Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Таранников, О значениях аффинного ранга носителя спектра платовидной функции, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 3, 120–137

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm65>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 11:55:00

О значениях аффинного ранга носителя спектра платовидной функции

© 2006 г. Ю. В. Таранников

В статье доказывается, что аффинный ранг любой платовидной функции с носителем спектра мощности 16 равен 4, 5 или 6. Для любого натурального h рассматриваются платовидные функции с носителем спектра мощности 4^h , даются оценки аффинного ранга таких функций и строятся функции, аффинный ранг которых принимает все возможные значения от $2h$ до $2^{h+1} - 2$.

1. Введение и основные определения

Пусть F_2^n — векторное пространство наборов длины n с компонентами из поля F_2 из двух элементов 0 и 1, операции сложения и умножения в котором вводятся как обычные операции сложения и умножения чисел 0 и 1 по модулю 2. Булева функция от n переменных — это отображение из F_2^n в F_2 . В дальнейшем мы будем обозначать набор из F_2^n буквой без нижнего индекса, а компоненту этого набора — той же буквой с нижним индексом, указывающим на порядковый номер этой компоненты в наборе. Наборы x' и x'' называются соседними, если они различаются только в одной компоненте. Обозначим через x^i набор, который отличается от x только в i -й компоненте, $i = 1, \dots, n$. Переменная x_i называется фиктивной для функции f , если для любых наборов x' и x'' , соседних по i -й компоненте, выполняется равенство $f(x') = f(x'')$. Расстоянием Хэмминга $d(x', x'')$ между двумя наборами x' и x'' называют число компонент, в которых наборы x' и x'' различаются. Для заданной функции f из F_2^n минимум расстояний $d(f, l)$, где l пробегает множество всех аффинных функций из F_2^n называется нелинейностью функции f и обозначается через $nl(f)$. Подфункцией булевой функции f называется функция f' , полученная подстановкой в f констант 0 или 1 вместо некоторых переменных.

Хорошо известно, что функция f , заданная на F_2^n , имеет единственное полиномиальное представление над F_2 , степень которого по каждой переменной не превосходит 1, а именно,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{(a_1, \dots, a_n) \in F_2^n} g(a_1, \dots, a_n) x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n},$$

где g — также функция над F_2^n . Такое полиномиальное представление f называется алгебраической нормальной формой функции, а каждое выражение $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ называется слагаемым в алгебраической нормальной форме функции f (алгебраическую нормальную форму называют также полиномом Жегалкина). Отображение $f(x) \rightarrow g(x)$ иногда называют преобразованием Мебиуса.

Алгебраическая степень функции f , обозначаемая через $\deg(f)$, определяется как число переменных в самом длинном слагаемом в алгебраической нормальной форме функции f .

Вес $\text{wt}(f)$ функции f над F_2^n — это число наборов x из F_2^n , для которых $f(x) = 1$. Функция f называется уравновешенной, если

$$\text{wt}(f) = \text{wt}(f \oplus 1) = 2^{n-1},$$

то есть если функция принимает значения 0 и 1 на одинаковом числе наборов.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $u = (u_1, \dots, u_n)$ — это наборы длины n над F_2 . Скалярное произведение x и u — это функция, которая определяется как

$$\langle x, u \rangle = \sum_{i=1}^n x_i u_i,$$

где сложение и умножение берутся над F_2 . Под суммой $x + u$ двух двоичных наборов x и u мы понимаем их покомпонентную сумму над F_2 .

Преобразованием Уолша булевой функции f называется целочисленная функция над F_2^n , определяемая равенством

$$W_f(u) = \sum_{x \in F_2^n} (-1)^{f(x) + \langle u, x \rangle}.$$

Для каждого $u \in F_2^n$ значение $W_f(u)$ называется коэффициентом Уолша. Коэффициенты Уолша будем называть спектральными коэффициентами, а совокупность всех 2^n коэффициентов Уолша — спектром булевой функции. Справедливы формула обращения

$$(-1)^{f(x)} = 2^{-n} \sum_{u \in F_2^n} W_f(u) (-1)^{\langle u, x \rangle}$$

и равенство Парсеваля

$$\sum_{u \in F_2^n} W_f^2(u) = 2^{2n}.$$

Нелинейность булевой функции f выражается через ее коэффициенты Уолша следующим образом:

$$\text{nl}(f) = 2^{n-1} - \frac{1}{2} \max_{u \in F_2^n} |W_f(u)|.$$

Множество S_f всех наборов u таких, что $W_f(u) \neq 0$, называется носителем спектра функции f .

Булева функция называется бент-функцией, если значение коэффициентов на всех наборах равно $\pm 2^{n/2}$. Бент-функции существуют при всех четных n , а при нечетных не существуют. Бент-функция является функцией с максимально возможной нелинейностью $2^{n-1} - 2^{(n/2)-1}$ среди всех функций от n переменных при четном n . Булева функция называется платовидной, если ее коэффициенты Уолша принимают ровно три возможных значения. Несложно показать, что эти значения могут быть только 0 и $\pm 2^c$ для некоторого c . Платовидные функции представляют большой интерес для изучения бент-функций (например, потому, что при разложении бент-функции по переменной возникают две платовидные функции), а также потому, что многие криптографически важные функции являются платовидными (например, m -устойчивые функции с максимально возможной для

них нелинейностью $2^{n-1} - 2^{m+1}$). Для платовидных функций положим $\varphi(x) = 2^{-c} W_f(x)$, тогда для любого $x \in F_2^n$ величина $\varphi(x)$ может принимать только три значения: 0, -1 и 1. Множество S_f всех наборов u таких, что $W_f(u) \neq 0$, называется носителем спектра платовидной функции. Множество всех наборов, на которых $\varphi(x) = -1$, будем обозначать T^- , а множество всех наборов, на которых $\varphi(x) = 1$, будем обозначать T^+ . Из равенства Парсеваля следует, что мощность носителя спектра равна 4^{n-c} . Бент-функцию удобно рассматривать как частный случай платовидной при $c = n/2$ и $|S_f| = 2^n$, что мы и будем часто делать (хотя часто формально бент-функции к платовидным не относят). Платовидные функции изучались в большом числе работ, см., например, [1, 4, 9].

Для каждого $u \in F_2^n$ автокорреляционный коэффициент функции f на наборе u определяется как

$$\Delta_f(u) = \sum_{x \in F_2^n} (-1)^{f(x) + f(x+u)}.$$

Функция $D_u f = f(x) + f(x+u)$ называется производной функции f по направлению u . Множество наборов $u \in F_2^n$ таких, что $D_u f$ есть постоянная, называется линейной структурой функции f . Легко проверить, что линейная структура функции f образует линейное пространство в F_2^n . Наличие у функции линейных структур в некоторых случаях (но не во всех) является криптографической слабостью.

Пусть E — произвольное подмножество F_2^n . Рангом множества E называется размерность подпространства, порожденного E в F_2^n . Аффинным рангом множества E называется размерность наименьшего класса смежности в F_2^n , содержащего E . Ранг и аффинный ранг носителя спектра булевой функции будем обозначать через k и k_a , соответственно. Для краткости в данной работе аффинный ранг и ранг носителя спектра булевой функции мы будем называть просто ее аффинным рангом и рангом, соответственно. Легко убедиться, что $k_a \in \{k, k-1\}$. Известно (см., например, [5]), что размерность линейной структуры функции f равна $n - k_a$. Если существует набор $u \in F_2^n$ такой, что $D_u f \equiv 1$, то $k = k_a + 1$. Если такого набора не существует, то $k = k_a$.

Дополнительные сведения о свойствах булевых функций можно найти в [2] и [3].

2. Об аффинных преобразованиях в F_2^n

Аффинным преобразованием в F_2^n называется отображение

$$x \rightarrow x' = Ax = xA^T + a,$$

где A — квадратная двоичная невырожденная над F_2 матрица порядка n , а a — вектор длины n . Аффинное преобразование является автоморфизмом F_2^n , при котором все классы смежности переходят в классы смежности той же размерности. Если $a = 0$, то аффинное преобразование называется также линейным.

Аффинным преобразованием функции f , заданной на F_2^n , называется преобразование

$$f(x) \rightarrow f'(x) = f(Ax).$$

Если для функций f и f' существует аффинное преобразование функции, переводящее f в f' , то f и f' называются аффинно эквивалентными. Если для функций f и f' существует линейное преобразование функции, переводящее f в f' , то f и f' называются линейно эквивалентными.

Лемма 1. Пусть $f(x) \rightarrow f'(x) = f(Ax)$ — аффинное преобразование функции f , заданной на F_2^n . Тогда

$$W_{f'(x)}(u) = (-1)^{\langle a, uA^{-1} \rangle} W_f(uA^{-1}).$$

Доказательство. По формуле для коэффициентов Уолша

$$\begin{aligned} W_{f'(x)}(u) &= \sum_{x \in F_2^n} (-1)^{f'(x) + \langle x, u \rangle} = \sum_{x \in F_2^n} (-1)^{f(Ax) + \langle x, u \rangle} = \sum_{x \in F_2^n} (-1)^{f(x) + \langle A^{-1}x, u \rangle} \\ &= \sum_{x \in F_2^n} (-1)^{f(x) + \langle x, uA^{-1} \rangle + \langle a, uA^{-1} \rangle} = (-1)^{\langle a, uA^{-1} \rangle} \sum_{x \in F_2^n} (-1)^{f(x) + \langle x, uA^{-1} \rangle} \\ &= (-1)^{\langle a, uA^{-1} \rangle} W_f(uA^{-1}). \end{aligned}$$

Пусть булева функция f задана на F_2^n . Аффинным преобразованием спектра функции f называется преобразование

$$W_f(x) \rightarrow W'(x) = W_f(Ax).$$

Можно показать, что коэффициенты $W'(x)$ являются коэффициентами Уолша некоторой функции f' , которая, вообще говоря, не является аффинно эквивалентной функции f .

Лемма 2. Пусть $W_f(x) \rightarrow W'(x) = W_f(Ax)$ — аффинное преобразование спектра функции f , заданной на F_2^n . Тогда коэффициенты $W'(x)$ являются коэффициентами Уолша некоторой функции f' , причем

$$f'(x) = f(xA^{-1}) + \langle a, xA^{-1} \rangle.$$

Доказательство. Проверим, что для всех $x \in F_2^n$ суммы в формуле обращения для гипотетически существующей функции $f'(x)$ равны ± 1 . Введем обозначение

$$F(x) = 2^{-n} \sum_{u \in F_2^n} W'(u) (-1)^{\langle u, x \rangle}.$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} F(x) &= 2^{-n} \sum_{u \in F_2^n} W'(u) (-1)^{\langle u, x \rangle} = 2^{-n} \sum_{u \in F_2^n} W_f(Au) (-1)^{\langle u, x \rangle} \\ &= 2^{-n} \sum_{v \in F_2^n} W_f(v) (-1)^{\langle A^{-1}v, x \rangle} = 2^{-n} \sum_{v \in F_2^n} W_f(v) (-1)^{\langle v, xA^{-1} \rangle + \langle a, xA^{-1} \rangle} \\ &= (-1)^{\langle a, xA^{-1} \rangle} 2^{-n} \sum_{v \in F_2^n} W_f(v) (-1)^{\langle v, xA^{-1} \rangle} = (-1)^{f(xA^{-1}) + \langle a, xA^{-1} \rangle}. \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $x \in F_2^n$ справедливо равенство $F(x) = \pm 1$. Поэтому функция $f'(x)$ существует, более того,

$$f'(x) = f(xA^{-1}) + \langle a, xA^{-1} \rangle.$$

Спектры функций f и f' , переводимые один в другой аффинным преобразованием спектра, называются аффинно эквивалентными. Спектры функций f и f' , переводимые

один в другой линейным преобразованием спектра, называются линейно эквивалентными. Из аффинной эквивалентности функций не следует аффинная эквивалентность их спектров. Например, потому, что при аффинном преобразовании функции f величина $\text{wt}(f)$ остается неизменной, но $\text{wt}(f) = 2^{n-1} - (1/2)W_f(0)$, поэтому переводя при аффинном преобразовании спектра в 0 набор с другим значением коэффициента Уолша, мы получим функцию, не являющуюся аффинно эквивалентной f . В то же время из лемм 1 и 2 видно, что линейное преобразование спектра является линейным преобразованием функции, и наоборот.

Очевидно, что аффинное преобразование спектра платовидной функции f переводит его в спектр также некоторой платовидной функции f' с той же мощностью носителя спектра, а аффинное преобразование платовидной функции f переводит ее в платовидную функцию f' с той же мощностью носителя спектра.

Лемма 3. Пусть f — булева функция, заданная на F_2^n , причем носитель спектра этой функции лежит в $F_2^l \otimes (0, \dots, 0)$, где $(0, \dots, 0) \in F_2^{n-l}$. Тогда функция f зависит от переменных $x_{l+1}, \dots, x_n$ фиктивно.

Пусть f' — функция на F_2^n , полученная из f удалением фиктивных переменных $x_{l+1}, \dots, x_n$. Тогда для любого u из F_2^l справедливо равенство

$$W_{f'}(u) = 2^{-(n-l)} W_f(u, 0, \dots, 0),$$

где $(u, 0, \dots, 0) \in F_2^n$.

Доказательство. Пусть x и x^i — произвольная пара наборов, соседних по i -й компоненте, $i \in \{l+1, \dots, n\}$. По формуле обращения

$$\begin{aligned} (-1)^{f(x)} - (-1)^{f(x^i)} &= 2^{-n} \sum_{u \in F_2^n} W_f(u) ((-1)^{\langle x, u \rangle} - (-1)^{\langle x^i, u \rangle}) \\ &= 2^{-n} \sum_{u \in F_2^l \otimes (0, \dots, 0)} W_f(u) ((-1)^{\langle x, u \rangle} - (-1)^{\langle x^i, u \rangle}) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому $f(x) = f(x^i)$, и переменные $x_{l+1}, \dots, x_n$, таким образом, действительно являются фиктивными. Рассмотрим теперь функцию f' на F_2^n , полученную из f удалением фиктивных переменных $x_{l+1}, \dots, x_n$. Для любого ее коэффициента Уолша

$$\begin{aligned} W_{f'}(u) &= \sum_{x \in F_2^l} (-1)^{f'(x) + \langle x, u \rangle} = 2^{-(n-l)} \sum_{x \in F_2^n} (-1)^{f(x) + \langle x, (u, 0, \dots, 0) \rangle} \\ &= 2^{-(n-l)} W_f(u, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

где $u \in F_2^l$ и $(u, 0, \dots, 0) \in F_2^n$.

Лемма 4. Пусть f — булева функция, заданная на F_2^n . Пусть f' — функция на F_2^{n+1} , определенная равенством

$$f'(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}.$$

Тогда если u — набор из F_2^{n+1} , принадлежащий носителю спектра функции f' , то

$$u_{n+1} = 1, \quad W_{f'}(u_1, \dots, u_n, 1) = 2W_f(u_1, \dots, u_n).$$

Доказательство. Пусть $u \in F_2^{n+1}$. В сумме

$$W_{f'}(u) = \sum_{x \in F_2^{n+1}} (-1)^{f(x) + \langle x, u \rangle}$$

сгруппируем в пары наборы x и x^{n+1} , различающиеся только в $(n+1)$ -й компоненте. Для определенности пусть $x_{n+1} = 0$. Для этих наборов $f'(x) = f'(x^{n+1}) + 1$. Если $u_{n+1} = 0$, то $\langle x, u \rangle = \langle x^{n+1}, u \rangle$. Отсюда получаем, что

$$(-1)^{f'(x) + \langle x, u \rangle} + (-1)^{f'(x^{n+1}) + \langle x^{n+1}, u \rangle} = 0.$$

Поэтому и $W_{f'}(u) = 0$. Если $u_{n+1} = 1$, то $\langle x, u \rangle = \langle x^{n+1}, u \rangle + 1$. Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} (-1)^{f'(x) + \langle x, u \rangle} + (-1)^{f'(x^{n+1}) + \langle x^{n+1}, u \rangle} &= 2(-1)^{f'(x) + \langle x, u \rangle} \\ &= 2(-1)^{f(x_1, \dots, x_n) + \langle (x_1, \dots, x_n), (u_1, \dots, u_n) \rangle}. \end{aligned}$$

Поэтому $W_{f'}(u) = 2W_f(u_1, \dots, u_n)$.

Из лемм 1, 2 и 3 следует, что изучение платовидных функций на F_2^n с носителем спектра мощности 4^h можно в некотором смысле свести к изучению платовидных функций с носителем спектра той же мощности 4^h , заданных на $F_2^{k_a}$. Более того, если $k_a > 2h$, то любую платовидную функцию f' на F_2^n с носителем мощности 4^h можно получить из некоторой функции f на $F_2^{k_a}$ с носителем той же мощности 4^h , добавив $n - k_a$ фиктивных переменных и выполнив некоторое линейное преобразование функции. Того же можно добиться и в случае, если $k_a = 2h$ и $W_{f'}(0) \neq 0$ (в этом случае функция f будет бент-функцией). Если $k_a = 2h$ и $W_{f'}(0) = 0$, то указанного линейного преобразования функции не существует, но можно использовать аффинное преобразование спектра, либо же взять функцию f от $k_a + 1$ переменной.

Заметим, что указанного сведения может быть недостаточно, если требуется исследовать дополнительные свойства функций, не сохраняющиеся при аффинных преобразованиях (например, корреляционную иммунность).

Укажем также на следующее свойство, позволяющее не рассматривать специально вопрос о возможных значениях, принимаемых рангом k .

Лемма 5. Если существует платовидная функция с носителем спектра мощности 4^h и аффинным рангом, равным k_a , то существуют платовидные функции с носителем спектра той же мощности 4^h и рангами, равными $k = k_a$, и $k = k_a + 1$.

Доказательство. По лемме 2 аффинное преобразование носителя спектра платовидной функции снова дает платовидную функцию с носителем спектра той же мощности и с тем же аффинным рангом. Если аффинным преобразованием перевести в ноль один из наборов, входящий в наименьший класс смежности, содержащий S_f , то для получившейся функции, очевидно, будет выполнено равенство $k = k_a$. Если же перевести в ноль набор, не принадлежащий наименьшему классу смежности, содержащему S_f , то для получившейся функции $k = k_a + 1$. Если для исходной функции не было наборов, не принадлежащих наименьшему классу смежности, содержащему S_f (то есть, если k_a совпадало с числом переменных), то можно просто добавить фиктивную переменную и такие наборы появятся, а функция останется платовидной с той же мощностью спектра.

Из вышесказанного следует, что аффинный ранг является важной характеристикой платовидных функций. Очевидно, что аффинный ранг любой платовидной функции с носителем спектра мощности 4^h не меньше $2h$, потому что меньшие классы смежности не содержат 4^h наборов. Любая платовидная функция с носителем спектра мощности 1 есть аффинная функция и, очевидно, ее аффинный ранг равен 0. Аффинный ранг любой платовидной функции с носителем спектра мощности 4 равен 2. Этот факт доказан в [8], но, по-видимому, был известен намного раньше. Платовидные функции с носителем спектра мощности 16, не называясь платовидными, фактически рассматривались в [7], а в [5] для подкласса платовидных функций с носителем спектра мощности 16 (более точно, для кубических устойчивых порядка $n - 4$ функций) была получена оценка $k_a \leq k \leq 9$. В настоящей работе мы докажем, что аффинный ранг любой платовидной функции с носителем спектра мощности 16 равен 4, 5 или 6. Кроме того, мы рассмотрим для любого натурального h платовидные функции с носителем спектра мощности 4^h , дадим оценки аффинного ранга для таких функций и построим функции, аффинный ранг которых принимает все возможные значения от $2h$ до $2^{h+1} - 2$.

3. Вспомогательные результаты

Следующее утверждение хорошо известно (см., например, соотношение (2.16) в [2]). Ранее его доказательство было дано в [6].

Лемма 6. Пусть f — булева функция на F_2^n . Пусть U является линейным подпространством в F_2^n размерности l , а $U^\perp$ — пространство, ортогональное к U в F_2^n . Пусть v — произвольный вектор из F_2^n . Тогда

$$\sum_{u \in U+v} W_f(u) = 2^l \sum_{x \in U^\perp} (-1)^{f(x) + \langle x, v \rangle}.$$

Лемма 7. Пусть f — платовидная функция с носителем спектра мощности 4^h , заданная на F_2^n . Тогда

$$\sum_{a \in F_2^n} \varphi(a) \in \{-2^h, 2^h\}.$$

Доказательство. Возьмем в лемме 6 в качестве подпространства U все F_2^n . В обозначениях леммы 6

$$W_f(u) = \varphi(u) 2^{n-h}, \quad l = n.$$

Тогда $U^\perp = \{0\}$. Поэтому

$$\sum_{u \in F_2^n} W_f(u) = 2^n (-1)^{f(0)}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{u \in F_2^n} \varphi(u) = 2^h (-1)^{f(0)} \in \{-2^h, 2^h\}.$$

Лемма 8. Пусть f — платовидная функция с носителем спектра мощности 4^h , заданная на F_2^n . Пусть

$$\sum_{a \in F_2^n} \varphi(a) = 2^h.$$

Пусть H является $(n-1)$ -мерным классом смежности в F_2^n . Тогда

$$\sum_{a \in H} \varphi(a) \in \{0, 2^h\}.$$

Доказательство. В обозначениях леммы 6

$$W_f(u) = \varphi(u) 2^{n-h}, \quad l = n-1.$$

Поэтому из леммы 6 следует, что

$$\sum_{a \in H} \varphi(a) \in \{-2^h, 0, 2^h\}.$$

Но если сумма равна -2^h , то $\sum_{a \in F_2^n \setminus H} \varphi(a) = 2^{h+1}$, что невозможно по сказанному выше.

Следующее утверждение также хорошо известно (см., например, теорему 2.89 в [2]).

Лемма 9. Пусть f — булева функция на F_2^n . Пусть U является линейным подпространством в F_2^n размерности l , а $U^\perp$ — пространство, ортогональное к U в F_2^n . Тогда

$$\sum_{u \in U} W_f^2(u) = 2^l \sum_{v \in U^\perp} \Delta_f(v).$$

Лемма 10. Пусть f — булева функция на F_2^n , $n \geq 1$. Тогда $\text{wt}(f)$ нечетно тогда и только тогда, когда $\deg(f) = n$.

Доказательство очевидно (см., например, следствие 1 в [3]).

Лемма 11. Пусть f — булева функция на F_2^n , не равная тождественно постоянной. Тогда

$$2^{n-\deg(f)} \leq \text{wt}(f) \leq 2^n - 2^{n-\deg(f)}.$$

Доказательство очевидно (см., например, лемму 5.6 в [2] или лемму 3 в [3]).

Лемма 12 ([9]). Пусть f — платовидная булева функция на F_2^n с носителем спектра мощности 4^h . Тогда $\deg(f) \leq h+1$.

Доказательство. Коэффициенты Уолша функции f принимают значения из множества $\{0, \pm 2^{n-h}\}$. Рассмотрим самое длинное слагаемое $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_s}$ функции f (если таких слагаемых несколько, берем любое из них). Можно считать, что $s \geq 2$, иначе утверждение автоматически является верным. Воспользуемся леммой 6. Возьмем в качестве U линейное подпространство $U = \{x \in F_2^n \mid x_{i_1} = 0, \dots, x_{i_s} = 0\}$ размерности $l = n-s$, вектор v возьмем нулевым. Тогда ортогональное пространство $U^\perp$ по лемме 10 содержит нечетное число наборов x таких, что $f(x) = 1$. Поэтому сумма $\sum_{x \in U^\perp} (-1)^{f(x)}$ при $s \geq 2$ не делится на 4. Следовательно, в равенстве

$$\sum_{u \in U} W_f(u) = 2^{n-s} \sum_{x \in U^\perp} (-1)^{f(x)}$$

левая часть делится на 2^{n-h} , а правая часть не делится на 2^{n-s+2} . Отсюда следует, что $n-h < n-s+2$, и учитывая целочисленность, получаем, что $s \leq h+1$, что и требовалось доказать.

Лемма 13. Пусть f — платовидная булева функция на F_2^n с носителем спектра мощности 4^h . Пусть H является $(n-1)$ -мерным классом смежности в F_2^n . Тогда либо $\sum_{u \in H} |\varphi(u)| = 0$, либо $\sum_{u \in H} |\varphi(u)| = 4^h$, либо $2^h \leq \sum_{u \in H} |\varphi(u)| \leq 4^h - 2^h$.

Доказательство. Пусть H — линейное подпространство в F_2^n . Тогда $H^\perp = \{0, v\}$ для некоторого ненулевого $v \in F_2^n$. Очевидно, $\Delta_f(0) = 2^n$. По лемме 9

$$4^{n-h} \sum_{u \in H} |\varphi(u)| = 2^{n-1}(2^n + \Delta_f(v)) = 4^n - 2^n \text{wt}(D_v f).$$

В силу леммы 12 справедливо неравенство $\deg(f) \leq h+1$. Функция $D_v f$ является производной функции f , поэтому $\deg(D_v f) \leq h$. Если $D_v f \equiv 0$, то $\sum_{u \in H} |\varphi(u)| = 4^h$. Если $D_v f \equiv 1$, то $\sum_{u \in H} |\varphi(u)| = 0$. Если $D_v f$ не является постоянной, то в силу леммы 11

$$2^{n-h} \leq \text{wt}(D_v f) \leq 2^n - 2^{n-h}.$$

Отсюда, $2^h \leq \sum_{u \in H} |\varphi(u)| \leq 4^h - 2^h$, что и требовалось доказать. Для класса смежности $F_2^n \setminus H$ точно такие же три случая имеют место в силу только что доказанного и равенства Парсеваля.

Лемма 14. Пусть f_1, f_2 — булевы функции на F_2^n , а f — булева функция на F_2^{n+1} , причем $f(xx_{n+1}) = (x_{n+1} + 1)f_1(x) + x_{n+1}f_2(x)$. Тогда

$$W_f(u0) = W_{f_1}(u) + W_{f_2}(u), \quad W_f(u1) = W_{f_1}(u) - W_{f_2}(u).$$

Эта лемма хорошо известна. Фактически на ее применении основано быстрое преобразование Уолша.

4. Об аффинном ранге платовидных булевых функций с носителем спектра мощности 16

Во всех утверждениях этого раздела предполагается, что f — платовидная булева функция на F_2^n и $|S_f| = 16$. В этом случае $c = n-2$. По лемме 7 имеет место один из двух случаев $|T^+| = 10, |T^-| = 6$, или же $|T^+| = 6, |T^-| = 10$. Учитывая, что для всех u справедливо равенство $W_f(u) = -W_{f+1}(u)$, можно без ограничения общности считать, что $|T^+| = 10, |T^-| = 6$, что мы и будем делать в дальнейшем в этом разделе. Таким образом, $|S_f| = 16, |T^+| = 10, |T^-| = 6$.

Нашей целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть f является платовидной функцией, $|S_f| = 16$. Тогда для аффинного ранга k_a носителя спектра S_f справедливо неравенство $k_a \leq 6$.

Доказательство теоремы 1 будет получено путем доказательства серии лемм.

Предположим, что аффинный ранг носителя спектра S_f равен k_a и аффинный ранг T^- равен k^- . Очевидно, $3 \leq k^- \leq 5$. Легко видеть, что с помощью некоторого аффинного отображения в F_2^n можно вложить наименьший класс смежности, содержащий носитель спектра S_f , в $F_2^{k_a} \otimes (0, \dots, 0)$, так чтобы некоторые $k^- + 1$ наборов из T^- перешли в наборы $(0, 0, 0, \dots, 0), (1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где в последнем наборе 1 стоит на месте k^- . Заметим, что после такого отображения все наборы

из T^- перейдут в наборы, имеющие только нули во всех компонентах i , $i > k^-$. Отметим, что описанное выше аффинное отображение спектра не является, вообще говоря, аффинным преобразованием функции f , однако нам этого и не нужно. Нам достаточно того, что получившаяся в результате отображения булева функция будет платовидной с тем же набором значений, принимаемых коэффициентами Уолша, и теми же значениями k_a и k^- . По лемме 3 переменные с $(k_a + 1)$ -й по n -ю у получившейся функции будут фиктивными. Отбрасывая их и деля все коэффициенты Уолша на 2^{n-k_a} , мы по леммам 2 и 3 получим платовидную функцию, заданную на $F_2^{k_a}$, с носителем спектра той же мощности 16. Таким образом, без потери общности в оставшейся части этого раздела мы будем рассматривать именно такой носитель спектра.

Лемма 15. Пусть H является $(k_a - 1)$ -мерным классом смежности в $F_2^{k_a}$. Тогда

$$\sum_{a \in H} \varphi(a) \in \{0, 4\}.$$

Утверждение леммы является частным случаем леммы 8.

Лемма 16 ([5]). Пусть H является $(k_a - 1)$ -мерным классом смежности в $F_2^{k_a}$. Тогда H содержит 4, 6, 8, 10 или 12 наборов из S_f .

Доказательство. В силу леммы 15 класс H содержит четное число наборов из S_f . Случаи 2 и 14 невозможны в силу леммы 13. Если H содержит 16 наборов из S_f , то S_f содержится в H ; если H содержит 0 наборов из S_f , то S_f содержится в $F_2^{k_a} \setminus H$. Оба последних случая невозможны в силу того, что $F_2^{k_a}$ — наименьший класс смежности, содержащий носитель спектра S_f .

Наша цель — доказать, что $k_a \leq 6$. Предположим противное. Пусть $k_a \geq 7$. Докажем, что это невозможно.

Образуем матрицу M размера 16×7 . В строках M будем записывать слева направо первые 7 компонент наборов из S_f (в случае $k_a > 7$ мы опустим все компоненты после седьмой). В первых 10 строках M запишем наборы из T^+ , а в последних 6 строках M запишем наборы из T^- . Левые k^- столбцов M назовем левой частью M , оставшиеся $7 - k^-$ столбцов назовем правой частью M .

$$\left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ \hline & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ \hline \text{I} & \text{0} \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

Обозначим через γ_i столбцы из левой части M , а через x_i соответствующие этим столбцам переменные. Обозначим через δ_j столбцы из правой части M , а через y_j соответствующие этим столбцам переменные. Обозначим через γ_i^+ и δ_j^+ подстолбцы, содержащие верхние 10 элементов столбцов γ_i и δ_j , соответственно.

Лемма 17. Для любого множества $\delta_{j_1}, \dots, \delta_{j_s}$, $1 \leq s \leq 7 - k^-$, различных столбцов из правой части M справедливо равенство $\text{wt}(\delta_{j_1}^+ + \dots + \delta_{j_s}^+) = 4$.

Доказательство. Положим $H = \{F_2^{k_a} \mid y_{j_1} + \dots + y_{j_s} = 0\}$. Гиперплоскость H содержит все 6 наборов из T^- , поэтому по лемме 15 гиперплоскость H должна содержать 6 или 10 наборов из T^+ . Но если H содержит 10 наборов из T^+ , то H содержит S_f . Это невозможно, поскольку k_a есть размерность наименьшего класса смежности, содержащего S_f . Поэтому H содержит 12 наборов из S_f и $F_2^n \setminus H$ содержит в точности 4 набора из S_f .

Лемма 18. Существует не более трех столбцов, удовлетворяющих условию леммы 17. Без потери общности можно выбрать в качестве этих столбцов

$$\begin{aligned}\delta_1^+ &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)^T, \\ \delta_2^+ &= (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)^T, \\ \delta_3^+ &= (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)^T.\end{aligned}$$

Доказательство. Легко проверить, что наборы δ_1^+ , δ_2^+ , δ_3^+ , указанные в условии, могут быть взяты без потери общности. Предположим, что можно добавить к этому множеству некоторый набор δ_4^+ . Для $c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1\}$ положим

$$\delta^+(c_1, c_2, c_3) = c_1\delta_1^+ + c_2\delta_2^+ + c_3\delta_3^+.$$

Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1\}} d(\delta_4^+, \delta^+(c_1, c_2, c_3)).$$

Заметим, что для любой строки с 4-й по 10-ю в точности 4 из 8 наборов $\delta^+(c_1, c_2, c_3)$ имеют единицу в этой строке. Поэтому $S = 28 + 8w_0 = 32$, где w_0 — это число единиц в δ_4^+ в строках с 1-й по 3-ю. Отсюда следует, что $w_0 = 0,5$, но w_0 должно быть целым числом. Это противоречие доказывает лемму 18.

Лемма 19. Правая часть матрицы M содержит не более 3 столбцов.

Утверждение леммы следует из лемм 17 и 18.

Из леммы 19 следует, что случай $k^- = 3$ невозможен. Остались случаи $k^- = 4$ и $k^- = 5$.

Лемма 20. Пусть γ_i — столбец из левой части матрицы M . Предположим, что γ_i содержит одну единицу и 5 нулей в нижних 6 строках. Тогда $\text{wt}(\gamma_i^+) = 5$.

Доказательство. Положим $H = \{F_2^{k_a} \mid x_i = 0\}$. Гиперплоскость H содержит в точности 5 наборов из T^- , поэтому по лемме 15 гиперплоскость H должна содержать 5 или 9 наборов из T^+ . Но если H содержит 9 наборов из T^+ , то H содержит в точности 14 наборов из S_f . Это невозможно по лемме 16. Отсюда следует, что $\text{wt}(\gamma_i^+) = 5$.

Лемма 21. Пусть γ_i — столбец из левой части матрицы M . Предположим, что γ_i содержит 2 единицы и 4 нуля в нижних 6 строках. Тогда $\text{wt}(\gamma_i^+) \in \{2, 6\}$.

Доказательство. Положим $H = \{F_2^{k_a} \mid x_i = 0\}$. Гиперплоскость H содержит в точности 4 набора из T^- , поэтому по лемме 15 гиперплоскость H должна содержать 4 или 8 наборов из T^+ . Отсюда следует, что $\text{wt}(\gamma_i^+)$ равно 2 или 6.

Рассмотрим теперь отдельно случаи $k^- = 4$ и $k^- = 5$.

Случай $k^- = 5$. В этом случае правая часть матрицы M содержит два столбца. По лемме 18 без ограничения общности можно предположить, что эти столбцы суть

$$\delta_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)^T, \quad \delta_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)^T.$$

Без ограничения общности можно считать, что матрица M имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccccc|cc} * & * & * & * & * & & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & & 0 & 1 \\ * & * & * & * & * & & 0 & 1 \\ * & * & * & * & * & & 1 & 0 \\ * & * & * & * & * & & 1 & 0 \\ * & * & * & * & * & & 1 & 1 \\ * & * & * & * & * & & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{array} \right).$$

По лемме 20 все столбцы γ_i^+ , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, содержат в точности 5 единиц.

Лемма 22. Пусть $k^- = 5$. Тогда при $1 \leq i_1 < i_2 \leq 5$ справедливо включение $d(\gamma_{i_1}^+, \gamma_{i_2}^+) \in \{2, 6\}$.

Доказательство. Положим $H = \{F_2^{k_a} \mid x_{i_1} + x_{i_2} = 0\}$. Гиперплоскость H содержит в точности 4 набора из T^- , поэтому по лемме 15 гиперплоскость H должна содержать 4 или 8 наборов из T^+ . Отсюда следует, что

$$d(\gamma_{i_1}^+, \gamma_{i_2}^+) = \text{wt}(\gamma_{i_1}^+ + \gamma_{i_2}^+) \in \{2, 6\}.$$

Лемма 23. Пусть $k^- = 5$. Тогда для любых $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $c_1, c_2 \in \{0, 1\}$

$$d(\gamma_i^+, c_1\delta_1^+ + c_2\delta_2^+) = 5.$$

Доказательство. Положим $H = \{F_2^{k_a} \mid x_i + c_1y_1 + c_2y_2 = 0\}$. Гиперплоскость H содержит в точности 5 наборов из T^- , поэтому по лемме 15 гиперплоскость H должна содержать 5 или 9 наборов из T^+ . Но если H содержит 9 наборов из T^+ , то H содержит в точности 14 наборов из S_f . Это невозможно по лемме 16. Отсюда следует, что

$$d(\gamma_i^+, c_1\delta_1^+ + c_2\delta_2^+) = \text{wt}(\gamma_i^+ + c_1\delta_1^+ + c_2\delta_2^+) = 5.$$

Лемма 24. Пусть $k^- = 5$. Тогда для любого i , $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, столбец γ_i^+ содержит в точности 2 единицы в строках с 1-й по 4-ю, в точности 1 единицу в строках 5, 6, в точности 1 единицу в строках 7, 8, в точности 1 единицу в строках 9, 10.

Доказательство. Если γ_i^+ содержит 0 единиц в строках 9, 10, то из равенства $d(\gamma_i^+, \delta_1^+) = d(\gamma_i^+, \delta_2^+) = 5$ следует, что γ_i^+ содержит только единицы в строках 5, 6, 7, 8. Но в этом случае $d(\gamma_i^+, \delta_1^+ + \delta_2^+) = 1$, что противоречит лемме 23. Если γ_i^+ содержит 2 единицы в строках 9, 10, то из равенства $d(\gamma_i^+, \delta_1^+) = d(\gamma_i^+, \delta_2^+) = 5$ следует, что γ_i^+ содержит только нули в строках 5, 6, 7, 8. Но в этом случае $d(\gamma_i^+, \delta_1^+ + \delta_2^+) = 9$, что противоречит лемме 23. Поэтому γ_i^+ содержит в точности 1 единицу в строках 9, 10. Отсюда следует, что γ_i^+ содержит в точности 1 единицу в строках 7, 8, в точности 1 единицу в строках 5, 6 и в точности 2 единицы в строках с 1-й по 4-ю.

Лемма 25. Случай $k^- = 5$ невозможен.

Доказательство. Существует ровно 3 пары противоположных наборов длины 4 с в точности 2 единицами. Поэтому в левой части M найдутся два столбца γ_{i_1} и γ_{i_2} , которые либо идентичны, либо противоположны в верхних 4 строках. Пусть γ_{i_3} — еще какой-то столбец в левой части M , $i_1 \neq i_3$, $i_2 \neq i_3$. Тогда из леммы 24 легко видеть, что каждая группа строк (1–4), (5, 6), (7, 8), (9, 10) дает в сумму $S = d(\gamma_{i_1}^+, \gamma_{i_2}^+) + d(\gamma_{i_1}^+, \gamma_{i_3}^+) + d(\gamma_{i_2}^+, \gamma_{i_3}^+)$ вклад, делящийся на 4. Поэтому сумма S делится на 4. С другой стороны, по лемме 22 все слагаемые в S сравнимы с 2 по модулю 4. Поэтому S также сравнима с 2 по модулю 4. Это противоречие доказывает лемму 25.

Таким образом, мы доказали, что случай $k^- = 5$ невозможен.

Случай $k^- = 4$. В этом случае правая часть матрицы M содержит в точности три столбца. По лемме 18 без ограничения общности мы можем предположить, что эти столбцы есть

$$\delta_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)^T,$$

$$\delta_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)^T,$$

$$\delta_3 = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)^T.$$

Без ограничения общности мы можем предположить, что матрица M имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 1 \\ * & * & * & * & 0 & 1 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 1 & 1 \\ * & * & * & * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 1 & 0 & 1 \\ * & * & * & * & 1 & 1 & 0 \\ * & * & * & * & 1 & 1 & 1 \\ \hline * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Пусть $c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1\}$. Положим

$$\delta^+(c_1, c_2, c_3) = c_1\delta_1^+ + c_2\delta_2^+ + c_3\delta_3^+.$$

Лемма 26. Пусть $k^- = 4$. Тогда никакой столбец γ_i в левой части матрицы M не может иметь ноль в 11-й строке.

Доказательство. Предположим, что некоторый столбец γ_i имеет ноль в 11-й строке. Тогда по лемме 20 имеет место равенство $\text{wt}(\gamma_i^+) = 5$. Тем же путем, что и в доказательстве леммы 23, можно показать, что для любых $c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1\}$ справедливо равенство $d(\gamma_i^+, \delta^+(c_1, c_2, c_3)) = 5$. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1\}} d(\gamma_i^+, \delta^+(c_1, c_2, c_3)).$$

Заметим, что для любой строки с 4-й по 10-ю в точности 4 из 8 наборов $\delta^+(c_1, c_2, c_3)$ имеют единицу в этой строке. Поэтому $S = 28 + 8w_0 = 40$, где w_0 — это число единиц в γ_i в строках с 1-й по 3-ю. Отсюда следует, что $w_0 = 1,5$, но w_0 должно быть целым числом. Это противоречие доказывает лемму 26.

Из леммы 26 следует, что без ограничения общности матрица M имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 1 \\ * & * & * & * & 0 & 1 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 1 & 1 \\ * & * & * & * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 1 & 0 & 1 \\ * & * & * & * & 1 & 1 & 0 \\ * & * & * & * & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Лемма 27. Пусть $k^- = 4$. Тогда $d(\gamma_{i_1}^+, \gamma_{i_2}^+) \in \{2, 6\}$ для любых $1 \leq i_1 < i_2 \leq 4$.

Доказательство. Положим $H = \{F_2^{k_a} \mid x_{i_1} + x_{i_2} = 0\}$. Гиперплоскость H содержит в точности 4 набора из T^- , поэтому по лемме 15 гиперплоскость H должна содержать 4 или 8 наборов из T^+ . Отсюда следует, что $d(\gamma_{i_1}^+, \gamma_{i_2}^+) \in \{2, 6\}$.

Лемма 28. Пусть $k^- = 4$. Тогда любой столбец γ_i в левой части матрицы M имеет в точности 2 единицы в строках с 1-й по 3-ю и совпадает в строках с 4-й по 10-ю с вектор-столбцом $\delta^+(c_1, c_2, c_3)$ при некоторых $c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1\}$.

Доказательство. В силу леммы 21 справедливо включение $\text{wt}(\gamma_i^+) \in \{2, 6\}$. Тем же способом можно показать, что для любых $c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1\}$ справедливо включение $d(\gamma_i^+, \delta^+(c_1, c_2, c_3)) \in \{2, 6\}$.

Предположим, что $\text{wt}(\gamma_i^+) = 2$. Если γ_i^+ не содержит обе свои единицы в строках с 1-й по 3-ю, то легко найти $c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1\}$ такие, что набор $\delta^+(c_1, c_2, c_3)$ содержит в точности одну единицу в тех строках, где и γ_i^+ имеет единицу. Тогда будет справедливо равенство $d(\gamma_i^+, \delta^+(c_1, c_2, c_3)) = 4$, что невозможно. Поэтому γ_i^+ содержит обе свои единицы в строках с 1-й по 3-ю и совпадает в строках с 4-й по 10-ю с набором $\delta^+(0, 0, 0)$, то есть имеет требуемый вид.

Теперь предположим, что $\text{wt}(\gamma_i^+) = 6$. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1\}} d(\gamma_i^+, \delta^+(c_1, c_2, c_3)).$$

Заметим, что для любой строки с 4-й по 10-ю в точности 4 из 8 наборов $\delta^+(c_1, c_2, c_3)$ имеют единицу в этой строке. Поэтому $S = 28 + 8w_0$, где w_0 — число единиц в γ_i в строках с 1-й по 3-ю. Если для любых $c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1\}$ справедливо равенство $d(\gamma_i^+, \delta^+(c_1, c_2, c_3)) = 6$, то $S = 48$ и $w_0 = 2, 5$. Но w_0 должно быть целым числом. Поэтому существуют $c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1\}$ такие, что $d(\gamma_i^+, \delta^+(c_1, c_2, c_3)) = 2$. Обозначим $\delta^+(c_1, c_2, c_3)$ через δ_0^+ . Тогда $\text{wt}(\gamma_i^+ + \delta_0^+) = 2$ и для любых $c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1\}$ справедливо включение $d(\gamma_i^+ + \delta_0^+, \delta^+(c_1, c_2, c_3)) \in \{2, 6\}$. Как было указано в начале этого доказательства, набор $\gamma_i^+ + \delta_0^+$ должен иметь в точности 2 единицы в строках с 1-й по 3-ю и одни нули в строках с 4-й по 10-ю. Следовательно, набор γ_i^+ имеет в точности 2 единицы в строках с 1-й по 3 и совпадает с набором δ_0^+ в строках с 4-й по 10-ю.

Лемма 29. *Случай $k^- = 4$ невозможен.*

Доказательство. По лемме 28 все столбцы γ_i в левой части M имеют в точности 2 единицы в строках с 1-й по 3-ю. Левая часть M содержит 4 столбца, поэтому среди них найдутся столбцы γ_{i_1} и γ_{i_2} , $1 \leq i_1 < i_2 \leq 4$, совпадающие в строках с 1-й по 3-ю. В строках с 4-й по 10-ю столбцы γ_{i_1} и γ_{i_2} совпадают по лемме 28 с некоторыми вектор-столбцами $\delta^+(c'_1, c'_2, c'_3)$ и $\delta^+(c''_1, c''_2, c''_3)$, соответственно. В силу леммы 17 справедливо включение $d(\delta^+(c'_1, c'_2, c'_3), \delta^+(c''_1, c''_2, c''_3)) \in \{0, 4\}$. Отсюда, $d(\gamma_{i_1}^+, \gamma_{i_2}^+) \in \{0, 4\}$, что противоречит лемме 27.

Все случаи рассмотрены. Теорема 1 доказана.

Таким образом, мы показали, что аффинный ранг платовидных функций с носителем спектра мощности 16 не может принимать никаких значений, кроме 4, 5 и 6. Функции с такими параметрами известны, и их примеры приводились, например, в [5]. Мы не будем здесь приводить примеры. Эти примеры построены в следующем разделе в рамках общей конструкции.

5. Оценки аффинного ранга платовидных функций с произвольной мощностью носителя спектра

Лемма 30. *Пусть существует платовидная функция с носителем спектра мощности 4^h и аффинным рангом k_a . Тогда для любого натурального s , удовлетворяющего неравенствам $k_a + 2 \leq s \leq 2k_a + 2$, существует платовидная функция с носителем спектра мощности 4^{h+1} и аффинным рангом s .*

Доказательство. Если существует платовидная функция с носителем спектра мощности 4^h и аффинным рангом k_a , то из нее по леммам 2 и 3 аффинным преобразованием спектра и последующим удалением фиктивных переменных можно получить платовидную функцию f на $F_2^{k_a}$ с носителем спектра мощности 4^h , причем так, чтобы спектру функции f принадлежал и нулевой набор, и все наборы веса 1. Рассмотрим функцию $f_1(x_1, \dots, x_s) = f(x_{s-k_a}, \dots, x_{s-1}) + x_s$ на F_2^s (переменные $x_1, \dots, x_{s-k_a-1}$ у функции f_1 будут фиктивными). По леммам 3 и 4 функция f_1 снова будет платовидной с той же мощностью носителя, причем ко всем наборам из S_f в носителе спектра S_{f_1} слева припишется $s - k_a - 1$ нулей, а справа припишется единица. Линейное подпространство размерности k_a в $F_2^{k_a}$, содержавшее S_f , при переходе к функции f_1 перейдет в класс смежности размерности k_a в F_2^s , содержащий S_{f_1} , но линейным подпространством не являющийся. Поэтому ранг функции f_1 равен $k_a + 1$. Заметим, что носителю спектра S_{f_1} принадлежат следующие наборы: все наборы веса 2 с единицами в компонентах i и s , $i = s - k_a, \dots, s - 1$, а также набор веса 1 с единицей в компоненте s . Образует функцию $f_2(x_1, \dots, x_s) = f_1(x_s, \dots, x_1)$ на F_2^s , переименовав все переменные в обратном порядке. Ясно, что функция f_2 будет обладать свойствами, аналогичными свойствам функции f_1 . Носителю спектра S_{f_2} принадлежат в числе прочих следующие наборы: все наборы веса 2 с единицами в компонентах 1 и i , $i = 2, \dots, k_a + 1$, а также набор веса 1 с единицей в компоненте 1. Заметим, что во всех наборах из S_{f_1} в первой компоненте ноль, а во всех наборах из S_{f_2} в первой компоненте единица. Поэтому множества S_{f_1} и S_{f_2} в F_2^s не пересекаются.

Рассмотрим функцию

$$f'(x_1, \dots, x_{s+1}) = (x_{s+1} + 1)f_1(x_1, \dots, x_s) + x_{s+1}f_2(x_1, \dots, x_s)$$

на F_2^{s+1} . По лемме 14 для любого $u \in F_2^s$

$$W_{f'}(u0) = W_{f_1}(u) + W_{f_2}(u), \quad W_{f'}(u1) = W_{f_1}(u) - W_{f_2}(u).$$

Как было указано выше, множества S_{f_1} и S_{f_2} в F_2^s не пересекаются. Поэтому каждый набор u из S_{f_1} и S_{f_2} в F_2^s даст ровно два набора $(u, 0)$ и $(u, 1)$, входящие в носитель спектра $S_{f'}$ функции f' на F_2^{s+1} , причем значения ненулевых коэффициентов Уолша функции f' будут теми же самыми, что и значения ненулевых коэффициентов Уолша функций f_1 и f_2 . Таким образом, мощность $S_{f'}$ равна 4^{h+1} , и функция f' также является платовидной функцией.

Из сказанного выше следует, что $S_{f'}$ принадлежат все наборы веса 2 с единицами в компонентах 1 и i , $i = 2, \dots, k_a + 1$, все наборы веса 2 с единицами в компонентах i и s , $i = s - k_a, \dots, s - 2, s - 1, s + 1$, а также наборы веса 1 с единицей в компонентах 1 и s . Легко видеть, что ранг вышеуказанной системы наборов равен $s + 1$. Поэтому ранг функции f' на F_2^{s+1} равен $s + 1$. В то же время для любого набора из $S_{f'}$ сумма значений 1-й и s -й компонент равна 1. Поэтому $S_{f'}$ принадлежит гиперплоскости $H = \{x \in F_2^{s+1} \mid x_1 + x_s = 1\}$, и аффинный ранг функции f' меньше, чем $s + 1$, но он не меньше, чем ранг функции f' без единицы, и поэтому аффинный ранг функции f' равен s . Таким образом, требуемая функция построена.

Теорема 2. Для любого натурального k_a , удовлетворяющего неравенствам $2h \leq k_a \leq 2^{h+1} - 2$, существует платовидная функция с носителем спектра мощности 4^h и аффинным рангом k_a .

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по h . При $h = 1$ величина k_a может быть равна только 2. Такой функцией является, например, бент-функция $x_1 x_2$ на F_2^2 (если мы не хотим считать бент-функцию платовидной функцией, то добавим к ней фиктивную переменную). Если утверждение теоремы верно для h , то его справедливость для $h + 1$ немедленно следует из леммы 30.

Следствие 1. *Аффинный ранг платовидной функции с носителем спектра мощности 16 может принимать только значения 4, 5 и 6.*

Доказательство. Верхняя оценка $k_a \leq 6$ доказана в теореме 1. Нижняя оценка $k_a \geq 4$ очевидна. Существование функций с $k_a = 4, 5, 6$ следует из теоремы 2. Заметим, что примеры таких функций даны в [5].

Тривиальной верхней оценкой аффинного ранга k_a платовидной функции с носителем спектра мощности 4^h является $k_a \leq 4^h - 1$. Приведем несколько улучшенную оценку.

Теорема 3. *Пусть f является платовидной функцией, $|S_f| = 4^h$. Тогда для аффинного ранга k_a носителя спектра S_f справедлива оценка*

$$k_a \leq 2^{2h-1} - 2^{h-1} + h.$$

Будем следовать путем, аналогичным доказательству теоремы 1. Согласно лемме 8 $|T^+|, |T^-| \in \{2^{2h-1} + 2^{h-1}, 2^{2h-1} - 2^{h-1}\}$. Без ограничения общности можно считать, что $|T^+| = 2^{2h-1} + 2^{h-1}$, $|T^-| = 2^{2h-1} - 2^{h-1}$. Предположим, что аффинный ранг носителя спектра S_f равен k_a и аффинный ранг T^- равен k^- . Очевидно, что $k^- \leq 2^{2h-1} - 2^{h-1} - 1$. Легко видеть, что с помощью некоторого аффинного отображения в F_2^n можно вложить наименьший класс смежности, содержащий носитель спектра S_f , в $F_2^{k_a} \otimes (0, \dots, 0)$, где $(0, \dots, 0)$ — набор из $n - k_a$ нулей, так, чтобы некоторые $k^- + 1$ наборов из T^- перешли в наборы $(0, 0, 0, \dots, 0)$, $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где в последнем наборе единица стоит на k^- -м месте. Получившаяся в результате отображения булева функция будет платовидной с тем же набором значений, принимаемых коэффициентами Уолша, и теми же значениями k_a и k^- . По лемме 3 переменные с $(k_a + 1)$ -й по n -ю у получившейся функции будут фиктивными. Отбрасывая их и деля все коэффициенты Уолша на 2^{n-k_a} , мы по леммам 2 и 3 получим платовидную функцию, заданную на $F_2^{k_a}$, с носителем спектра той же мощности 2^h . Таким образом, без потери общности мы в оставшейся части этого раздела будем рассматривать именно такой носитель спектра.

Образуем матрицу M размера $4^h \times k_a$. В строках M будем записывать слева направо наборы из S_f . В первых $2^{2h-1} + 2^{h-1}$ строках M запишем наборы из T^+ , а в последних $2^{2h-1} - 2^{h-1}$ строках M запишем наборы из T^- . Левые k^- столбцов M назовем левой частью M , оставшиеся $k_a - k^-$ столбцов назовем правой частью M . Из того, что $|T^-| = 2^{2h-1} - 2^{h-1}$, следует оценка $k^- \leq 2^{2h-1} - 2^{h-1} - 1$.

Обозначим через δ_j столбцы из правой части M , а через y_j соответствующие этим столбцам переменные. Обозначим через δ_j^+ подстолбцы, содержащие верхние $2^{2h-1} + 2^{h-1}$ элементов столбцов δ_j соответственно.

Лемма 31. *Для любого множества $\delta_{j_1}, \dots, \delta_{j_s}$, $1 \leq s \leq k_a - k^-$, различных столбцов из правой части M выполняется равенство*

$$\text{wt}(\delta_{j_1}^+ + \dots + \delta_{j_s}^+) = 2^h.$$

Доказательство. Положим $H = \{F_2^{k_a} \mid y_{j_1} + \dots + y_{j_s} = 0\}$. Гиперплоскость H содержит все $2^{2h-1} - 2^{h-1}$ наборов из T^- , поэтому по лемме 8 гиперплоскость H должна содержать $2^{2h-1} - 2^{h-1}$ или $2^{2h-1} + 2^{h-1}$ наборов из T^+ . Но если H содержит $2^{2h-1} + 2^{h-1}$ наборов из T^+ , то H содержит S_f . Это невозможно, поскольку k_a есть размерность наименьшего класса смежности, содержащего S_f . Поэтому H содержит $4^h - 2^h$ наборов из S_f и $F_2^n \setminus H$ содержит в точности 2^h наборов из S_f .

Лемма 32. Правая часть матрицы M содержит не более $h + 1$ столбцов.

Доказательство. Пусть правая часть матрицы M содержит m столбцов $\delta_1, \dots, \delta_m$. Для $c_1, \dots, c_m \in \{0, 1\}$ положим $\delta^+(c_1, \dots, c_m) = c_1\delta_1^+ \dots + c_m\delta_m^+$. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{c_1, \dots, c_m \in \{0, 1\}} \text{wt}(\delta^+(c_1, \dots, c_m)).$$

Каждое слагаемое в S , кроме слагаемого, соответствующего нулевому набору, равно 2^h по лемме 31. Обозначим через r число строк среди верхних $2^{2h-1} + 2^{h-1}$ строк матрицы M , содержащих хотя бы одну единицу в правой части матрицы M . Заметим, что если строка в верхней части матрицы M содержит хотя бы одну такую единицу, то в точности 2^{m-1} из $2^m - 1$ ненулевых наборов $\delta^+(c_1, \dots, c_m)$ имеют единицу в этой строке. Поэтому $S = 2^h(2^m - 1) = r2^{m-1}$. Отсюда $r = 2^{h+1} - 2^{h-m+1}$. В силу целочисленности r справедливо неравенство $m \leq h + 1$, что и требовалось доказать.

Утверждение теоремы 3 немедленно следует из структуры матрицы M и леммы 32.

При $h = 2$ оценка теоремы 3 не достигается. Осмелимся выдвинуть гипотезу.

Гипотеза. Для любого натурального h максимально возможный аффинный ранг плато-видной функции с носителем спектра мощности 4^h равен $2^{h+1} - 2$.

Список литературы

1. Кузнецов Ю. В., О носителях плато-видных функций. В сб.: *Материалы VIII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения»*. МГУ, Москва, 2004, с. 424–426.
2. Логачев О. А., Сальников А. А., Ященко В. В., *Булевы функции в теории кодирования и криптографии*. МЦНМО, Москва, 2004.
3. Таранников Ю. В., О корреляционно-иммунных и устойчивых булевых функциях. *Матем. вопросы кибернетики* (2002) **11**, 91–148.
4. Таранников Ю. В., О плато-видных устойчивых функциях. В сб.: *Материалы VIII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения»*. МГУ, Москва, 2004, с. 431–435.
5. Carlet C., Charpin P., Cubic Boolean functions with highest resiliency. In: *Proc. 2004 IEEE Intern. Symposium on Inform. Theory*, 2004, p. 497.
6. Carlet C., Sarkar P., Spectral domain analysis of correlation immune and resilient Boolean functions. *Finite Fields Appl.* (2002) **8**, 120–130.
7. Kasami T., Tokura N., Azumi S., On the weight enumeration of weights less than $2.5d$ of Reed–Muller codes. *Information and Control* (1976) **30** (4), 380–395.
8. Pei D., Qin W., The correlation of a Boolean function with its variables. *Lecture Notes Computer Sci.* (2000) **1977**, 1–8.
9. Zheng Y., Zhang X.-M., Plateaued functions. *Lecture Notes Computer Sci.* (1999) **1726**, 284–300.

Статья поступила 27.01.2005.