1$ таких, что $v^+ \in V_1$. Множество V_2 конечно. Ветвление $\tau(H)$ равно сумме ветвлений вершин из V_2 плюс некоторое конечное кардинальное число. Выходит, что $\tau(H) < \aleph_0$, получаем противоречие.

Выберем в H произвольным образом вершину v_0 . Для натуральных i положим $v_i = (v_{i-1})^+$; через $T^*(v_i)$ обозначим объединение всех хвостов вершины v_i , не содержащих вершину v_{i-1} . Рассмотрим орграф, порожденный вершинами из $T^*(v_i)$. Отметим в нем вершину v_i . Полученное корневое ордереве обозначим H_i . Через M обозначим множество всех индексов, для которых $H_i \neq P_1$. Так как каждое H_i имеет конечное ветвление, а ветвление H бесконечно, множество M бесконечно.

Пусть H_i конечно для любого $i \in M$. Через M' обозначим множество всех $i \in M$, для которых $H_i \notin \Phi$. Так как H — не линеал, множество M' бесконечно. Для всякого $i \in M'$ множество $\text{End}(H_i)$ содержит (согласно лемме 3) не менее двух элементов. Поэтому $\text{End}(H)$ содержит не менее $2^{\aleph_0}$ элементов.

Пусть H_s бесконечно для некоторого s . Тогда $\overleftarrow{N} \subseteq H_s$. Если $i > s$, то определим бесконечный хвост $T_*(v_i) = \{u_n\}_{n=0, -1, \dots}$, где u_n — вершина из $\{v_m\}_{s+1 \leq m \leq i} \cup V(\overleftarrow{N})$, находящаяся на расстоянии $|n|$ от v_i . Для всякого $P \subseteq M \cap (s; +\infty)$ определим $\varphi_P \in \text{End}(G)$

следующим образом. Для всякого $j \in P$ отображение φ_P схлопывает $T^*(v_j)$ в $T_*(v_j)$. На вершинах, не принадлежащих объединению $\bigcup_{j \in P} T^*(v_j)$, отображение φ_P действует как тождественное. Множество отображений вида φ_P имеет мощность 2^{K_0} .

Следующие вопросы остаются открытыми.

1. Какова мощность множества эндоморфизмов линеала?
2. Последовательности α и β назовем эквивалентными, если существуют числа m и n такие, что $\alpha_{m+i} = \beta_{n+i}$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Ростком назовем класс эквивалентных последовательностей. Верно ли, что мощность множества эндоморфизмов линеала $K \cup \vec{N}(\alpha^{(1)}) \cup \dots \cup \vec{N}(\alpha^{(s)})$ есть функция ростков последовательностей $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(4)}$?

Список литературы

1. Varlet J. C., Endomorphisms and fully invariant congruences in unary algebras $\langle A; \Gamma \rangle$. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liege* (1970) **39**, №11–12, 575–589.
2. Скорняков Л. А., Групповые унары. *Вестник МГУ. Матем. Мех.* (1977), №5, 65–69.
3. Бочкин А. М., Унары с сепаративным моноидом эндоморфизмов. *Изв. вузов, сер. матем.* (1983), №5, 71–74.
4. Колмыков В. А., О соотношении коммутативности в симметрической полугруппе. *Сиб. матем. журн.* (2004), **45**, №5, 1130–1135.

Статья поступила 31.11.2004.