Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, О строении эквивационально замкнутых классов, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 4, 18–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm70>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:24:42

О строении эквационально замкнутых классов

© 2006 г. С. С. Марченков

Исследуется строение эквационально замкнутых классов. Доказывается теорема о представлении графика функции из эквационально замкнутого класса в виде объединения множеств значений специальных вектор-функций. При любом $k \geq 2$ устанавливается эквациональная порождаемость любого эквационально замкнутого класса из P_k множеством всех его k -местных функций. Находятся все эквационально предполные классы в P_k и доказывается критерий эквациональной полноты. Часть результатов переносится с эквационально замкнутых классов на позитивно замкнутые классы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 06-01-00438.

1. Введение

В ряде работ [1–9, 12–21] на множестве функций многозначной логики определены операторы замыкания, которые являются существенно более сильными, чем традиционно рассматриваемый оператор суперпозиции. В частности, эти операторы при любом $k \geq 2$ порождают на множестве P_k функций k -значной логики конечные (реже счетные) классификации. Набор средств, используемых при определении операторов замыкания, весьма разнообразен: применение чисто функциональных приемов, обращение к логико-функциональным языкам различных типов, использование идей из программирования и т. д.

В [11] автор предложил новый оператор замыкания — оператор эквационального замыкания, который базируется на широко представленной в математике идее вывода в исчислениях равенств. В [11] получены первые результаты, относящиеся к этому оператору. Они показали, что оператор эквационального замыкания значительно отличается от всех известных операторов замыкания, и это отличие проявляется уже на множестве булевых функций.

В настоящей статье мы продолжаем изучение оператора эквационального замыкания и порождаемых этим оператором классификаций на множествах функций многозначной логики. В теореме 1 устанавливается представление графиков функций из эквационально замкнутых классов, которое затем используется при получении ряда следствий. Теорема 2 показывает, что при любом $k \geq 2$ любой эквационально замкнутый класс функций из P_k эквационально порождается множеством всех своих функций, зависящих от k переменных. В качестве следствия получаем, что классификация множества функций k -значной логики, порождаемая оператором эквационального замыкания, конечна. В теореме 4 установлен критерий эквациональной полноты в P_k . Многие результаты, справедливые для

оператора эквационального замыкания, оказались справедливыми и для оператора позитивного замыкания [6]. Соответствующая связь между этими операторами получена в следствии 3 из теоремы 1.

2. Основные понятия

Пусть $k \geq 2$, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, P_k — множество всех функций на E_k (множество функций k -значной логики), $P_k^{(n)}$ — множество всех n -местных функций из P_k .

Для любого $n \geq 1$ и любого i , $1 \leq i \leq n$, обозначим через $e_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ селекторную функцию, равную x_i .

Наряду с всюду определенными функциями k -значной логики будем рассматривать также частичные функции на E_k . Совокупность всех частичных функций на E_k обозначим через P_k^* . Считаем, что $P_k \subset P_k^*$. Если $g \in P_k^*$, то через $\text{Dom } g$ обозначаем область определения функции g .

На множестве P_k считаем заданным оператор (операцию) суперпозиции (см. [10, 22]). Если $Q \subseteq P_k$, то через $[Q]$ обозначаем замыкание множества Q относительно оператора суперпозиции. Для оператора суперпозиции предполагаем известными понятия замкнутого, полного и предполного множества (класса).

Перейдем к определению оператора эквационального замыкания [11]. Предполагаем, что каждая функция из P_k имеет индивидуальное обозначение. Для обозначения функций из P_k используем символ f с индексами (функциональные константы). Символы $\varphi^{(n)}$, $\psi^{(n)}$ (возможно, с индексами) будут использоваться в качестве функциональных переменных с областью значений $P_k^{(n)}$.

Пусть $Q \subseteq P_k$. Обычным образом вводим понятие термина над Q . Пусть $f^{(n)}$ — функциональная константа (обозначающая функцию из Q), $\varphi^{(n)}$ — функциональная переменная, а $t_1, \dots, t_n$ — индивидные переменные (не обязательно различные). Тогда выражения

$$f^{(n)}(t_1, \dots, t_n), \quad \varphi^{(n)}(t_1, \dots, t_n) \quad (1)$$

суть термины над Q . Если, далее, $t_1, \dots, t_n$ — термины над Q либо символы индивидных переменных, то выражения (1) также суть термины над Q .

Если t_1, t_2 — термины над Q , то выражение $t_1 = t_2$ называем равенством над Q . Равенства $t_1 = t_2$ и $t_2 = t_1$ в дальнейшем не различаем. Частным случаем равенства $t_1 = t_2$ называем любое равенство вида $t'_1 = t'_2$, где выражения t'_1, t'_2 получаются из термов t_1, t_2 подстановкой вместо всех индивидных переменных некоторых значений из E_k . При этом все вхождения одной и той же индивидной переменной в термы t_1, t_2 замещаются одним и тем же значением из E_k .

Пусть Ξ — конечная система равенств над Q . Последовательность $F_1, \dots, F_s$ равенств, не содержащих индивидных переменных, называем выводом из системы равенств Ξ , если каждое равенство F_i этой последовательности удовлетворяет одному из следующих условий:

- (1) F_i есть частный случай одного из равенств системы Ξ ;
- (2) для некоторого $j < i$ равенство F_i получается из равенства F_j заменой выражения вида $f^{(n)}(a_1, \dots, a_n)$ значением a , где $a = f^{(n)}(a_1, \dots, a_n)$;
- (3) для некоторых $j, l < i$, равенство F_i получается из равенства F_j заменой выражения вида $\varphi^{(n)}(a_1, \dots, a_n)$ значением a , при этом равенство F_l имеет вид $a = \varphi^{(n)}(a_1, \dots, a_n)$.

Равенство F , не содержащее индивидуальных переменных, называем выводимым из системы равенств Ξ , если существует вывод из системы равенств Ξ , который содержит равенство F . Систему равенств Ξ называем корректной, если из нее невозможно вывести два равенства вида

$$a = \varphi^{(n)}(a_1, \dots, a_n), \quad b = \varphi^{(n)}(a_1, \dots, a_n),$$

где $a \neq b$.

Пусть $Q \subseteq P_k$, Ξ — корректная система равенств над Q , $\varphi^{(n)}$ — функциональная переменная, входящая в Ξ . Говорим, что функция $g(x_1, \dots, x_n)$ из P_k определяется системой равенств Ξ над Q , если для любых $a_1, \dots, a_n \in E_k$ из системы Ξ выводимо равенство $a = \varphi^{(n)}(a_1, \dots, a_n)$, где $a = g(a_1, \dots, a_n)$. Множество всех функций, определяемых системой равенств Ξ , обозначим через $\Xi(Q)$. Положим

$$\text{Eq}[Q] = \bigcup \Xi(Q),$$

где объединение берется по всем корректным системам равенств Ξ над Q . Множество $\text{Eq}[Q]$ называем эквациональным замыканием (или Eq -замыканием) множества Q . Если $Q = \text{Eq}[Q]$, то множество Q называется эквационально замкнутым.

В дальнейшем нам потребуются рассматривать частичные функции $g(x_1, \dots, x_n)$, определяемые системой равенств Ξ . Все приведенные определения при этом сохраняют силу, однако равенство вида $a = \varphi^{(n)}(a_1, \dots, a_n)$ (для функции g) выводимо из Ξ , rozumeeтся, только при условии $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Dom } g$. Обозначение $\text{Eq}[Q]^*$ используем для множества всех частичных функций, определяемых корректными системами равенств над Q .

Перейдем к определению оператора позитивного замыкания [6]. В качестве исходных символов языка Pos позитивной выразимости рассматриваем индивидуальные переменные, функциональные константы $f_i^{(n)}$ для обозначения всех функций из $P_k^{(n)}$, знак равенства $=$, логические связки $\&$, $\vee$ и квантор существования $\exists$. В понятие термина в языке Pos входят также индивидуальные переменные. Из равенств термов — элементарных формул языка Pos — образуются остальные формулы языка Pos : если Φ_1, Φ_2 — формулы языка Pos , а x_i — индивидуальная переменная, то

$$\Phi_1 \& \Phi_2, \quad \Phi_1 \vee \Phi_2, \quad (\exists x_i) \Phi_1$$

— также формулы языка Pos .

Всякая формула языка Pos с m свободными переменными определяет некоторое m -местное отношение на E_k . Если $Q \subseteq P_k$, $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ — формула языка Pos с m свободными переменными, все функциональные константы которой суть обозначения функций из Q , и $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ определяет отношение $\rho(x_1, \dots, x_m)$ на E_k , то говорим, что формула Φ позитивно выражает отношение ρ через функции множества Q . Отношение ρ называем позитивно выразимым через функции множества Q , если существует формула, которая позитивно выражает отношение ρ через функции множества Q .

Пусть $g(x_1, \dots, x_n)$ — функция из P_k , а формула $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$ позитивно выражает отношение $g(x_1, \dots, x_n) = y$ через функции множества Q . В этом случае говорим, что формула Φ позитивно выражает функцию g через функции множества Q . Совокупность всех функций, позитивно выразимых через функции множества Q , обозначим через $\text{Pos}[Q]$. Множества вида $\text{Pos}[Q]$ называем позитивно замкнутыми классами.

Пусть

$$H = \{h_1(x_1, \dots, x_m), \dots, h_l(x_1, \dots, x_m)\}$$

— некоторое множество m -местных функций из P_k и $g(x_1, \dots, x_n) \in P_k$. Говорят, что функция g сохраняет множество H , если для любых чисел $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, l\}$ функция $g(h_{i_1}(x_1, \dots, x_m), \dots, h_{i_n}(x_1, \dots, x_m))$ принадлежит множеству H . Совокупность всех функций, сохраняющих множество H , обозначим через $\text{Pol}(H)$. Нетрудно видеть, что множеству $\text{Pol}(H)$ принадлежат все селекторные функции e_i^n .

Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ — набор из E_k^n . Обозначим через $\ker(a)$ следующее отношение эквивалентности на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$:

$$\{(i, j): 1 \leq i, j \leq n, a_i = a_j\}.$$

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$. Обозначим через f^a функцию, которая получается из функции f следующим отождествлением переменных. Берем в каждом классе эквивалентности отношения $\ker(a)$ наименьший элемент и обозначаем их в порядке возрастания $i_1, i_2, \dots, i_l$, $i_1 = 1$. Функция $f^a(x_{i_1}, \dots, x_{i_l})$ получается теперь из функции $f(x_1, \dots, x_n)$ заменой каждой переменной x_m переменной x_{i_j} , где $(m, i_j) \in \ker(a)$.

Легко видеть, что имеет место равенство

$$f(a_1, \dots, a_n) = f^a(a_{i_1}, \dots, a_{i_l}). \quad (2)$$

3. Представление функций из эквивационально замкнутых классов

Теорема 1. Пусть $Q \subseteq P_k$ и $g(x_1, \dots, x_n) \in P_k^*$. Функция g принадлежит множеству $\text{Eq}[Q]^*$ тогда и только тогда, когда график функции g представим в виде объединения множеств

$$\{(h_1(x_1, \dots, x_k), \dots, h_n(x_1, \dots, x_k), h(x_1, \dots, x_k)): x_1, \dots, x_k \in E_k\}, \quad (3)$$

где $h_1(x_1, \dots, x_k), \dots, h_n(x_1, \dots, x_k)$ либо принадлежат множеству $[Q]$, либо являются селекторными функциями $e_1^k(x_1, \dots, x_k), \dots, e_k^k(x_1, \dots, x_k)$, а функция $h(x_1, \dots, x_k)$ входит в множество $[Q]$. При этом множества (3) подчиняются очевидному условию согласования: если в график функции g входят значения вектор-функции

$$(j_1(x_1, \dots, x_k), \dots, j_n(x_1, \dots, x_k), j(x_1, \dots, x_k))$$

(набор $(j_1, \dots, j_n, j)$ может совпадать с набором $(h_1, \dots, h_n, h)$) и для некоторых наборов $(b_1, \dots, b_k), (c_1, \dots, c_k)$ из E_k^k выполняется равенство

$$(h_1(b_1, \dots, b_k), \dots, h_n(b_1, \dots, b_k)) = (j_1(c_1, \dots, c_k), \dots, j_n(c_1, \dots, c_k)),$$

то справедливо равенство

$$h(b_1, \dots, b_k) = j(c_1, \dots, c_k).$$

Доказательство. Достаточность условий теоремы почти очевидна. В самом деле, считая для упрощения изложения функции $h_1, \dots, h_n, h$ принадлежащими множеству Q , запишем условие вхождения вектор-функции $(h_1(x_1, \dots, x_k), \dots, h_n(x_1, \dots, x_k), h(x_1, \dots, x_k))$ в график функции g в форме равенства

$$\varphi(h_1(x_1, \dots, x_k), \dots, h_n(x_1, \dots, x_k)) = h(x_1, \dots, x_k) \quad (4)$$

(здесь функциональная переменная φ отвечает функции g). Совокупность всех равенств вида (4) образует корректную (см. условие согласования в формулировке теоремы) систему равенств, эквационально определяющую функцию g .

Установим теперь необходимость условий теоремы. Пусть Ξ — корректная система равенств над Q , которая эквационально определяет функцию g через функции множества Q . Пусть далее φ — n -местная функциональная переменная, входящая в равенства Ξ , и для любого набора $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Dom } g$ из системы равенств Ξ выводимо равенство

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = a, \quad (5)$$

где

$$a = g(a_1, \dots, a_n).$$

Зафиксируем такой набор $(a_1, \dots, a_n)$ из $\text{Dom } g$ и рассмотрим минимальный по длине вывод $F_1, \dots, F_s$ равенства (5) из системы равенств Ξ .

Предположим сначала, что при выводе равенства (5) применяются только пункты 1 и 2 определения вывода. Равенство F_1 может быть лишь частным случаем одного из равенств системы Ξ . Поскольку в выводе $F_1, \dots, F_s$ пункт 3 определения вывода не применяется, упомянутое равенство (системы Ξ) имеет вид

$$\varphi(t_1(x_1^1, \dots, x_{m_1}^1), \dots, t_n(x_1^n, \dots, x_{m_n}^n)) = t(x_1^{n+1}, \dots, x_{m_{n+1}}^{n+1}), \quad (6)$$

где $t_1, \dots, t_n$ — термы над Q либо символы переменных, а t — терм над Q . Равенство F_1 получается из равенства (6) подстановкой вместо всех переменных некоторых значений из E_k :

$$\varphi(t_1(b_1^1, \dots, b_{m_1}^1), \dots, t_n(b_1^n, \dots, b_{m_n}^n)) = t(b_1^{n+1}, \dots, b_{m_{n+1}}^{n+1}). \quad (7)$$

Ввиду минимальности вывода $F_1, \dots, F_s$ оставшаяся часть вывода $F_1, \dots, F_s$ состоит в последовательной замене выражений вида $f(b_1, \dots, b_m)$ значениями b , где f есть обозначение функции из Q , встречающееся в термах $t_1, \dots, t_n, t$, и $b = f(b_1, \dots, b_m)$.

Понятно, что структура вывода $F_1, \dots, F_s$ (то есть выбор тех или иных подформул равенства (7), к которым применяется пункт 2 определения вывода) не зависит от набора

$$(b_1^1, \dots, b_{m_1}^1, \dots, b_1^n, \dots, b_{m_n}^n, b_1^{n+1}, \dots, b_{m_{n+1}}^{n+1}) \quad (8)$$

— точно такой же вывод можно получить, если переменным

$$x_1^1, \dots, x_{m_1}^1, \dots, x_1^n, \dots, x_{m_n}^n, x_1^{n+1}, \dots, x_{m_{n+1}}^{n+1} \quad (9)$$

придать другие значения

$$c_1^1, \dots, c_{m_1}^1, \dots, c_1^n, \dots, c_{m_n}^n, c_1^{n+1}, \dots, c_{m_{n+1}}^{n+1} \quad (10)$$

(разумеется, в наборах (8), (10) при этом должно быть соблюдено необходимое условие: одинаковые переменные замещаются одинаковыми значениями из E_k). В результате будет получен вывод, вообще говоря, другого равенства $\varphi(c_1, \dots, c_n) = c$. В целом все такие наборы $(c_1, \dots, c_n, c)$ будут, очевидно, являться значением вектор-функции

$$(h_1(x_1^1, \dots, x_{m_1}^1), \dots, h_n(x_1^n, \dots, x_{m_n}^n), h(x_1^{n+1}, \dots, x_{m_{n+1}}^{n+1})), \quad (11)$$

где $h_1, \dots, h_n, h$ — либо функции, реализуемые выражениями $t_1, \dots, t_n, t$, либо селекторные функции (для случая, когда какое-либо из выражений $t_1, \dots, t_n$ является символом переменной).

Чтобы сократить в вектор-функции (11) количество переменных, следует для всякого набора (8) произвести в равенстве (6) отождествление переменных в соответствии с отношением эквивалентности $\ker$, определяемым набором (8). Можно считать, что при этом будут использованы переменные $x_1, \dots, x_k$. Полученное после этого отождествления переменных равенство, вообще говоря, не является равенством системы Ξ . Тем не менее равенство (7) будет получаться из него некоторой подстановкой элементов из E_k вместо переменных $x_1, \dots, x_k$. Будет также сохранен и весь вывод $F_1, \dots, F_s$ равенства (5). В результате мы придем к представлению (3) графика функции g . Что касается утверждения теоремы о согласовании вектор-функций из (3), то оно непосредственно следует из корректности системы равенств Ξ .

Предположим теперь, что при выводе равенства (5) используется также пункт 3 определения вывода. В соответствии с определением вывода найдем в последовательности $F_1, \dots, F_s$ равенство F_i вида (7), которое является частным случаем равенства (6) из системы равенств Ξ . Термы $t_1, \dots, t_n, t$ в равенстве (6) уже могут содержать функциональные переменные ψ . Переставляя, быть может, равенство (7) в выводе $F_1, \dots, F_s$ и пользуясь минимальностью числа s , будем предполагать, что все равенства $F_{i+1}, \dots, F_s$ получаются из предыдущих равенств вывода $F_1, \dots, F_s$ с помощью пунктов 2, 3 определения вывода.

В соответствии с индуктивным определением терма в термах $t_1, \dots, t_n, t$ можно выделить “последние” вхождения функциональных переменных (если процесс построения терма изобразить в виде дерева с корнем, то эти вхождения функциональных переменных будут располагаться в дереве наиболее близко к корню). Пусть в этих вхождениях участвуют переменные $\psi_1, \dots, \psi_l$ (среди переменных $\psi_1, \dots, \psi_l$ допускаются повторения). При выводе равенства (5) данные вхождения функциональных переменных порождают в выводе $F_1, \dots, F_s$ равенства вида

$$\psi_1(c_1^1, \dots, c_{r_1}^1) = c^1, \quad \dots, \quad \psi_l(c_1^l, \dots, c_{r_l}^l) = c^l, \quad (12)$$

с помощью которых вхождения переменных $\psi_1, \dots, \psi_l$ из равенства (7) элиминируются (здесь еще раз используется минимальность числа s). К равенствам (12) можно применить индуктивные соображения и получить указанные в формулировке теоремы представления графиков функций $g_1, \dots, g_l$, отвечающих переменным $\psi_1, \dots, \psi_l$.

Если в выводе $F_1, \dots, F_s$ формулы $\psi_1(c_1^1, \dots, c_{r_1}^1), \dots, \psi_l(c_1^l, \dots, c_{r_l}^l)$ заменить константами $c^1, \dots, c^l$ (см. равенства (12)), то согласно выбору вхождений переменных $\psi_1, \dots, \psi_l$ в термы $t_1, \dots, t_n, t$ дальнейшее получение величин

$$t_1(b_1^1, \dots, b_{m_1}^1), \dots, t_n(b_1^n, \dots, b_{m_n}^n), t(b_1^{n+1}, \dots, b_{m_{n+1}}^{n+1}) \quad (13)$$

из величин

$$b_1^1, \dots, b_{m_1}^1, \dots, b_1^n, \dots, b_{m_n}^n, b_1^{n+1}, \dots, b_{m_{n+1}}^{n+1}, c^1, \dots, c^l \quad (14)$$

будет происходить путем применения к величинам (14) подходящих функций $h_1, \dots, h_n, h$ из множества $[Q]$ либо селекторных функций (см. первую половину доказательства теоремы). Используя это соображение, обратимся теперь к графику функции g .

Пусть в соответствии с условиями теоремы для каждой функции g_i , $1 \leq i \leq l$, выбраны такие функции

$$p_1^i(x_1, \dots, x_k), \dots, p_{r_i}^i(x_1, \dots, x_k), p^i(x_1, \dots, x_k), \quad (15)$$

что вектор-функция (15) принимает значение $(c_1^i, \dots, c_{r_i}^i, c^i)$. Если необходимо, то путем перестановки переменных и введения фиктивных переменных можно добиться того, что при всех i вектор-функции (15) принимают значения $(c_1^i, \dots, c_{r_i}^i, c^i)$ на одном и том же наборе $(0, 1, \dots, k-1)$. Тогда в наборе (14) величины $c^1, \dots, c^l$ можно заменить выражениями $p^1(0, 1, \dots, k-1), \dots, p^l(0, 1, \dots, k-1)$. Следовательно, величины (13) получаются из $b_1^1, \dots, b_{m_1}^1, \dots, b_1^n, \dots, b_{m_n}^n, b_1^{n+1}, \dots, b_{m_{n+1}}^{n+1}, p^1(0, 1, \dots, k-1), \dots, p^l(0, 1, \dots, k-1)$ (выражение $p^i(0, 1, \dots, k-1)$ можно считать обозначением для c^i) применением к ним функций $h_1, \dots, h_n, h$. Вновь, как в первой половине доказательства теоремы, производим отождествление переменных $x_1^1, \dots, x_{m_1}^1, \dots, x_1^n, \dots, x_{m_n}^n, x_1^{n+1}, \dots, x_{m_{n+1}}^{n+1}, x_1, \dots, x_k$ в соответствии с отношением эквивалентности кег, задаваемым набором $b_1^1, \dots, b_{m_1}^1, \dots, b_1^n, \dots, b_{m_n}^n, b_1^{n+1}, \dots, b_{m_{n+1}}^{n+1}, 0, 1, \dots, k-1$. В результате приходим к функциям

$$h'_1(x_1, \dots, x_k), \dots, h'_n(x_1, \dots, x_k), h'(x_1, \dots, x_k) \quad (16)$$

из множества $[Q]$ либо селекторным функциям, которые переводят $(0, 1, \dots, k-1)$ в набор (13). Из построения функций $h'_1, \dots, h'_n, h'$ следует также, что вектор-функция (16) будет задавать элементы графика функции g при любых значениях переменных $x_1, \dots, x_k$. Наконец, требования теоремы о согласованности наборов значений функций (16) будут выполняться в силу корректности системы равенств Ξ . Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $Q \subseteq P_k$ и $g(x_1, \dots, x_n) \in \text{Eq}[Q]^*$. Тогда функцию g можно эквивалентно определить системой равенств над Q , которая состоит из равенств вида

$$\varphi(t_1(x_1, \dots, x_k), \dots, t_n(x_1, \dots, x_k)) = t(x_1, \dots, x_k),$$

где φ — функциональная переменная, $t_1, \dots, t_n$ — термы над Q либо символы переменных, а t — терм над Q .

Следствие 2. Пусть $Q \subseteq P_k$, $g(x_1, \dots, x_n) \in \text{Eq}[Q]^*$, и в множество $\text{Eq}[Q]$ входят такие функции $f_1(x), \dots, f_{k-1}(x)$, что для некоторого $a \in E_k$ выполняется равенство

$$\{a, f_1(a), \dots, f_{k-1}(a)\} = E_k. \quad (17)$$

Тогда график функции g представим в виде объединения множеств

$$\{(j_1(x), \dots, j_n(x), j(x)) : x \in E_k\}, \quad (18)$$

где функции $j_1, \dots, j_n$ принадлежат множеству $\text{Eq}[Q]$ либо совпадают с селекторной функцией e_1^1 , а $j \in \text{Eq}[Q]$.

Доказательство. Используем представление (3) графика функции g . Зафиксируем вектор-функцию $(h_1, \dots, h_n, h)$ из представления (3) и рассмотрим произвольный набор $(a_1, \dots, a_k)$ из E_k . В соответствии с равенством (17) выберем в множестве $\{x, f_1(x), \dots, f_{k-1}(x)\}$ функции $j'_1(x), \dots, j'_k(x)$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$(j'_1(a), \dots, j'_k(a)) = (a_1, \dots, a_k). \quad (19)$$

Положим

$$\begin{aligned} j_1(x) &= h_1(j'_1(x), \dots, j'_k(x)), \\ &\dots \\ j_n(x) &= h_n(j'_1(x), \dots, j'_k(x)), \\ j(x) &= h(j'_1(x), \dots, j'_k(x)). \end{aligned} \quad (20)$$

Очевидно, что функции $j_1, \dots, j_n, j$ удовлетворяют условиям следствия 2. Теперь из соотношений (19), (20) получаем, что

$$(j_1(a), \dots, j_n(a), j(a)) = (h_1(a_1, \dots, a_k), \dots, h_n(a_1, \dots, a_k), h(a_1, \dots, a_k)).$$

Следствие доказано.

Следствие 3. Пусть $Q \subseteq P_k$ и функция $g(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ эквационально определяется через функции множества Q . Тогда g позитивно определяется через функции множества Q . В частности, $\text{Eq}[Q] \subseteq \text{Pos}[Q]$.

Доказательство. Согласно теореме 1 график функции g представим в виде объединения множеств (3). Значит, отношение $y = g(z_1, \dots, z_n)$ позитивно определяется формулой

$$\bigvee (\exists x_1) \dots (\exists x_k) ((z_1 = h_1(x_1, \dots, x_k)) \& \dots \\ \& (z_n = h_n(x_1, \dots, x_k)) \& (y = h(x_1, \dots, x_k))),$$

где дизъюнкция распространяется по всем наборам $(h_1, \dots, h_n, h)$, определяющим график функции g . Следствие доказано.

Следствие 4. При любом $k \geq 2$ система всех констант $\{0, 1, \dots, k-1\}$ позитивно полна в классе P_k .

Доказательство. Согласно предложению 1 из [11]

$$\text{Eq}[\{0, 1, \dots, k-1\}] = P_k.$$

Далее применяем следствие 3.

4. Конечное порождение эквационально замкнутых классов и критерий эквациональной полноты

Теорема 2. Любой эквационально замкнутый класс функций из P_k эквационально порождается множеством всех своих функций, зависящих не более чем от k переменных.

Доказательство. Пусть Q — эквационально замкнутый класс, $Q \subseteq P_k$, и пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in Q$, где $n > k$. Рассмотрим произвольный набор $a = (a_1, \dots, a_n)$ из E_k^n . Очевидно, что помимо равенства (2) функция f будет также удовлетворять равенству

$$f(b_1, \dots, b_n) = f^b(b_{i_1}, \dots, b_{i_l})$$

для любого набора $b = (b_1, \dots, b_n)$, где $\ker(b) = \ker(a)$. Иными словами, если при получении функции f^a из функции f переменные $x_1, \dots, x_n$ заменяются соответственно переменными $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$, где $\{j_1, \dots, j_n\} = \{i_1, \dots, i_l\}$ и $j_1 = 1$, то равенство

$$\varphi(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) = f^a(x_{i_1}, \dots, x_{i_l}) \quad (21)$$

позволяет правильно определять значения функции f на всех наборах b , удовлетворяющих условию $\ker(b) = \ker(a)$. Отсюда сразу следует, что система равенств вида (21), рассматриваемая для всех наборов a из E_k^n , корректно определяет функцию f через функции множеств $Q^{(l)}$, $l \leq k$. Теорема доказана.

Следствие 5. При любом $k \geq 2$ число эквационально замкнутых классов в P_k конечно.

Следствие 6. При любом $k \geq 2$ любой позитивно замкнутый класс функций из P_k позитивно порождается множеством всех своих функций, зависящих не более чем от k переменных.

Доказательство. Согласно следствию 3 из теоремы 1, любой позитивно замкнутый класс состоит из нескольких эквационально замкнутых классов.

Назовем множество функций $Q \subseteq P_k$ тотальным, если для любого $a \in E_k$ в множестве Q входит функция, принимающая значение a .

Нетрудно видеть, что для любого тотального множества $Q \subseteq P_k$, замкнутого относительно операции отождествления переменных, множество всех функций из Q , зависящих не более чем от k переменных, также является тотальным.

Следующая теорема усиливает предложение 4 из [11].

Теорема 3. Пусть Q — тотальное множество функций из P_k , замкнутое относительно операций отождествления и перестановки переменных, а также введения фиктивных переменных. Тогда

$$\text{Pol}(Q^{(k)}) \subseteq \text{Eq}[Q].$$

Доказательство. Пусть $g(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная функция, лежащая в $\text{Pol}(Q^{(k)})$, и $(a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$. Ввиду тотальности множества Q в нем найдутся такие функции $f_1, \dots, f_n$, которые принимают соответственно значения $a_1, \dots, a_n$. Путем отождествления переменных образуем из этих функций функции $f'_1, \dots, f'_n$, которые принадлежат множеству Q , зависят не более чем от k переменных и также принимают значения $a_1, \dots, a_n$. Можно считать, что наборы, на которых функции $f'_1, \dots, f'_n$ принимают значения $a_1, \dots, a_n$, не содержат одинаковых компонент. С помощью введения фиктивных переменных получаем далее из функций $f'_1, \dots, f'_n$ функции $g_1, \dots, g_n$, которые принадлежат множеству $Q^{(k)}$ и принимают значения $a_1, \dots, a_n$ на наборах, не имеющих одинаковых компонент. Наконец, переставляя, быть может, в функциях $g_1, \dots, g_n$ переменные, добиваемся того, что полученные после перестановки переменных функции $g'_1, \dots, g'_n$ принимают значения $a_1, \dots, a_n$ на одном и том же наборе $(0, 1, \dots, k-1)$. Итак,

$$(g'_1(0, 1, \dots, k-1), \dots, g'_n(0, 1, \dots, k-1)) = (a_1, \dots, a_n).$$

Если теперь

$$h(x_1, \dots, x_k) = g(g'_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g'_n(x_1, \dots, x_k)),$$

где функция h ввиду включения $g \in \text{Pol}(Q^{(k)})$ принадлежит множеству $Q^{(k)}$, то рассматриваем равенство

$$\varphi(g'_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g'_n(x_1, \dots, x_k)) = h(x_1, \dots, x_k)$$

над множеством Q . Совокупность всех таких равенств (по всем наборам $(a_1, \dots, a_n)$ из E_k^n) и будет, очевидно, эквационально определять функцию g через функции множества Q . Теорема доказана.

Следствие 7. Пусть Q — тотальный эквационально замкнутый класс функций из P_k . Тогда

$$Q = \text{Pol}(Q^{(k)}).$$

Доказательство. Включение $\text{Pol}(Q^{(k)}) \subseteq Q$ установлено в теореме 3. Обратное включение следует из замкнутости класса Q относительно операции суперпозиции (см. [11]).

Следствие 8. В условиях теоремы 3 имеет место включение

$$\text{Pol}(Q^{(k)}) \subseteq \text{Pos}[Q].$$

Для доказательства достаточно применить следствие 3 из теоремы 1.

Следствие 9. Пусть Q — позитивно замкнутый тотальный класс функций из P_k . Тогда

$$Q = \text{Pol}(Q^{(k)}).$$

Доказательство. Включение $Q \subseteq \text{Pol}(Q^{(k)})$ вытекает из того, что функции класса Q (замкнутого, в частности, относительно операции суперпозиции) сохраняют множество $Q^{(k)}$. Далее применяем следствие 5.

Следствие 10. Пусть Q — тотальное множество, $Q \subseteq P_k$. Тогда существует не более одного позитивно замкнутого класса R из P_k , для которого $R^{(k)} = Q^{(k)}$.

Введение дополнительных ограничений на класс Q приводит к следующему утверждению.

Предложение 1. Пусть Q — эквационально замкнутый класс, $Q \subseteq P_k$ и существуют такой элемент $a \in E_k$ и такие функции $f_1, \dots, f_{k-1} \in Q^{(1)}$, что выполняется равенство (17). Тогда

$$Q = \text{Eq}[Q^{(1)}].$$

Доказательство. В самом деле, из условия (17) следует, что значением вектор-функции

$$(x, f_1(x), \dots, f_{k-1}(x)) \quad (22)$$

в точке $x = a$ служит набор из E_k^k , не имеющий одинаковых компонент. Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная функция из Q , то ввиду замкнутости Q относительно операции суперпозиции при подстановке в функцию f на места всех переменных любых функций из набора (22) получается некоторая функция из $Q^{(1)}$. Отсюда и из свойства вектор-функции (22) вытекает, что функцию f можно эквационально определить через функции множества $Q^{(1)}$ системой равенств, состоящей, например, из всех равенств вида

$$\varphi(g_1(x), \dots, g_n(x)) = g(x),$$

где $g_1(x), \dots, g_n(x) \in \{x, f_1(x), \dots, f_{k-1}(x)\}$ и

$$g(x) = f(g_1(x), \dots, g_n(x)).$$

Предложение доказано.

Пусть D — непустое собственное подмножество множества E_k , π — перестановка на множестве E_k , которая разлагается в произведение циклов одной и той же простой длины. Обозначим через Q_D множество всех функций из P_k , которые сохраняют множество D , и через Q_π — множество всех функций $f \in P_k$, самодвойственных относительно перестановки π , то есть удовлетворяющих тождеству

$$\pi(f(x_1, \dots, x_n)) = f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)).$$

Пусть T_k есть множество функций $P_k^{(1)}$, рассматриваемое как полугруппа с операцией композиции (суперпозиции). Полугруппа $T \subseteq T_k$ называется транзитивной, если для любых двух элементов $a, b \in E_k$ в T существует функция f , для которой $f(a) = b$.

Лемма 1. Пусть T — максимальная (по включению) из транзитивных подполугрупп полугруппы T_k , которая не содержится в классах типа Q_π и обладает следующим свойством: найдутся такие неравные элементы $a_1, a_2 \in E_k$, что для любых двух функций $f_1, f_2 \in T$ либо вектор-функция

$$(f_1(x), f_2(x)) \quad (23)$$

не принимает значение (a_1, a_2) , либо существует элемент $b \in E_k$, для которого $f_1(b) = f_2(b)$.

Тогда класс $\text{Pol}(T)$ Eq-предполон в P_k .

Доказательство. Покажем, что $\text{Eq}[T] \neq P_k$. В самом деле, если $g(x) \in \text{Eq}[T]$, то по теореме 1 график функции g представим в виде объединения множеств значений вектор-функций (23), где $f_1, f_2 \in T$. Однако по свойству полугруппы T либо для некоторых неравных a_1, a_2 любая вектор-функция (23) не принимает значение (a_1, a_2) (и тогда $g(a_1) \neq a_2$), либо существуют элемент b и вектор-функция (23), для которой $f_1(b) = f_2(b)$ (и тогда соответственно $g(b) = b$). Таким образом, функция g либо удовлетворяет неравенству $g(a_1) \neq a_2$, либо имеет неподвижную точку b . Понятно, что в множестве $P_k^{(1)}$ содержатся функции, переводящие a_1 в a_2 и не имеющие неподвижных точек. Следовательно, $\text{Eq}[T] \neq P_k$.

Далее, согласно теореме 3 класс $\text{Eq}[T]$ содержит множество $\text{Pol}(T)$. Возьмем произвольную функцию $h(x_1, \dots, x_n)$, не принадлежащую множеству $\text{Pol}(T)$, и покажем, что множество $T \cup \{h\}$ Eq-полно в P_k . Так как $\text{Eq}[T] \neq P_k$, из этого будет следовать, что $\text{Eq}[T] = \text{Pol}(T)$ и $\text{Pol}(T)$ является Eq-предполным классом.

Из соотношения $h \notin \text{Pol}(T)$ вытекает, что в полугруппе T найдутся такие функции $f_1, \dots, f_n$, что функция

$$f(x) = h(f_1(x), \dots, f_n(x)),$$

принадлежащая замыканию $[T \cup \{h\}]$, не входит в полугруппу T . Ввиду свойства максимальности полугруппы T (транзитивная полугруппа) $T' = [T \cup \{h\}]$ будет удовлетворять следующему условию: для любых двух неравных элементов a_1, a_2 из E_k в T' найдутся такие функции f_1, f_2 , что для некоторого $c \in E_k$ выполняются соотношения

$$f_1(c) = a_1, \quad f_2(c) = a_2, \quad (\forall x)(f_1(x) \neq f_2(x)).$$

В этом случае согласно теореме 3 из [11] множество T' будет Eq-полным в P_k , если только оно целиком не содержится ни в одном из Eq-предполных классов типов Q_D и Q_π . Соотношение $Q \not\subseteq Q_D$ сразу следует из транзитивности полугруппы T' , а соотношение $Q \not\subseteq Q_\pi$ — из соответствующего соотношения $T \not\subseteq Q_\pi$, которое имеется в условиях леммы. Лемма доказана.

Теорема 4. Система функций из P_k является Eq-полной в классе P_k тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из следующих Eq-замкнутых классов:

- (1) предполные (относительно операции суперпозиции) в P_k классы типа Q_D ;
- (2) предполные (относительно операции суперпозиции) в P_k классы типа Q_π ;

- (3) Еq-предполные классы вида $\text{Pol}(T)$, где T — подполугруппа полугруппы T_k , удовлетворяющая условиям леммы 1.

Доказательство. Необходимость условий теоремы следует из Еq-неполноты классов типа Q_D и Q_π , доказанной в [11] (следствие 1 из предложения 2 и предложение 3), и из Еq-неполноты классов типа $\text{Pol}(T)$, установленной в лемме 1.

Докажем достаточность условий теоремы. Пусть система функций $Q \subseteq P_k$ целиком не содержится ни в одном из Еq-замкнутых классов пунктов 1–3 теоремы. Будем предполагать, что Q является Еq-замкнутым классом.

Согласно предложению 5 в [11] невхождение системы Q в классы 1, 2 обеспечивает транзитивность полугруппы $T = (\text{Eq}[Q])^{(1)}$. Согласно доказанному выше предложению 1

$$Q = \text{Eq}[Q] = \text{Pol}(T). \quad (24)$$

Если T не обладает свойством, указанным в лемме 1, то по теореме 3 из [11] система Q является Еq-полной в P_k .

Пусть для некоторого Еq-предполного класса Q_π выполняется включение $T \subseteq Q_\pi$. Тогда множество $Q_\pi^{(1)}$ также является транзитивной полугруппой. Значит, согласно предложению 1

$$Q_\pi = \text{Eq}[Q_\pi^{(1)}].$$

Из включения $T \subseteq Q_\pi^{(1)}$ следует, что

$$\text{Eq}[T] \subseteq Q_\pi. \quad (25)$$

Сравнивая теперь (24), (25) и используя очевидное включение $\text{Pol}(T) \subseteq \text{Eq}[T]$, приходим к соотношению $\text{Eq}[Q] \subseteq Q_\pi$, что противоречит условию теоремы о невхождении системы Q в классы типа Q_π .

Итак, далее можно считать, что полугруппа T целиком не входит ни в один из Еq-предполных классов Q_π . Предположим, что T обладает указанным в лемме 1 свойством с неравными элементами a_1, a_2 . Ввиду следствия 2 из теоремы 1 график произвольной функции $g(x_1, \dots, x_n) \in Q$ представим в виде объединения множеств (18), где функции $j_1, \dots, j_n$ либо входят в T , либо совпадают с функцией e_1^1 , а j — функция из T . Рассмотрим (для данных a_1, a_2) максимальную по включению подполугруппу T' полугруппы T_k , которая содержит полугруппу T и обладает свойством, указанным в лемме 1. Тогда в силу включения $T \subseteq T'$ и следствия 2 из теоремы 1 будет также справедливым включение $\text{Eq}[T] \subseteq \text{Eq}[T']$. Из равенства (24) и определения операторов Еq, Pol получаем, что $\text{Eq}[T] = Q$. Таким образом, $Q \subseteq \text{Eq}[T']$, что противоречит условию теоремы о невхождении системы Q в Еq-предполные классы пункта 3. Теорема доказана.

Список литературы

1. Голунков Ю. В., Полнота систем функций в операторных алгоритмах, реализующих функции k -значной логики. *Вероятностные методы и кибернетика* (1980) №17, 23–34.
2. Данильченко А. Ф., О параметрической выразимости функций трехзначной логики. *Алгебра и логика* (1977) 16, №4, 397–416.
3. Кузнецов А. В., О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости. В кн.: *Логический вывод*. Наука, Москва, 1979, с. 5–33.
4. Марченков С. С., S -классификация функций многозначной логики. *Дискретная математика* (1997) 9, №3, 125–152.

5. Марченко С. С., *A-классификация функций многозначной логики. Докл. РАН* (1999) **366**, №4, 455–457.
6. Марченко С. С., *О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках. Дискретная математика* (1999) **11**, №4, 110–126.
7. Марченко С. С., *Замкнутые классы булевых функций*. Физматлит, Москва, 2000.
8. Марченко С. С., *S-классификация функций трехзначной логики*. Физматлит, Москва, 2001.
9. Марченко С. С., *Операторы замыкания с разветвлением по предикату. Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика*. (2003) №6, 37–39.
10. Марченко С. С., *Функциональные системы с операцией суперпозиции*. Физматлит, Москва, 2004.
11. Марченко С. С., *Эквивалентное замыкание. Дискретная математика* (2005) **17**, №2, 117–126.
12. Нгуен Ван Хоа, *Об L -эквивалентности систем функций в многозначных логиках. Алгебра и логика* (1988) **27**, №1, 37–47.
13. Нгуен Ван Хоа, *О G -полных замкнутых классах k -значной логики. ЕИК* (1990) **26**, №5/6, 301–313.
14. Нгуен Ван Хоа, *К описанию семейства G -полных замкнутых классов k -значной логики. Кибернетика* (1990) **5**, 9–12.
15. Нгуен Ван Хоа, *О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики P_3 . Дискретная математика* (1992) **4**, №4, 82–95.
16. Нгуен Ван Хоа, *О семействах замкнутых классов k -значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами. Дискретная математика* (1993) **5**, №4, 87–108.
17. Нгуен Ван Хоа, *О замкнутых классах k -значной логики, самодвойственных относительно транзитивных групп. Дискретная математика* (1998) **8**, №1, 129–156.
18. Соловьев В. Д., *Замкнутые классы в k -значной логике с операцией разветвления по предикату. Дискретная математика* (1990) **2**, №4, 19–25.
19. Тайманов В. А., *О функциональных системах k -значной логики с операциями программного типа. Докл. АН СССР* (1983) **268**, №6, 1307–1310.
20. Тарасова О. С., *Классы k -значной логики, замкнутые относительно расширенной операции суперпозиции. Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика* (2001) №6, 54–57.
21. Тарасова О. С., *Классы функций трехзначной логики, замкнутые относительно операции суперпозиции и перестановки. Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика* (2004) №1, 25–29.
22. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1986.

Статья поступила 3.11.2005.