Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Лобанов, Точное соотношение между нелинейностью и алгебраической иммунностью, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 3, 152–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm67>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 10:34:01

Точное соотношение между нелинейностью и алгебраической иммунностью

© 2006 г. М. С. Лобанов

Булевы функции нашли широкое применение в криптографии. В связи с появлением “алгебраической” атаки на потоковые шифры, к булевым функциям, используемым в этих шифрах в качестве нелинейных фильтров, стало, наряду с другими, предъявляться требование обладания высокой алгебраической иммунностью. Еще одним из наиболее важных криптографических свойств булевых функций, особенно используемых в потоковых шифрах, является нелинейность. В связи с этим представляет интерес вопрос связи нелинейности булевой функции с ее алгебраической иммунностью.

В настоящей работе мы получим нижнюю оценку нелинейности через значение алгебраической иммунности и построим функции, на которых эта оценка достигается при любых допустимых значениях параметров.

Булевы функции нашли широкое применение в криптографии. В последнее время в связи с появлением так называемой “алгебраической” атаки на потоковые шифры (см. например [1, 5]), к булевым функциям, используемым в этих шифрах в качестве нелинейных фильтров, стало наряду с другими предъявляться требование обладания высокой алгебраической иммунностью. Еще одним из наиболее важных криптографических свойств булевых функций, особенно используемых в потоковых шифрах, является нелинейность. В связи с этим очень интересен вопрос, как связаны нелинейность булевой функции и ее алгебраическая иммунность.

В [2] было доказано утверждение, позволяющее оценивать снизу нелинейность функции через значение ее алгебраической иммунности.

В настоящей работе мы получим более сильную нижнюю оценку нелинейности через значение алгебраической иммунности и построим функции, на которых эта оценка достигается при любых допустимых значениях параметров.

Известно, что булева функция единственным образом представляется полиномом.

Определение 1. Степенью булевой функции называется длина самого длинного слагаемого в ее полиноме (количество переменных в этом слагаемом).

Определение 2. Булева функция g над F_2^n называется аннигилятором булевой функции f над F_2^n , если $fg = 0$.

Очевидно, что аннигиляторы f образуют линейное подпространство в пространстве всех булевых функций от n переменных.

Определение 3. Алгебраической иммунностью $AI(f)$ булевой функции f над F_2^n называется степень булевой функции g над F_2^n , где g не равная тождественно нулю функция с минимальной степенью, такая, что $fg = 0$ или $(f + 1)g = 0$.

Известно [1, 5], что для любой f над F_2^n

$$AI(f) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Определение 4. Весом $wt(x)$ набора x из F_2^n называется число единиц в x .

Определение 5. Расстояние между булевыми функциями f_1 и f_2 определяется как

$$d(f_1, f_2) = |\{x \in F_2^n \mid f_1(x) \neq f_2(x)\}|.$$

Определение 6. Нелинейность булевой функции f над F_2^n определяется как

$$nl(f) = \min_{l, \deg(l) \leq 1} d(f, l).$$

Определение 7. Для любого набора $u \in F_2^n$ значение

$$W_f(u) = \sum_{x \in F_2^n} (-1)^{f(x) + \langle u, x \rangle}$$

называется коэффициентом Уолша.

Нелинейность выражается через коэффициенты Уолша следующей формулой:

$$nl(f) = 2^{n-1} - \frac{1}{2} \max_{u \in F_2^n} |W_f(u)|.$$

В [2] было доказано, что если $nl(f) < \sum_{i=0}^d \binom{n}{i}$, то $AI(f) \leq d + 1$. Это эквивалентно нижней оценке нелинейности

$$nl(f) \geq \sum_{i=0}^{AI(f)-2} \binom{n}{i}.$$

Определение 8. Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется самодвойственной, если

$$f(x_1 + 1, x_2 + 1, \dots, x_n + 1) = f(x_1, \dots, x_n) + 1.$$

Можно заметить, что если f самодвойственная, то из того, что f не имеет ненулевого аннигилятора степени меньше k , следует, что $f + 1$ тоже не имеет ненулевого аннигилятора степени, меньшей k . Поэтому минимальные степени ненулевых аннигиляторов функций f и $f + 1$ совпадают. Таким образом, для нахождения алгебраической иммунности самодвойственной функции f достаточно ограничиться только аннигиляторами функции f .

Лемма 1. Любой аннигилятор $g(x_1, \dots, x_n)$ функции $l(x_1, \dots, x_n)$, $\deg(l) = 1$, может быть представлен в виде

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)(l(x_1, \dots, x_n) + 1),$$

где

$$\deg(f) = \deg(g) - 1.$$

Доказательство. В силу аффинной эквивалентности можно считать, что $l = x_1 + 1$.

Рассмотрим запись $g(x_1, \dots, x_n)$ в виде полинома. В силу того, что аннигиляторы функции образуют линейное пространство, после вычеркивания всех мономов, содержащих x_1 , должна остаться функция $g_1(x_2, \dots, x_n)$, такая, что $g_1 l = g_1(x_1 + 1) = 0$. Так как g_1 не зависит от x_1 , то $g_1 = 0$. Следовательно, любой моном g содержит x_1 , тогда

$$g(x_1, \dots, x_n) = x_1 f(x_1, \dots, x_n) = (l + 1)f,$$

где $\deg(f) = \deg(g) - 1$.

Лемма 2. Пусть $l(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция, $\deg(l) = 1$. Тогда аннигиляторы функции l степени, не большей t , образуют линейное пространство размерности $\sum_{i=0}^{t-1} \binom{n-1}{i}$.

Доказательство. В силу аффинной эквивалентности можно считать, что $l = x_1 + 1$.

Рассмотрим произвольный аннигилятор $g(x_1, \dots, x_n)$ функции $l(x_1, \dots, x_n)$ такой, что $\deg(g) \leq t$. Рассмотрим запись $g(x_1, \dots, x_n)$ в виде полинома. В силу того, что аннигиляторы функции образуют линейное пространство, после вычеркивания всех мономов содержащих x_1 , должна остаться функция $g_1(x_2, \dots, x_n)$ такая, что $g_1 l = g_1(x_1 + 1) = 0$. Так как g_1 не зависит от x_1 , то $g_1 = 0$. Следовательно, любой моном g содержит x_1 , тогда

$$g(x_1, \dots, x_n) = x_1 f(x_2, \dots, x_n),$$

где $\deg(f) \leq t - 1$.

При этом любая функция $g(x_1, \dots, x_n) = x_1 f(x_2, \dots, x_n)$, где $f(x_2, \dots, x_n)$ — произвольная булева функция от $n - 1$ переменных степени не выше $t - 1$, является аннигилятором l степени не выше t . Из этого следует утверждение леммы.

Доказательство следующего утверждения можно найти в [4], но мы решили привести его в нашей работе ввиду его простоты.

Лемма 3. Если f — булева функция над F_2^n и $\text{AI}(f) > k$, то

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \leq \text{wt}(f) \leq \sum_{i=0}^{n-k-1} \binom{n}{i}.$$

Доказательство. Ищем аннигилятор функции f методом неопределенных коэффициентов:

$$g = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j + \dots + \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}, \quad \deg(g) \leq k.$$

Функция g является аннигилятором f тогда и только тогда, когда $f(x) = 1$ влечет $g(x) = 0$. Тогда, для того чтобы $\text{AI}(f) > k$, необходимо, чтобы получившаяся однородная система линейных уравнений на $a_0, a_1, a_2, \dots$ имела бы только нулевое решение. Для этого необходимо, чтобы число неизвестных не превышало числа уравнений. Число уравнений равно $\text{wt}(f)$, а число неизвестных $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i}$. Следовательно, левое неравенство доказано. Применяя такие же рассуждения к $f + 1$, получаем правое неравенство.

Теорема 1. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция над F_2^n и $\text{AI}(f) = k$, тогда

$$\text{nl}(f) \geq 2^{n-1} - \sum_{i=k-1}^{n-k} \binom{n-1}{i} = 2 \sum_{i=0}^{k-2} \binom{n-1}{i}. \quad (1)$$

Доказательство. Представим нелинейность функции f в виде

$$\text{nl}(f) = 2^{n-1} - \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha = \max_{u \in F_2^n} |W_f(u)|.$$

Если $\max_{u \in F_2^n} |W_f(u)|$ достигается на нулевом наборе, тогда или f , или $f + 1$ имеет вес $(2^n - \alpha)/2$. Тогда в соответствии с леммой 3

$$\frac{2^n - \alpha}{2} \geq \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}.$$

Следовательно,

$$\alpha \leq \sum_{i=k}^{n-k} \binom{n}{i} \leq 2 \sum_{i=k-1}^{n-k} \binom{n-1}{i}.$$

Отсюда получаем соответствующую оценку для нелинейности.

Если $\max_{u \in F_2^n} |W_f(u)|$ не достигается на нулевом наборе, тогда существует функция $l(x_1, \dots, x_n)$, $\deg(l) = 1$, такая, что

$$d(f, l) = \frac{2^n - \alpha}{2}.$$

Функции f и l совпадают на $(2^n + \alpha)/2$ наборах.

Заметим, что

$$2^{n-1} - \alpha/2 = d(f, l) = \text{wt}((f + 1)l) + \text{wt}(f(l + 1)).$$

Отсюда

$$\min\{\text{wt}((f + 1)l), \text{wt}(f(l + 1))\} \leq (1/2)(2^{n-1} - \alpha/2) = 2^{n-2} - \alpha/4.$$

Если $\text{wt}(f(l + 1)) < \text{wt}((f + 1)l)$, то определим $f_1 = f$, $l_1 = l + 1$, в противном случае определим $f_1 = f + 1$, $l_1 = l$.

Введем функцию $f_2 = f_1 l_1$. Тогда $\text{wt}(f_2) \leq 2^{n-2} - \alpha/4$.

Ищем аннигиляторы g функции f_2 степени не выше $k - 2$ методом неопределенных коэффициентов:

$$g = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j + \dots + \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{k-2} \leq n} a_{i_1 \dots i_{k-2}} x_{i_1} \dots x_{i_{k-2}}.$$

Функция g является аннигилятором f тогда и только тогда, когда $f(x) = 1$ влечет $g(x) = 0$.

Следовательно, получаем однородную систему из не более чем $2^{n-2} - \alpha/4$ линейных уравнений на $\sum_{i=0}^{k-2} \binom{n}{i}$ неизвестных. Пространство решений системы имеет размерность не менее $\sum_{i=0}^{k-2} \binom{n}{i} - (2^{n-2} - \alpha/4)$.

В соответствии с леммой 2, размерность пространства аннигиляторов функции l_1 степени не выше $k - 2$ равна $\sum_{i=0}^{k-3} \binom{n-1}{i}$.

Если

$$\sum_{i=0}^{k-2} \binom{n}{i} - \left(2^{n-2} - \frac{\alpha}{4}\right) > \sum_{i=0}^{k-3} \binom{n-1}{i},$$

то найдется функция f_3 , $\deg(f_3) \leq k - 2$, такая что $f_2 f_3 = 0$, но $f_3 l_1 \neq 0$, тогда $f_3 l_1$ будет аннигилятором f_1 , при этом $\deg(f_3 l_1) \leq k - 1$, что противоречит соотношению $\text{AI}(f) = k$. Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-2} \binom{n}{i} - \left(2^{n-2} - \frac{\alpha}{4}\right) &\leq \sum_{i=0}^{k-3} \binom{n-1}{i}, \\ \frac{\alpha}{4} &\leq 2^{n-2} - \frac{1}{2} \sum_{i=k-2}^{n-k+1} \binom{n-1}{i} + 2^{n-2} - \left(2^{n-1} - \frac{1}{2} \sum_{i=k-1}^{n-k+1} \binom{n}{i}\right), \\ \frac{\alpha}{4} &\leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k-1}^{n-k+1} \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right) - \sum_{i=k-2}^{n-k+1} \binom{n-1}{i} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=k-1}^{n-k} \binom{n-1}{i}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{nl}(f) \geq 2^{n-1} - \sum_{i=k-1}^{n-k} \binom{n-1}{i}.$$

Следствие 1. Если n нечетно и $\text{AI}(f(x_1, \dots, x_n)) = \lceil n/2 \rceil$, то

$$\text{nl}(f) \geq 2^{n-1} - \binom{n-1}{(n-1)/2}. \quad (2)$$

Заметим, что в [4] была построена функция от нечетного числа переменных n с алгебраической иммунностью $\lceil n/2 \rceil$ и нелинейностью $\text{nl}(f) = 2^{n-1} - \binom{n-1}{(n-1)/2}$. Из следствия 1 видно, что эта функция достигает границы (2), т.е. среди всех функций с максимально возможной алгебраической иммунностью она является функцией с наихудшей возможной нелинейностью. Подсчет ее нелинейности в [4] довольно труден и занимает много места. Теперь же нижняя оценка нелинейности функции из [4] сразу следует из следствия 1. Верхняя же оценка нелинейности функции из [4] будет следовать из теоремы 2, потому что эта функция является частным случаем функций $f_{n,k}$, возникающих в доказательстве теоремы 2. Заметим также, что в [3] для построенной там функции f с нечетным числом переменных n и алгебраической иммунностью $\lceil n/2 \rceil$ доказана нижняя оценка нелинейности $\text{nl}(f) \geq 2^{n-1} - \binom{n-1}{(n-1)/2}$, которая, таким образом, совпадает с оценкой из следствия 1 для всех функций с таким числом переменных и такой алгебраической иммунностью.

Следствие 2. Если n чётно и

$$\text{AI}(f(x_1, \dots, x_n)) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,$$

то

$$\text{nl}(f) \geq 2^{n-1} - \binom{n}{n/2}.$$

Заметим, что в [4] оценка следствия 2 была доказана для очень узкого класса функций.

Теорема 2. Оценка (1) неулучшаема для любого n и любого $k \leq \lceil n/2 \rceil$. Более того, при любых допустимых параметрах существует уравновешенная функция, достигающая этой границы.

Доказательство. Покажем, что оценка (1) из теоремы 1 неулучшаема, предъявив для любого n и любого $k \leq \lceil n/2 \rceil$ функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ такую, что

$$\begin{aligned} \text{AI}(f) &= k, \\ \text{nl}(f) &= 2^{n-1} - \sum_{i=k-1}^{n-k} \binom{n-1}{i}. \end{aligned}$$

Определим функцию $f_{n,k}$ следующим образом:

$$f_{n,k}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \text{wt}(x_1, \dots, x_n) < k, \\ 1, & \text{если } \text{wt}(x_1, \dots, x_n) > n - k, \\ x_1, & \text{если } k \leq \text{wt}(x_1, \dots, x_n) \leq n - k. \end{cases}$$

Теперь докажем, что для любого n и любого $k \leq \lceil n/2 \rceil$

$$\begin{aligned} \text{AI}(f_{n,k}) &= k, \\ \text{nl}(f_{n,k}) &= 2^{n-1} - \sum_{i=k-1}^{n-k} \binom{n-1}{i}. \end{aligned}$$

Несложно заметить, что

$$f_{n,k}(x_1 + 1, x_2 + 1, \dots, x_n + 1) = f_{n,k}(x_1, \dots, x_n) + 1,$$

т. е. $f_{n,k}$ — самодвойственная. Следовательно, функция $f_{n,k}$ является уравновешенной функцией.

В силу самодвойственности $f_{n,k}$, чтобы доказать, что $\text{AI}(f) \geq k$, достаточно доказать, что $f_{n,k} + 1$ не имеет ненулевого аннигилятора степени, меньшей k .

Запишем возможный аннигилятор функции $f + 1$ степени не выше $k - 1$ с помощью неопределённых коэффициентов:

$$g = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j + \dots + \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{k-1} \leq n} a_{i_1 \dots i_{k-1}} x_{i_1} \dots x_{i_{k-1}}.$$

Функция g является аннигилятором $f_{n,k} + 1$ тогда и только тогда, когда $f(x) + 1 = 1$ влечёт $g(x) = 0$. Получаем систему линейных уравнений на коэффициенты функции g :

$$g(x_1, \dots, x_n) = 0$$

для всех наборов x таких, что $\text{wt}(x) \leq k - 1$.

Так как $g(0, \dots, 0) = 0$, то $a_0 = 0$. Так как $g(x) = 0$, если $\text{wt}(x) = 1$, то получаем, что $a_i = a_0 = 0$. Используя индукцию по весу наборов, получаем, что все коэффициенты g равны нулю, следовательно, $g \equiv 0$. Получаем, что

$$\text{AI}(f_{n,k}) \geq k.$$

Вычислим коэффициент Уолша функции $f_{n,k}$, соответствующий набору $(1, 0, \dots, 0)$, используя самодвойственность $f_{n,k}$:

$$\begin{aligned} W_{f_{n,k}}(1, 0, \dots, 0) &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in F_2^n} (-1)^{f_{n,k}(x_1, \dots, x_n) + x_1} \\ &= 2^n - 2 \text{wt}(f_{n,k}(x_1, \dots, x_n) + x_1) \\ &= 2^n - 2(\text{wt}(f_{n,k}(0, x_2, \dots, x_n)) + \text{wt}(f_{n,k}(1, x_2, \dots, x_n) + 1)) \\ &= 2^n - 4 \text{wt}(f_{n,k}(0, x_2, \dots, x_n)) \\ &= 2^n - 4 \sum_{i=n-k+1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \\ &= 2 \sum_{i=k-1}^{n-k} \binom{n-1}{i}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{nl}(f_{n,k}) \leq 2^{n-1} - \sum_{i=k-1}^{n-k} \binom{n-1}{i}.$$

Тогда из теоремы 1 следует, что

$$\text{AI}(f_{n,k}) \leq k,$$

поэтому

$$\text{AI}(f_{n,k}) = k,$$

следовательно,

$$\text{nl}(f_{n,k}) \geq 2^{n-1} - \sum_{i=k-1}^{n-k} \binom{n-1}{i},$$

отсюда

$$\text{nl}(f_{n,k}) = 2^{n-1} - \sum_{i=k-1}^{n-k} \binom{n-1}{i}.$$

Автор выражает глубокую благодарность Ю. В. Таранникову за постановку задачи, внимание к работе и ценные советы.

Список литературы

1. Courtois N., Meier W., Algebraic attacks on stream ciphers with linear feedback. *Lecture Notes Computer Sci.* (2003) **2656**, 345–359.
2. Dalai D. K., Gupta K. C., Maitra S., Results on algebraic immunity for cryptographically significant Boolean functions. *Lecture Notes Computer Sci.* (2004) **3348**, 92–106.
3. Dalai D. K., Gupta K. C., Maitra S., Cryptographically significant Boolean functions: construction and analysis in terms of algebraic immunity. *Lecture Notes Computer Sci.* (2005) **3557**, 98–111.
4. Dalai D. K., Maitra S., Sarkar S., Basic theory in construction of Boolean functions with maximum possible annihilator immunity. *Design, Codes and Cryptography* (2006) **40**, 41–58.
5. Meier W., Pasalic E., Carlet C., Algebraic attacks and decomposition of Boolean functions. *Lecture Notes Computer Sci.* (2004) **3027**, 474–491.

Статья поступила 20.07.2006.