Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков, Асимптотическая формула для числа точек решетки в круге на плоскости Лобачевского, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 4, 9–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm69>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:51:59

Асимптотическая формула для числа точек решетки в круге на плоскости Лобачевского

© 2006 г. Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков

Для точек $z = x + iy$ и $z' = x' + iy'$ из верхней полуплоскости определим расстояние $d = d(z, z')$, полагая

$$d = \ln \left(\frac{u + 2 + \sqrt{u^2 + 4u}}{2} \right),$$

где

$$u = \frac{|z - z'|^2}{yy'}.$$

Круг $K(z_0, T)$ с центром в точке z_0 состоит из точек z , удовлетворяющих неравенству $d(z, z_0) \leq T$. Пусть $N(z_0, T)$ — число элементов γ модулярной группы $PSL_2(\mathbf{Z})$ таких, что точка γz_0 попадает в круг $K(z_0, T)$. В работе уточняется остаточный член в асимптотической формуле для величины $N(z_0, T)$.

Пусть $z = x + iy$ — комплексное число, лежащее в верхней полуплоскости комплексной плоскости. В модели Клейна верхняя полуплоскость определяет плоскость Лобачевского с помощью метрики $l = l(z)$, задаваемой равенством

$$dl^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Группа $G = SL_2(\mathbf{R})$ вещественных матриц второго порядка

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

с определителем, равным 1, с помощью дробно-линейных преобразований

$$\gamma z = \frac{az + b}{cz + d}$$

задает группу движений на плоскости Лобачевского. Отметим, что эта метрика является G -инвариантной, то есть

$$dl^2(z) = dl^2(\gamma z).$$

Метрика l определяет геодезическое расстояние $d = d(z, z')$ между точками $z = x + iy$ и $z' = x' + iy'$ из верхней полуплоскости следующим образом. Положим

$$u = u(z, z') = \frac{|z - z'|^2}{yy'}.$$

Тогда расстояние $d = d(z, z')$ задается равенством

$$d = \ln \left(\frac{u + 2 + \sqrt{u^2 + 4u}}{2} \right).$$

Функция расстояния d является G -инвариантной так же, как и метрика l , то есть

$$d(z, z') = d(\gamma z, \gamma z').$$

Круг $K(z_0, T)$ с центром в точке z_0 и радиусом T состоит из точек z , удовлетворяющих неравенству $d(z, z_0) \leq T$. Последнее неравенство можно переписать в виде

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0 \operatorname{ch} T)^2 \leq y_0^2 \operatorname{sh}^2 T.$$

Обозначим $N(z_0, T)$ число элементов γ модулярной группы $PSL_2(\mathbf{Z}) = SL_2(\mathbf{Z})/\pm I$ таких, что точка γz_0 попадает в круг $K(z_0, T)$.

В настоящей работе уточняется остаточный член в асимптотической формуле для величины $N(z_0, T)$. В случае, когда $z_0 = i$, задача получения асимптотической формулы для $N(T) = N(i, T)$ является прямым аналогом проблемы Гаусса о числе целых точек в круге $x^2 + y^2 \leq T$ на евклидовой плоскости.

Сначала сформулируем утверждение (см. лемму 1 на с. 301 в [17]), которое связывает величину $N(T)$ с числом целых точек на некоторой поверхности.

Лемма 1. Величина $2N(T)$ равна числу целых точек на поверхности $ad - bc = 1$ с условием $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 2 \operatorname{ch} T$.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 1. При $T \rightarrow \infty$

$$N(T) = 8 \operatorname{ch} T + O(e^{3T/4} T^4).$$

Доказательство. Введем обозначение $R = \operatorname{ch} T$. Из леммы 1 следует, что

$$2N(T) = \sum_{\substack{ad-bc=1 \\ a^2+b^2+c^2+d^2 \leq 2R}} 1 = 2\Sigma_1 - \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{\substack{ad-bc=1 \\ a^2+b^2+c^2+d^2 \leq 2R \\ a^2+b^2 \leq R}} 1, \quad \Sigma_2 = \sum_{\substack{ad-bc=1 \\ a^2+b^2 \leq R \\ c^2+d^2 \leq R}} 1.$$

Поскольку $(a, b) = 1$, справедливо либо $|a| \neq |b|$, либо $|a| = |b| = 1$.

В случае, если $|a| = |b| = 1$, число решений неравенства $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 2R$ при условии $ad - bc = 1$ является величиной порядка $\ll \sqrt{R}$.

Если $|a| \neq |b|$, то имеется две возможности: либо $|a| > |b| \geq 1$, либо $|b| > |a| \geq 1$.

Преобразуем суммы Σ_1 и Σ_2 . Пусть сначала имеет место первая возможность. При фиксированных a и b решим уравнение $ad - bc = 1$. Пусть вычет β по модулю a — решение сравнения $-\beta b \equiv 1 \pmod{a}$. Тогда $c \equiv \beta \pmod{a}$, то есть для любого целого числа t число c можно представить в виде $c = \beta + at$. Из равенства $ad - b(\beta + at) = 1$ находим, что

$$d = \frac{\beta b + 1}{a} + bt = \alpha + bt,$$

где $\alpha = (\beta b + 1)/a$.

Отсюда следует, что суммирование по наборам (a, b, c, d) в Σ_1 можно заменить на суммирование по наборам (a, b, t) с $a^2 + b^2 \leq R$ и

$$a^2 + b^2 + (\beta + at)^2 + (\alpha + bt)^2 \leq 2R.$$

Последнее условие эквивалентно неравенству

$$(a^2 + b^2)t^2 + 2(a\beta + b\alpha)t + (a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2R) \leq 0.$$

Его решением при фиксированных a и b являются целые точки t отрезка $[t_2, t_1]$, где

$$t_{1,2} = \frac{-(a\beta + b\alpha) \pm \sqrt{(2R - a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - 1}}{a^2 + b^2}.$$

В сумме Σ_2 аналогично суммирование по наборам (a, b, c, d) заменяется на суммирование по наборам (a, b, t) , где $a^2 + b^2 \leq R$ и

$$(at + \beta)^2 + (bt + \alpha)^2 \leq R.$$

Решением последнего неравенства при фиксированных взаимно простых числах a и b являются целые числа t из отрезка $[t_4, t_3]$, где

$$t_{3,4} = \frac{-(a\beta + b\alpha) \pm \sqrt{R(a^2 + b^2) - 1}}{a^2 + b^2}.$$

Преобразуем теперь суммы Σ_1 и Σ_2 во втором случае, когда $|b| > |a| \geq 1$. При фиксированных a и b решения уравнения $ad - bc = 1$ задаются в виде $c = \beta + as$, $d = \alpha + bs$, где числа α и β определяются из условий $a\alpha \equiv 1 \pmod{b}$, $\beta = (a\alpha - 1)/b$.

Итак, во втором случае суммирование в Σ_1 ведется по наборам (a, b, s) , где a и b — взаимно простые числа такие, что $a^2 + b^2 \leq R$, а при фиксированных a и b переменная суммирования s пробегает все целые значения из отрезка $[s_2, s_1]$, где

$$s_{1,2} = \frac{-(a\beta + b\alpha) \pm \sqrt{(2R - a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - 1}}{a^2 + b^2}.$$

Аналогично, во втором случае в сумме Σ_2 суммирование ведется по наборам (a, b, s) , где a и b — взаимно простые числа такие, что $a^2 + b^2 \leq R$, а при фиксированных a и b переменная суммирования s пробегает все целые значения из отрезка $[s_4, s_3]$, где

$$s_{3,4} = \frac{-(a\beta + b\alpha) \pm \sqrt{R(a^2 + b^2) - 1}}{a^2 + b^2}.$$

Таким образом, в силу того, что переменные s и t пробегают одно и то же множество значений,

$$\Sigma_1 = 2 \sum'_{\substack{a^2+b^2 \leq R \\ |a| > |b|}} ([t_2] + [-t_1] + 1), \quad \Sigma_2 = 2 \sum'_{\substack{a^2+b^2 \leq R \\ |a| > |b|}} ([t_4] + [-t_3] + 1),$$

где знак штрих в этих суммах означает, что суммирование ведется по взаимно простым числам a и b .

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= 2 \sum'_{\substack{a^2+b^2 \leq R \\ |a| > |b|}} (t_2 - t_1 + \rho(t_2) + \rho(-t_1)), \\ \Sigma_2 &= 2 \sum'_{\substack{a^2+b^2 \leq R \\ |a| > |b|}} (t_4 - t_3 + \rho(t_4) + \rho(-t_3)), \end{aligned}$$

где $\rho(t) = 1/2 - \{t\}$, причем символ $\{t\}$ обозначает дробную часть числа t .

Следовательно,

$$N(T) = \Sigma_1 - (1/2)\Sigma_2 = S_0 + 2S_1 + 2S_2 - S_3 - S_4,$$

где

$$S_0 = \sum'_{\substack{a^2+b^2 \leq R \\ |a| > |b|}} f(a, b), \quad S_m = \sum'_{\substack{a^2+b^2 \leq R \\ |a| > |b|}} \rho((-1)^m t_m), \quad m = 1, 2, 3, 4,$$

причем

$$f(a, b) = \frac{4\sqrt{(2R - a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - 1} - 2\sqrt{R(a^2 + b^2) - 1}}{a^2 + b^2}.$$

Найдем асимптотическую формулу для суммы S_0 . Справедливы равенства

$$S_0 = \sum'_{\substack{a^2+b^2 \leq R \\ |a| > |b|}} f(a, b) = \sum_{\substack{a^2+b^2 \leq R \\ |a| > |b| \geq 1}} f(a, b) \sum_{r|(|a|, |b|)} \mu(r) = \sum_{r \leq R^{1/2}} \mu(r) W,$$

где

$$W = W(r) = \sum_{\substack{a^2+b^2 \leq Rr^{-2} \\ |a| > |b| \geq 1}} f(ar, br) = 4 \sum_{\substack{a^2+b^2 \leq Rr^{-2} \\ a > b \geq 1}} f(ar, br).$$

Преобразуем двойную сумму W к повторной сумме. Получим, что

$$W = 4 \sum_{1/2 < a \leq R^{1/2} r^{-1}} V, \quad V = V(a) = \sum_{1/2 < b \leq (Rr^{-2} - a^2)^{1/2}} f(ar, br).$$

К внутренней сумме V применим формулу Эйлера суммирования значений функции по переменной b (см., например, теорему 4 на с. 206 в [3]). Для V справедливо представление

$$V = V_1 + V_2 - V_3,$$

где

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_{1/2}^{(Rr^{-2}-a^2)^{1/2}} f(ar, yr) dy, \\ V_2 &= \rho((Rr^{-2}-a^2)^{1/2}) f(ar, (R-a^2r^2)^{1/2}), \\ V_3 &= - \int_{1/2}^{(Rr^{-2}-a^2)^{1/2}} \rho(y) f'_y(ar, yr) dy. \end{aligned}$$

Просуммируем $V_1 = V_1(a)$ по промежутку, определяющему внешнее суммирование по переменной a в сумме W , а затем к получившейся сумме применим формулу суммирования Эйлера. Получим, что

$$\begin{aligned} W_1 &= 4 \sum_{1/2 < a \leq R^{1/2}r^{-1}} V_1(a) = 4 \sum_{1/2 < a \leq R^{1/2}r^{-1}} \int_{1/2}^{(Rr^{-2}-a^2)^{1/2}} f(ar, yr) dy \\ &= 4 \int_{1/2}^{R^{1/2}r^{-1}} \left(\sum_{1/2 < a \leq (Rr^{-2}-y^2)^{1/2}} f(ar, yr) \right) dy \\ &= W_{11} + W_{12} + W_{13}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} W_{11} &= 4 \int_{1/2}^{R^{1/2}r^{-1}} dy \int_{1/2}^{(Rr^{-2}-y^2)^{1/2}} f(xr, yr) dx, \\ W_{12} &= 4 \int_{1/2}^{R^{1/2}r^{-1}} \rho((Rr^{-2}-y^2)^{1/2}) f((R-y^2r^2)^{1/2}, yr) dy, \\ W_{13} &= -4 \int_{1/2}^{R^{1/2}r^{-1}} dy \int_{1/2}^{(Rr^{-2}-y^2)^{1/2}} \rho(x) f'_x(xr, yr) dx. \end{aligned}$$

Вычисляя сначала интеграл W_{11} , находим, что

$$\begin{aligned} W_{11} &= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{1/2}^{\sqrt{R}r^{-1}} \frac{4\sqrt{(2R-\rho^2r^2)\rho^2r^2-1}-2\sqrt{R\rho^2r^2-1}}{\rho r^2} d\rho + O(\sqrt{R}r^{-2}) \\ &= \frac{2\pi R}{r^2} \int_{r/(2\sqrt{R})}^1 \frac{4\sqrt{(2-\rho^2)\rho^2-1/R^2}-2\sqrt{\rho^2-1/R^2}}{\rho} d\rho + O(\sqrt{R}r^{-2}) \\ &= \frac{2\pi R}{r^2} \int_0^1 (4\sqrt{2-\rho^2}-2) d\rho + O(\sqrt{R}r^{-2}) \\ &= \frac{2\pi R}{r^2} \left(4 \arcsin \frac{\rho}{2} + 4 \frac{\rho\sqrt{2-\rho^2}}{2} - 2\rho \right) \Big|_0^1 + O(\sqrt{R}r^{-2}) \\ &= \frac{4\pi^2 R}{3r^2} + O(\sqrt{R}r^{-2}). \end{aligned}$$

Оценим сверху интеграл W_{12} . Поскольку $f((R-y^2r^2)^{1/2}, yr) \ll 1$, справедлива оценка

$$W_{12} = 4 \int_{1/2}^{R^{1/2}r^{-1}} \rho((Rr^{-2}-y^2)^{1/2}) f((R-y^2r^2)^{1/2}, yr) dy \ll \sqrt{R}r^{-1}.$$

Наконец, оценим интеграл W_{13} . При $x^2 + y^2 \leq Rr^{-2}$ справедливо неравенство $f'_x(xr, yr) \leq 0$, поэтому

$$\begin{aligned} |W_{13}| &= 4 \left| \int_{1/2}^{R^{1/2}r^{-1}} dy \int_{1/2}^{(Rr^{-2}-y^2)^{1/2}} \rho(x) f'_x(xr, yr) dx \right| \\ &\leq 4 \int_{1/2}^{R^{1/2}r^{-1}} dy \int_{1/2}^{(Rr^{-2}-y^2)^{1/2}} |f'_x(xr, yr)| dx \\ &= 4 \int_{1/2}^{R^{1/2}r^{-1}} dy \int_{1/2}^{(Rr^{-2}-y^2)^{1/2}} (-f'_x(xr, yr)) dx \\ &\leq 4 \int_{1/2}^{R^{1/2}r^{-1}} f(r/2, yr) dy \ll \sqrt{R}r^{-1} \int_{1/2}^{R^{1/2}r^{-1}} \frac{dy}{y} \ll \sqrt{R}r^{-1} \ln R. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$W_1 = \frac{4\pi^2 R}{3r^2} + O(\sqrt{R}r^{-1} \ln R).$$

Оценим сумму W_2 . Поскольку $f(ar, (R - a^2r^2)^{1/2}) \ll 1$, справедлива оценка

$$W_2 = 4 \sum_{1/2 < a \leq R^{1/2}r^{-1}} \rho((Rr^{-2} - a^2)^{1/2}) f(ar, (R - a^2r^2)^{1/2}) \ll \sqrt{R}r^{-1}.$$

Далее оценим W_3 . При $a^2 + y^2 \leq Rr^{-2}$ справедливо неравенство $f'_y(ar, yr) \leq 0$, поэтому

$$\begin{aligned} |W_3| &= 4 \left| \sum_{1/2 \leq a \leq R^{1/2}r^{-1}} \int_{1/2}^{(Rr^{-2}-a^2)^{1/2}} \rho(y) f'_y(ar, yr) dy \right| \\ &\leq 4 \sum_{1/2 \leq a \leq R^{1/2}r^{-1}} \int_{1/2}^{(Rr^{-2}-a^2)^{1/2}} |f'_y(ar, yr)| dy \\ &= 4 \sum_{1/2 \leq a \leq R^{1/2}r^{-1}} \int_{1/2}^{(Rr^{-2}-a^2)^{1/2}} (-f'_y(ar, yr)) dy \\ &\leq 4 \sum_{1/2 \leq a \leq R^{1/2}r^{-1}} f(ar, r/2) \ll \sqrt{R}r^{-1} \sum_{1/2 \leq a \leq R^{1/2}r^{-1}} \frac{1}{a} \ll \sqrt{R}r^{-1} \ln R. \end{aligned}$$

Наконец, собирая вместе все найденные результаты, получаем асимптотическую формулу

$$S_0 = \frac{4\pi^2 R}{3r^2} + O(\sqrt{R}r^{-1} \ln R).$$

Осталось оценить сверху модули сумм S_1, S_2, S_3, S_4 . С этой целью воспользуемся разложением в ряд Фурье функции $\rho(t)$ с остатком, а затем разложением остатка в ряд Фурье (см., например, теорему 1 на с. 440 и лемму 1 на с. 601 в [3]). При некотором $N \geq 2$

$$\rho(t) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin 2\pi nt}{\pi n} + O(\psi_N(t)),$$

где

$$\psi_N(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{2\pi i m t}, \quad |c_m| \leq \frac{4 + \ln N}{N} e^{-|m|/N}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_m = \sum'_{\substack{a^2+b^2 \leq R \\ |a| > |b|}} \rho(t_m) &\ll \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \left| \sum'_{\substack{a^2+b^2 \leq R \\ |a| > |b|}} e^{2\pi i n t_m} \right| \\ &+ \frac{\ln N}{N} \sum_{n=1}^N \sum'_{\substack{a^2+b^2 \leq R \\ |a| > |b|}} 1 + \frac{\ln N}{N} \sum_{k=1}^{[N \ln N]} \left| \sum'_{\substack{a^2+b^2 \leq R \\ |a| > |b|}} e^{2\pi i k t_m} \right| + \frac{R \ln N}{N}. \end{aligned}$$

Положим $N = [R^{1/4}]$. Далее при $1 \leq n \leq [N \ln N]$ достаточно оценить модуль суммы

$$U_n = \sum'_{\substack{a^2+b^2 \leq R \\ a > b \geq 1}} e^{2\pi i n t_m}.$$

Рассмотрим сначала

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= \frac{-(a\beta + b\alpha) \pm \sqrt{(2R - a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - 1}}{a^2 + b^2} \\ &= -\frac{\beta}{a} - \frac{b}{a(a^2 + b^2)} \pm \frac{\sqrt{(2R - a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - 1}}{a^2 + b^2} \\ &= -\frac{\beta}{a} + g(a, b), \quad -\beta b \equiv 1 \pmod{a}. \end{aligned}$$

Преобразуем сумму U_n . Положим $b\bar{b} \equiv 1 \pmod{a}$. Воспользуемся разложением в ряд Фурье функции

$$K(b) = K_n(b, a) = \begin{cases} e^{-2\pi i n \bar{b}/a}, & \text{если } (b, a) = 1, \\ 0, & \text{если } (b, a) > 1. \end{cases}$$

В разложении

$$K(b) = \sum_{k=1}^a f_k e^{2\pi i n b k/a}$$

коэффициенты Фурье f_s равны

$$f_s = \frac{1}{a} \sum_{m=1}^a K(m) e^{-2\pi i m s/a} = \frac{1}{a} \sum_{m=1, (m,a)=1}^a e^{-2\pi i (n\bar{m} + sm)/a}, \quad s = 1, 2, \dots, a.$$

Эти коэффициенты Фурье представляют собой суммы Кластермана по модулю a . Из оценок А. Вейля и Салье (см., например, [18], с. 44) следует, что

$$|f_s| \leq \tau(a) a^{-1/2} (n, a)^{1/2},$$

где функция $\tau(a)$ обозначает количество делителей числа a .

Далее,

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{a^2+b^2 \leq R} e^{2\pi i n g(a,b)} K_n(b, a) \\ &= \sum_{a^2+b^2 \leq R} e^{2\pi i n g(a,b)} \sum_{k=1}^a f_k e^{2\pi i b k/a} \\ &= \sum_{2 \leq a \leq \sqrt{R}} \sum_{k=1}^a f_k \sum_{b \leq \min(a, \sqrt{R-a^2})} e^{2\pi i (b k/a + n g(a,b))}. \end{aligned}$$

Следовательно, справедлива оценка

$$U_n \ll \sum_{2 \leq a \leq \sqrt{R}} \sum_{k=1}^a \tau(a) (n, a)^{1/2} a^{-1/2} |V_n|,$$

где

$$V_n = V_n(a) = \sum_{1 \leq b \leq \min(a, \sqrt{R-a^2})} e^{-2\pi i (k b/a + n g(a,b))}.$$

Слагаемые, отвечающие значениям $a \leq R^{0,3}$, при тривиальной оценке суммы $V_n = V_n(a)$ вносят в общую оценку модуля суммы S_m , $m = 1, 2, 3, 4$, вклад, не превосходящий величины порядка $R^{3/4} \ln R$.

При выполнении неравенства $|k + n(ag(a, b))'_a| \geq 1$ сумму V_n оцениваем по первой производной, при выполнении противоположного неравенства $|k + n(ag(a, b))'_a| < 1$ сумму V_n оцениваем по второй производной функции, стоящей в экспоненте. Это дает нам для всех оставшихся значений a оценку S_m , $m = 1, 2, 3, 4$, вида

$$S_m \leq R^{3/4} \ln R.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Архипов Г. И., Чубариков В. Н., О числе точек решетки в трехмерном пространстве Лобачевского. *Вестник Московского ун-та. Сер. 1, Математика. Механика* (1994) **2**, 24–27.
2. Архипов Г. И., Чубариков В. Н., Оценка снизу первого собственного значения оператора Бельтрами–Лапласа в трехмерном пространстве. *Труды семинара им. И. Г. Петровского* (2002) **22**, 22–36.
3. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., *Лекции по математическому анализу*. Дрофа, Москва, 2004.
4. Виноградов И. М., *Элементы высшей математики*. Высшая школа, Москва, 1999.
5. Виноградов И. М., *Особые варианты метода тригонометрических сумм*. Наука, Москва, 1976.
6. Груневальд Ф., Меннике Й., Эльстродт Ю., *Группы, действующие на гиперболическом пространстве*. МЦНМО, Москва, 2003.
7. Delsarte J., Sur le gitter fuchsien. *C. R. Acad. Sci. Paris* (1942) **214**, 147–149.

8. Delsarte J., Le gitter fuchsien. In: *Oeuvres de Jean Delsarte II*. Paris, 1971, pp. 829–845.
9. Graham S. W., Kolesnik G., *Van der Corput's method of exponential sums*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
10. Huber H., Über eine neue Klasse automorphe Funktionen und eine Gitterpunktproblem in der hyperbolischen Ebene. *Comment. Math. Helv.* (1956) **30**, 20–62.
11. Huber H., Zur analytischen Theorie hyperbolischen Raumformen und Bewegungsgruppen. I. *Math. Ann.* (1959) **138**, 1–26.
12. Huber H., Zur analytischen Theorie hyperbolischen Raumformen und Bewegungsgruppen. II. *Math. Ann.* (1961) **142**, 385–398.
13. Huber H., Zur analytischen Theorie hyperbolischen Raumformen und Bewegungsgruppen. II. *Math. Ann.* (1961) **143**, 463–464.
14. Huxley N. M., *Area, lattice points, and exponential sums*. Oxford Univ. Press, Oxford, 1996.
15. Lax P. D., Phillips R. S., The asymptotic distribution of lattice points in Euclidean and non-Euclidean spaces. *J. Funct. Anal.* (1982) **46**, №3, 280–350.
16. Левитан Б. М., Асимптотические формулы для числа точек решетки в пространствах Евклида и Лобачевского. *Успехи матем. наук* (1987) **42**, №3(255), 13–38.
17. Суги М., Целые точки в областях на плоскости Лобачевского. *Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова РАН* (1994) **207**, 299–325.
18. Хооли К., *Применения методов решета в теории чисел*. Наука, Москва, 1987.

Статья поступила 22.11.2005.