Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Волков, Пример простой квазиуниверсальной функции в классе $\mathcal{E}^2$ иерархии Гжегорчика, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 4, 31–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm71>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 03:09:25

Пример простой квазиуниверсальной функции в классе $\mathcal{E}^2$ иерархии Гжегорчика

© 2006 г. С. А. Волков

Приводится пример одной квазиуниверсальной функции в классе $\mathcal{E}^2$ иерархии Гжегорчика. Эта функция имеет очень простой вид и явно не содержит нумерацию какого-либо варианта машин Тьюринга. Как следствие, приводится пример простого базиса по суперпозиции в классе $\mathcal{E}^2$.

1. Введение

Как известно, не существует примитивно рекурсивной функции, универсальной для множества всех примитивно рекурсивных функций. Однако некоторое понятие универсальности для класса примитивно рекурсивных функций все-таки можно ввести. Например, функцию $U(n, x, y)$ можно назвать квазиуниверсальной, если для любой примитивно рекурсивной функции $f(x)$ найдутся такие число n и примитивно рекурсивная функция $g(x)$, что равенство $U(n, x, y) = f(x)$ выполняется для любых x и y таких, что $y \geq g(x)$.

Квазиуниверсальная примитивно рекурсивная функция $U(n, x, y)$ легко может быть построена, исходя, например, из вычислимой нумерации машин Тьюринга. Задача построения квазиуниверсальной функции становится более трудной, если вместо класса примитивно рекурсивных функций рассматривать менее широкие классы функций такие, как, например, классы иерархии Гжегорчика [1]. Для классов Гжегорчика $\mathcal{E}^n$, $n \geq 2$, положительное решение данной задачи получено в работах [3, 4]. При этом оказалось, что в качестве функций g можно брать суперпозиции некоторых монотонных функций, определяющих скорость роста функций в соответствующих классах иерархии Гжегорчика. Еще следует отметить, что следствием существования квазиуниверсальных функций в классах Гжегорчика $\mathcal{E}^n$, $n \geq 2$, является наличие в них конечных базисов по суперпозиции [3, 4].

Квазиуниверсальные функции, построенные для классов $\mathcal{E}^n$ в работах [3, 4], имеют довольно громоздкие определения на основе специально разработанных нумераций некоторых типов многоленточных машин Тьюринга. С помощью этих функций могут быть построены конечные базисы по суперпозиции в этих классах. Естественно, возникает вопрос о существовании в них простых, “явных” базисов по суперпозиции. Классы $\mathcal{E}^n$, $n \geq 3$, содержат функции экспоненциального роста, что упрощает процедуру построения в них базисов по суперпозиции. Примеры простых базисов для класса $\mathcal{E}^3$ содержатся в работах [3, 5, 6]. С классом $\mathcal{E}^2$ дело обстоит несколько иначе. Все функции этого класса ограничены полиномами, поэтому методы построения “явных” базисов, хорошо работающие для $\mathcal{E}^3$, оказываются непригодными для $\mathcal{E}^2$. Высказывалось предположение, что

существенно более простыми, чем построенные с помощью нумераций машин Тьюринга, квазиуниверсальные функции и базисы по суперпозиции в $\mathcal{E}^2$ быть не могут.

В этой работе приводится пример квазиуниверсальной функции Q , определение которой имеет достаточно простой вид и явно не содержит нумерацию какого-либо варианта машин Тьюринга. Однако мы будем использовать “расширенное” определение квазиуниверсальности, которое отличается от приведенного выше. Именно, функцию $Q(x_1, x_2, \dots, x_m)$ из класса $\mathcal{E}^2$ будем называть квазиуниверсальной в классе $\mathcal{E}^2$ относительно системы функций Φ , если для любой функции $f(\tilde{y})$ из класса $\mathcal{E}^2$ найдутся функции $h(x, \tilde{y}), g_1(\tilde{y}), g_2(\tilde{y}), \dots, g_m(\tilde{y})$ из множества Φ такие, что

$$f(\tilde{y}) = h(Q(g_1(\tilde{y}), g_2(\tilde{y}), \dots, g_m(\tilde{y})), \tilde{y}).$$

В качестве множества Φ будет использоваться множество всех функций, получающихся суперпозициями функций из некоторого набора элементарных “арифметических” функций. В качестве такого набора рассмотрим набор

$$x + 1, \quad xy, \quad \min(x, 2^y), \quad x \div y, \quad [x/y], \quad [\log_2 x]. \quad (1)$$

Отметим, что функции (1) входят в класс $\mathcal{E}^2$, поэтому эти функции вместе с функцией Q образуют базис по суперпозиции в классе $\mathcal{E}^2$.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Будем рассматривать функции, определенные на множестве $N = \{0, 1, 2, \dots\}$. Числа из множества N будем называть натуральными. Считаем, что операция суперпозиции включает в себя перестановку и отождествление переменных, а также подстановку функций в функцию вида

$$f(g_1(x_1^1, \dots, x_{n_1}^1), \dots, g_m(x_1^m, \dots, x_{n_m}^m)).$$

Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n, y)$ получена из функций $g(x_1, \dots, x_n), h(x_1, \dots, x_n, y, z), j(x_1, \dots, x_n, y)$ с помощью операции ограниченной рекурсии, если выполняются соотношения

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n, 0) &= g(x_1, \dots, x_n), \\ f(x_1, \dots, x_n, y + 1) &= h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)), \\ f(x_1, \dots, x_n, y) &\leq j(x_1, \dots, x_n, y). \end{aligned}$$

Пусть Ψ — некоторое множество функций, замкнутое относительно суперпозиции и $\Phi \subseteq \Psi$. Будем говорить, что множество Φ порождает множество Ψ , если замыкание множества Φ относительно суперпозиции совпадает с множеством Ψ . Конечные множества, порождающие Ψ , будем называть также конечными базисами по суперпозиции в множестве Ψ .

Определим класс $\mathcal{E}^2$ иерархии Гжегорчика как наименьший класс функций, содержащий функции

$$0, \quad x + 1, \quad x \cdot y$$

и замкнутый относительно операций суперпозиции и ограниченной рекурсии.

Положим

$$x \div y = \max(0, x - y),$$

$$\text{sg}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

$$\overline{\text{sg}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Доопределим понятие целой части числа, полагая $[x/y]$ равным целой части числа x/y , если $y > 0$, и равным нулю, если $y = 0$, аналогично полагаем $[\log_2 x]$ равным целой части $\log_2 x$, если $x > 0$, и равным нулю, если $x = 0$. Положим также

$$\text{gm}(x, y) = x \div y \cdot [x/y],$$

Из [1] следует, что функции

$$\text{sg}(x), \quad \overline{\text{sg}}(x), \quad x \div y, \quad [x/y], \quad [\log_2 x], \quad \min(x, 2^y), \quad \text{gm}(x, y)$$

принадлежат классу $\mathcal{E}^2$.

Определим функцию $x \wedge y$ как поразрядную конъюнкцию двоичных представлений чисел x и y . Пусть $a_n a_{n-1} \dots a_0, b_n b_{n-1} \dots b_0$ — двоичные представления чисел x и y (если длины двоичных представлений различны, то старшие разряды двоичного представления меньшего числа равны нулю). Тогда двоичное представление числа $x \wedge y$ есть $(a_n \cdot b_n)(a_{n-1} \cdot b_{n-1}) \dots (a_0 \cdot b_0)$.

Определим $R(x, y)$ как циклический сдвиг двоичного представления числа x на y разрядов вправо. Иными словами, пусть $R(0, y) = 0$, $R(1, y) = 1$, а если $x \geq 2$ и $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ — двоичное представление x , причем $a_n = 1$, то двоичная запись $R(x, y)$ есть $a_{n+y} a_{n+y-1} \dots a_{1+y} a_y$, где все сложения проводятся по модулю $n + 1$.

С использованием, например, операции ограниченного суммирования [7] нетрудно показать, что функции $x \wedge y$, $R(x, y)$ принадлежат классу $\mathcal{E}^2$ Гжегорчика.

Определим функцию $Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t)$ следующей примитивной рекурсией:

$$Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, 0) = x,$$

$$Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t + 1) = Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t),$$

если $Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t) \wedge R(p_1, c_1 t) \neq 0$, и

$$Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t + 1) = Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t) + R(p_2, c_2 t)$$

в противном случае.

Поскольку

$$Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t) \leq x + 2p_2 t,$$

это ограниченная рекурсия в классе $\mathcal{E}^2$ и, таким образом, $Q \in \mathcal{E}^2$.

Центральным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема 1. Функция $Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t)$ является квазиуниверсальной в классе $\mathcal{E}^2$ относительно замыкания по суперпозиции системы функций (1).

Следствие 1. Система функций

$$x + 1, \quad xy, \quad \min(x, 2^y), \quad x \div y, \quad [x/y], \quad [\log_2 x], \quad Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t)$$

образует базис по суперпозиции в классе $\mathcal{E}^2$ Гжегорчика.

3. Машины Минского

Машина Минского есть многоленточная нестирающая машина Тьюринга, имеющая конечное число односторонних, бесконечных вправо лент, концевые клетки которых содержат символ 1, а остальные — 0 (см. [2, 8]); каждая лента имеет по одной читающей головке; на каждом шаге работы машины Минского головки могут независимо друг от друга сдвигаться на одну клетку влево, вправо или оставаться в той же клетке. Программа машины организована таким образом, что головки не могут сдвигаться влево с клеток, содержащих символ 1.

Будем говорить, что машина Минского M , имеющая не менее n лент, вычисляет всюду определенную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, если для любых $x_1, \dots, x_n$ выполняются следующие условия. Если в начальный момент вычисления первые n головок машины находятся в клетках с номерами $x_1, \dots, x_n$ соответственно (концевые клетки имеют номер 0), а остальные головки находятся в концевых клетках, то в заключительный момент вычисления (когда машина M достигает заключительное состояние) первая головка будет находиться в клетке с номером $f(x_1, \dots, x_n)$.

Время вычисления (число шагов работы машины) в этом случае будем обозначать $T_M(x_1, \dots, x_n)$.

Пусть машина M имеет s внутренних состояний. Эти состояния будем обозначать числами $0, 1, \dots, s-1$. Будем предполагать, что 1 — начальное состояние, 0 — заключительное. Программа k -ленточной машины Минского M состоит из команд вида

$$e_1 \dots e_k q \rightarrow d_1 \dots d_k q',$$

где

$$e_1, \dots, e_k \in \{0, 1\}, \quad q, q' \in \{0, 1, \dots, s-1\}, \quad q \neq 0, \quad d_1, \dots, d_k \in \{-1, 0, 1\}$$

и $d_i \neq -1$, если $e_i = 1$. Данная команда означает, что если машина M в некоторый момент t находится в состоянии q и вектор, считываемый головками, есть $(e_1, \dots, e_k)$, то в момент $t+1$ машина M перейдет в состояние q' и головка с номером i , $1 \leq i \leq k$, сдвинется на одну клетку влево ($d_i = -1$), вправо ($d_i = 1$) или останется в прежней клетке ($d_i = 0$).

Конфигурацией k -ленточной машины Минского M в момент времени t будем называть вектор $(x_1, \dots, x_k; q)$, где x_i — номер клетки, в которой находится i -я головка, $1 \leq i \leq k$, а q — внутреннее состояние машины M в момент t .

Имеет место следующее описание класса $\mathcal{E}^2$ в терминах вычислений на машинах Минского.

Теорема 2 ([3, 4]). *Класс $\mathcal{E}^2$ есть множество всех функций, вычислимых на машинах Минского за полиномиальное время. Иными словами, всюду определенная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит классу $\mathcal{E}^2$ тогда и только тогда, когда существуют машина Минского M и полином $t(x_1, \dots, x_n)$ с натуральными коэффициентами такие, что машина M вычисляет функцию f и при любых $x_1, \dots, x_n$ выполнено неравенство*

$$T_M(x_1, \dots, x_n) \leq t(x_1, \dots, x_n).$$

Назовем машину Минского приведенной, если в каждом состоянии q она может считывать информацию только с одной ленты (для каждого q , вообще говоря, своей). Программа приведенной k -ленточной машины Минского с s состояниями состоит из $s-1$ команд вида

$$q \rightarrow i; d_1^0 \dots d_k^0 q^0; d_1^1 \dots d_k^1 q^1,$$

где

$$q \in \{1, 2, \dots, s-1\}, \quad 1 \leq i \leq k, \\ d_1^0, \dots, d_k^0, d_1^1, \dots, d_k^1 \in \{-1, 0, 1\}, \quad q^0, q^1 \in \{0, 1, \dots, s-1\}.$$

Данная команда означает, что если в некоторый момент t машина находится в состоянии q и i -я головка считывает число e , то в момент $t+1$ машина перейдет в состояние q^e и головка с номером j , $1 \leq j \leq k$, сдвинется на одну клетку влево ($d_j^e = -1$), вправо ($d_j^e = 1$) или останется на прежнем месте ($d_j^e = 0$).

Очевидно, один шаг работы обычной машины Минского M можно промоделировать k шагами работы подходящей приведенной машины Минского M' , если вместо каждого состояния машины M в машине M' определить 2^k состояний, “запоминающих” двоичные наборы длины k . Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть машина Минского M вычисляет всюду определенную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$. Тогда существуют приведенная машина Минского M' и константа C такие, что M' вычисляет f и

$$T_{M'}(x_1, \dots, x_n) \leq C T_M(x_1, \dots, x_n).$$

Следствие 2. Класс $\mathcal{E}^2$ есть множество всех функций, вычислимых на приведенных машинах Минского за полиномиальное время.

4. Вектор-функции, конфигурации и их коды

Далее будем рассматривать всюду определенные вектор-функции вида

$$\tilde{F}: N^k \times \{0, 1, \dots, s-1\} \rightarrow N^k \times \{0, 1, \dots, s-1\}. \quad (2)$$

Пусть $(x_1, \dots, x_k; q)$ — конфигурация машины Минского M и

$$e_1 \dots e_k q \rightarrow d_1 \dots d_k q' \quad (3)$$

— команда из программы машины M , причем

$$e_1 = \overline{\text{sg}}(x_1), \dots, e_k = \overline{\text{sg}}(x_k). \quad (4)$$

Команда (3) преобразует конфигурацию $(x_1, \dots, x_k; q)$ в непосредственно следующую конфигурацию $(x_1 + d_1, \dots, x_n + d_n; q')$.

В целом для машины Минского M процесс преобразования произвольной конфигурации в непосредственно следующую можно описать с помощью вектор-функции $\text{Cоп}_M(x_1, \dots, x_k; q)$, где

$$\text{Cоп}_M(x_1, \dots, x_k; q) = (x_1 + d_1, \dots, x_k + d_k; q'),$$

если в программе машины M содержится команда (3) и выполняются соотношения (4), и

$$\text{Cоп}_M(x_1, \dots, x_k; q) = (x_1, \dots, x_k; q),$$

если $(x_1, \dots, x_n; q)$ — заключительная конфигурация.

Вектор-функцию $\tilde{F}$ вида (2) мы назовем простой, если существуют целые (не обязательно натуральные) числа $a_1, \dots, a_k$, а также такие натуральные i , $i \leq k$, и $q', q'' \in \{0, 1, \dots, s-1\}$, что для любого вектора $(x_1, \dots, x_k; q)$

$$\tilde{F}(x_1, \dots, x_k; q) = \begin{cases} (x_1 + a_1, \dots, x_k + a_k; q'), & \text{если } x_i = 0 \text{ и } q = q'', \\ (x_1, \dots, x_k; q) & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (5)$$

(предполагаем, что $x_0 = 0$).

Очевидно, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. Для любой приведенной k -ленточной машины Минского M существуют натуральные числа s , t и простые вектор-функции $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_m$ вида (2) такие, что

$$\text{Con}_M(\tilde{x}) = \tilde{F}_1(\tilde{F}_2(\dots \tilde{F}_m(\tilde{x}) \dots)).$$

Натуральное число x будем называть $(w; l)$ -кодом конфигурации $(x_1, \dots, x_k; q)$, если двоичные разряды числа x с $l(i-1)$ -го по $(li-1)$ -й образуют двоичную запись x_i , $1 \leq i \leq k$, а разряды с kl -го по $(kl+w-1)$ -й — двоичную запись числа q . Отметим, что $(w; l)$ -код конфигурации определяется не однозначно.

Всюду определенную функцию $f(x)$ будем называть простейшей, если существуют натуральные u и v такие, что при всех x

$$f(x) = \begin{cases} x + v, & \text{если } x \wedge u = 0, \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Предложение 3. Пусть $\tilde{F}$ — простая вектор-функция вида (2), w, l — натуральные числа такие, что $2^w \geq s$ и $l \geq 1$. Тогда существуют такие простейшие функции f_1, f_2, f_3 , что для любых векторов $(x_1, \dots, x_k; q)$, $(y_1, \dots, y_k; q^*)$ и натурального x , если

$$\begin{aligned} x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k &< 2^l, \\ (y_1, \dots, y_k; q^*) &= \tilde{F}(x_1, \dots, x_k; q), \\ x - (w; l)\text{-код конфигурации } (x_1, \dots, x_k; q), \end{aligned}$$

то $f_3(f_2(f_1(x)))$ — $(w; l)$ -код конфигурации $(y_1, \dots, y_k; q^*)$.

Доказательство. Пусть $\tilde{F}$ имеет вид (5). Положим

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ v_1 &= (2^w - q'')2^{lk}, \\ u_2 &= \begin{cases} (2^w - 1)2^{lk} + (2^l - 1)2^{l(i-1)}, & \text{если } i > 0, \\ (2^w - 1)2^{lk}, & \text{если } i = 0, \end{cases} \\ v_2 &= 2^{lk+w} + (2^w + q' - q'')2^{lk} + \sum_{j=1}^k a_j 2^{l(j-1)}, \\ u_3 &= 0, \\ v_3 &= q''2^{lk}, \\ f_j(x) &= \begin{cases} x + v_j, & \text{если } x \wedge u_j = 0, \\ x & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad 1 \leq j \leq 3. \end{aligned}$$

Для начала заметим, что при всех j , $1 \leq j \leq 3$, числа u_j , v_j неотрицательны.

Пусть $f_1(x)$, $f_2(f_1(x))$, $f_3(f_2(f_1(x)))$ — коды конфигураций K_1 , K_2 , K_3 соответственно, и пусть

$$K_j = (x_{j1}, \dots, x_{jk}; q_j), \quad 1 \leq j \leq 3.$$

Ясно, что

$$f_1(x) = x + (2^w - q'')2^{lk}.$$

Следовательно,

$$K_1 = (x_1, \dots, x_k; q - q'')$$

(здесь и далее в этом доказательстве сложение и вычитание чисел q , q' , q'' , q_j выполняются по модулю 2^w).

Далее, докажем, что

$$(f_1(x) \wedge u_2 = 0) \iff (x_i = 0 \text{ и } q = q''). \quad (6)$$

Для этого рассмотрим два случая, $i > 0$ и $i = 0$. Если $i > 0$, то в двоичной записи числа u_2 единицы стоят в разрядах с $l(i-1)$ -го по $(li-1)$ -й и с lk -го по $(lk+w-1)$ -й. Из этого следует, что $f_1(x) \wedge u_2 = 0$ тогда и только тогда, когда в соответствующих разрядах числа $f_1(x)$ стоят нули, то есть

$$(f_1(x) \wedge u_2 = 0) \iff (x_{1i} = 0 \text{ и } q_1 = 0).$$

Заметив, что $q_1 = q - q''$ и $x_{1i} = x_i$, получаем (6). В случае $i = 0$ аналогичными рассуждениями получаем, что

$$(f_1(x) \wedge u_2 = 0) \iff (q = q'').$$

По предположению $x_0 = 0$, поэтому выполнено (6).

Пусть $f_1(x) \wedge u_2 = 0$, то есть $x_i = 0$ и $q = q''$. В этом случае, очевидно, при всех j , $1 \leq j \leq k$, справедливо равенство $y_j = x_j + a_j$. По определению $f_1(x)$ является $(w; l)$ -кодом конфигурации K_1 . Поэтому справедлива цепочка сравнений

$$\begin{aligned} f_1(x) &\equiv q_1 2^{lk} + \sum_{j=1}^k x_{1j} 2^{l(j-1)} \\ &\equiv (q - q'') 2^{lk} + \sum_{j=1}^k x_j 2^{l(j-1)} \equiv \sum_{j=1}^k x_j 2^{l(j-1)} \pmod{2^{lk+w}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_2(f_1(x)) &\equiv f_1(x) + v_2 \equiv (q' - q'') 2^{lk} + \sum_{j=1}^k (x_j + a_j) 2^{l(j-1)} \\ &\equiv (q' - q'') 2^{lk} + \sum_{j=1}^k y_j 2^{l(j-1)} \pmod{2^{lk+w}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из того, что при всех j , $1 \leq j \leq k$, выполнено неравенство $y_j < 2^l$, получаем, что

$$K_2 = (y_1, \dots, y_k; q' - q'').$$

А если $f_1(x) \wedge u_2 \neq 0$, то, очевидно, при всех j , $1 \leq j \leq k$, справедливо равенство $y_j = x_j$. Кроме того,

$$f_2(f_1(x)) = f_1(x)$$

и

$$K_2 = K_1 = (x_1, \dots, x_k; q - q'') = (y_1, \dots, y_k; q - q'').$$

Далее, очевидно, что

$$f_3(f_2(f_1(x))) = f_2(f_1(x)) + v_3 = f_2(f_1(x)) + q''2^{lk}.$$

Из этого следует, что

$$q_3 = q_2 + q''$$

и при всех j , $1 \leq j \leq k$,

$$x_{3j} = x_{2j} = y_j.$$

Если $x_i = 0$ и $q = q''$, то

$$q_3 = q_2 + q'' = (q' - q'') + q'' = q' = q^*.$$

В противном случае

$$q_3 = q_2 + q'' = (q - q'') + q'' = q = q^*.$$

Таким образом,

$$K_3 = (y_1, \dots, y_k; q^*).$$

Предложение 3 доказано.

Следствие 3. Пусть M — приведенная k -ленточная машина Минского. Тогда существуют такие натуральные w и r , что для любого натурального $l \geq 1$ найдутся простейшие функции $f_{r-1}, \dots, f_0$ такие, что для любых векторов $(x_1, \dots, x_k; q)$ и $(y_1, \dots, y_k; q')$ и натурального x из условий

$$\begin{aligned} x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k &< 2^l, \\ (y_1, \dots, y_k; q') &= \text{Con}_M(x_1, \dots, x_k; q), \\ x - (w; l) &= \text{код конфигурации } (x_1, \dots, x_k; q) \end{aligned}$$

следует, что $f_{r-1}(f_{r-2}(\dots f_0(x) \dots)) = (w; l)$ -код конфигурации $(y_1, \dots, y_k; q')$.

Замечание 1. Нетрудно заметить, что u_j и v_j могут быть представлены полиномами с целыми коэффициентами от 2^l .

5. Основное свойство функции Q

Будем обозначать через $h_c(x)$ число, двоичную запись которого образуют c младших разрядов числа x ($h_c(x) = 0$, если $c = 0$, $h_c(x) = x$, если двоичная запись x имеет менее c разрядов). Отметим, что для любых x, y, c выполняется соотношение

$$h_c(x + y) = h_c(h_c(x) + h_c(y)).$$

Теперь сформулируем и докажем основное свойство функции Q .

Предложение 4. Пусть натуральные числа $r \geq 1$, $u_0, \dots, u_{r-2}, v_0, \dots, v_{r-2}$ и последовательность всюду определенных функций $f_0(x), f_1(x), \dots$ таковы, что для всех натуральных i

$$f_i(x) = \begin{cases} x + v_{\text{tm}(i,r)}, & \text{если } x \wedge u_{\text{tm}(i,r)} = 0, \\ x & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

если $\text{tm}(i, r) \neq r - 1$, и

$$f_i(x) = x,$$

если $\text{tm}(i, r) = r - 1$.

И пусть для натуральных чисел $t_0, p_1, p_2, c_1, c_2, x, u_{r-1}, v_{r-1}$ выполняются следующие условия:

$$t_0 \geq 1, \tag{7}$$

$$u_{r-1} = 2^{c_1} - 1, \tag{8}$$

$$2^{c_2-1} \leq v_{r-1} < 2^{c_2}, \tag{9}$$

$$p_1 = \sum_{i=0}^{r-1} 2^{c_1 i} u_i, \tag{10}$$

$$p_2 = \sum_{i=0}^{r-1} 2^{c_2 i} v_i, \tag{11}$$

$$x + 2p_2 t_0 < 2^{c_1}, \tag{12}$$

$$x + t_0 \max(v_0, \dots, v_{r-2}) < 2^{c_2}, \tag{13}$$

$$u_i < 2^{c_2}, \quad 0 \leq i \leq r - 2, \tag{14}$$

$$c_1 \geq c_2, \tag{15}$$

$$x \geq 1. \tag{16}$$

Тогда

$$h_{c_2}(Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t_0)) = f_{t_0-1}(f_{t_0-2}(\dots f_0(x) \dots)).$$

Доказательство. Пусть

$$g(t) = \begin{cases} f_{t-1}(f_{t-2}(\dots f_0(x) \dots)), & \text{если } t > 0, \\ x, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

Ясно, что

$$g(t + 1) \leq g(t) + \max(v_0, \dots, v_{r-2})$$

при всех t . Как следствие этого неравенства, а также (13) и (16) получаем, что при $t \leq t_0$

$$0 < g(t) < 2^{c_2}. \quad (17)$$

Кроме того, очевидно, что при $t < t_0$

$$g(t) + \max(v_0, \dots, v_{r-2}) < 2^{c_2}. \quad (18)$$

Далее по индукции докажем, что для всех $t \leq t_0$ справедливо равенство

$$h_{c_2}(Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t)) = g(t).$$

Базисом индукции является равенство

$$h_{c_2}(Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, 0)) = x,$$

которое верно, так как

$$Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, 0) = x$$

и $x < 2^{c_2}$ (см. (13)).

Проведем индуктивный переход, пусть $t < t_0$ и

$$h_{c_2}(Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t)) = g(t).$$

Докажем, что

$$h_{c_2}(Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t+1)) = g(t+1).$$

Из (7) и (13) следует, что $v_0, \dots, v_{r-2} < 2^{c_2}$, а из (9) следует, что $v_{r-1} < 2^{c_2}$. Аналогично, из (14) и (8) следует, что $u_0, \dots, u_{r-1} < 2^{c_1}$. Таким образом, при всех j , $0 \leq j < r$, выполнены неравенства

$$u_j < 2^{c_1}, \quad v_j < 2^{c_2}.$$

Из этого и из (10), (11) следует, что разряды с $(c_1 j)$ -го по $(c_1(j+1) - 1)$ -й двоичной записи числа p_1 образуют двоичную запись числа u_j , а разряды с $(c_2 j)$ -го по $(c_2(j+1) - 1)$ -й двоичной записи числа p_2 — двоичную запись v_j , $0 \leq j < r$. В свою очередь соотношения (8) и (9) показывают, что двоичные записи чисел p_1 и p_2 имеют по $c_1 r$ и $c_2 r$ разрядов соответственно. Отсюда заключаем, что при любом натуральном t справедливы равенства

$$h_{c_1}(R(p_1, c_1 t)) = u_{\text{rm}(t, r)}, \quad (19)$$

$$h_{c_2}(R(p_2, c_2 t)) = v_{\text{rm}(t, r)}. \quad (20)$$

Используя определение функции Q и (12) замечаем, что

$$Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t) \leq x + 2p_2 t \leq x + 2p_2 t_0 < 2^{c_1}.$$

Следовательно, если $\text{rm}(t, r) \neq r - 1$, то

$$\begin{aligned} Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t) \wedge R(p_1, c_1 t) &= Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t) \wedge h_{c_1}(R(p_1, c_1 t)) \\ &= Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t) \wedge u_{\text{rm}(t, r)}. \end{aligned}$$

Из предположения индукции и из (14) следует, что

$$Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t) \wedge u_{\text{rm}(t, r)} = g(t) \wedge u_{\text{rm}(t, r)}.$$

Таким образом, если $\text{gm}(t, r) \neq r - 1$, то

$$Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t) \wedge R(p_1, c_1 t) = g(t) \wedge u_{\text{gm}(t, r)}. \quad (21)$$

Если $\text{gm}(t, r) = r - 1$, то

$$\begin{aligned} & h_{c_2}(Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t)) \wedge h_{c_2}(R(p_1, c_1 t)) \\ &= h_{c_2}(Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t)) \wedge h_{c_2}(h_{c_1}(R(p_1, c_1 t))) \\ &= g(t) \wedge h_{c_2}(u_{\text{gm}(t, r)}) = g(t) \wedge h_{c_2}(u_{r-1}) \\ &= g(t) \wedge h_{c_2}(2^{c_1} - 1) = g(t) \wedge (2^{c_2} - 1) \neq 0. \end{aligned}$$

Здесь первое равенство следует из (15), второе из предположения индукции и (19), третье из того, что $\text{gm}(t, r) = r - 1$, четвертое из (8), пятое из (15) и последнее неравенство из (17). Следовательно, если $\text{gm}(t, r) = r - 1$, то

$$Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t) \wedge R(p_1, c_1 t) \neq 0. \quad (22)$$

Таким образом, из (21), (22) и определения функции Q следует, что

$$\begin{aligned} & Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t + 1) \\ &= \begin{cases} Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t) + R(p_2, c_2 t), & \text{если } g(t) \wedge u_{\text{gm}(t, r)} = 0 \text{ и } \text{gm}(t, r) \neq r - 1, \\ Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t) & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Заметим, что если $\text{gm}(t, r) \neq r - 1$, то из свойства функции h_{c_2} , индуктивного предположения, (20) и (18) получаем, что

$$\begin{aligned} & h_{c_2}(Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t) + R(p_2, c_2 t)) \\ &= h_{c_2}(h_{c_2}(Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t)) + h_{c_2}(R(p_2, c_2 t))) \\ &= h_{c_2}(g(t) + v_{\text{gm}(t, r)}) = g(t) + v_{\text{gm}(t, r)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & h_{c_2}(Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t + 1)) \\ &= \begin{cases} g(t) + v_{\text{gm}(t, r)}, & \text{если } g(t) \wedge u_{\text{gm}(t, r)} = 0 \text{ и } \text{gm}(t, r) \neq r - 1, \\ g(t) & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$h_{c_2}(Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t + 1)) = g(t + 1).$$

Предложение 4 доказано.

6. Доказательство основной теоремы

Обозначим замыкание системы (1) через Φ . Заметим, что

$$0 = x \div x, \quad x + y = (x + 1) \cdot (y + 1) \div (xy + 1).$$

Следовательно, все полиномы с целыми коэффициентами, принимающие натуральные значения на наборах из натуральных чисел, принадлежат Φ .

Пусть $f(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{E}^2$. Тогда по следствию 2 из предложения 1 существует приведенная машина Минского M и полином $t(\tilde{y})$ с натуральными коэффициентами такие, что M вычисляет функцию f и для любого набора $\tilde{y}$ справедливо неравенство

$$T_M(\tilde{y}) \leq t(\tilde{y}).$$

Пусть M имеет k лент. Будем предполагать, что для любого $\tilde{y}$ выполнено неравенство $t(\tilde{y}) \geq 1$.

Далее, выберем натуральные числа w, r' так, чтобы для машины M выполнялись все условия следствия 3 из предложения 3. Пусть

$$m(\tilde{y}) = t(\tilde{y}) + \sum_{i=1}^n y_i.$$

Очевидно, что $m(\tilde{y}) \in \Phi$. Заметим, что на первых $t(\tilde{y})$ шагах работы машины Минского M на входном наборе $\tilde{y}$ головки будут находиться в клетках с номерами, не превосходящими $m(\tilde{y})$. Пусть

$$l(\tilde{y}) = [\log_2 m(\tilde{y})] + 1.$$

Тогда, очевидно, для любого $\tilde{y}$ справедливо неравенство $m(\tilde{y}) < 2^{l(\tilde{y})}$. Ясно, что если $(y'_1, \dots, y'_k; q')$ — некоторая конфигурация машины Минского M в момент времени $t' \leq t(\tilde{y})$, запущенной на входном наборе $\tilde{y}$ в момент 0, то $y'_1, \dots, y'_n < 2^{l(\tilde{y})}$. Тогда по следствию 3 из предложения 3 и замечания 1 к нему существуют функции $u_0(\tilde{y}), \dots, u_{r'-1}(\tilde{y}), v_0(\tilde{y}), \dots, v_{r'-1}(\tilde{y})$, представимые полиномами от $2^{l(\tilde{y})}$ с целыми коэффициентами такие, что для любого $\tilde{y}$, если σ есть $(w; l(\tilde{y}))$ -код начальной конфигурации $(y_1, \dots, y_n, 0, \dots, 0; 1)$ машины Минского M и если при $0 \leq i \leq r'$

$$f_{i,\tilde{y}}(\sigma) = \begin{cases} \sigma + v_i(\tilde{y}), & \text{если } \sigma \wedge u_i(\tilde{y}) = 0, \\ \sigma & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\phi_{\tilde{y}}(\sigma) = f_{r'-1,\tilde{y}}(f_{r'-2,\tilde{y}}(\dots f_{0,\tilde{y}}(\sigma) \dots))$$

и $\psi_{\tilde{y}}(\sigma)$ есть $t(\tilde{y})$ -кратная итерация $\phi_{\tilde{y}}(\phi_{\tilde{y}}(\dots \phi_{\tilde{y}}(\sigma) \dots))$, то $\psi_{\tilde{y}}(\sigma)$ есть $(w; l(\tilde{y}))$ -код конфигурации машины M в момент времени $t(\tilde{y})$, то есть код заключительной конфигурации. Здесь $\phi_{\tilde{y}}(\sigma)$ — преобразование кода конфигурации машины Минского M за один шаг.

Ясно, что

$$2^{l(\tilde{y})} = \min(2m(\tilde{y}), 2^{l(\tilde{y})}) \in \Phi.$$

Следовательно, $u_0(\tilde{y}), \dots, u_{r'-1}(\tilde{y}), v_0(\tilde{y}), \dots, v_{r'-1}(\tilde{y}) \in \Phi$.

Пусть

$$x(\tilde{y}) = (2^w + 1)(2^{l(\tilde{y})})^k + \sum_{i=1}^n (2^{l(\tilde{y})})^{i-1} y_i.$$

Ясно, что $x(\tilde{y})$ — $(w; l(\tilde{y}))$ -код начальной конфигурации $(y_1, y_2, \dots, y_n, 0, \dots, 0; 1)$ и $x(\tilde{y}) \in \Phi$.

Пусть

$$z(\tilde{y}) = \psi_{\tilde{y}}(x(\tilde{y})).$$

Далее, определим функции $u_{r'}(\tilde{y})$, $v_{r'}(\tilde{y})$, $p_1(\tilde{y})$, $p_2(\tilde{y})$, $c_1(\tilde{y})$, $c_2(\tilde{y})$, $t'(\tilde{y})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} t'(\tilde{y}) &= t(\tilde{y})(r' + 1), \\ c_2(\tilde{y}) &= \left[\log_2(x(\tilde{y}) + \sum_{i=0}^{r'-1} u_i(\tilde{y}) + t'(\tilde{y}) \sum_{i=0}^{r'-1} v_i(\tilde{y})) \right] + 1, \\ v_{r'}(\tilde{y}) &= 2^{c_2(\tilde{y})-1}, \\ p_2(\tilde{y}) &= \sum_{i=0}^{r'} (2^{c_2(\tilde{y})})^i v_i(\tilde{y}), \\ c_1(\tilde{y}) &= [\log_2(x(\tilde{y}) + 2t'(\tilde{y})p_2(\tilde{y}))] + 1, \\ u_{r'}(\tilde{y}) &= 2^{c_1(\tilde{y})} - 1, \\ p_1(\tilde{y}) &= \sum_{i=0}^{r'} (2^{c_1(\tilde{y})})^i u_i(\tilde{y}). \end{aligned}$$

Пусть, кроме того,

$$r = r' + 1, \quad f_{r-1, \tilde{y}}(\sigma) \equiv \sigma.$$

Тогда, очевидно, числа r , $u_0(\tilde{y})$, $u_1(\tilde{y})$, $\dots$, $u_{r-2}(\tilde{y})$, $v_0(\tilde{y})$, $v_1(\tilde{y})$, $\dots$, $v_{r-2}(\tilde{y})$, последовательность функций $f_{0, \tilde{y}}$, $f_{1, \tilde{y}}$, $\dots$, $f_{r-1, \tilde{y}}$, $f_{0, \tilde{y}}$, $f_{1, \tilde{y}}$, $\dots$, $f_{r-1, \tilde{y}}$, $\dots$ и числа $t'(\tilde{y})$, $p_1(\tilde{y})$, $p_2(\tilde{y})$, $c_1(\tilde{y})$, $c_2(\tilde{y})$, $x(\tilde{y})$, $u_{r-1}(\tilde{y})$, $v_{r-1}(\tilde{y})$ удовлетворяют условиям предложения 4. Следовательно,

$$z(\tilde{y}) = h_{c_2(\tilde{y})}(Q(x(\tilde{y}), p_1(\tilde{y}), p_2(\tilde{y}), c_1(\tilde{y}), c_2(\tilde{y}), t'(\tilde{y}))),$$

то есть,

$$z(\tilde{y}) = \text{rm}(Q(x(\tilde{y}), p_1(\tilde{y}), p_2(\tilde{y}), c_1(\tilde{y}), c_2(\tilde{y}), t'(\tilde{y})), 2^{c_2(\tilde{y})}).$$

Ясно, что $c_1(\tilde{y}), c_2(\tilde{y}) \in \Phi$. Кроме того,

$$\begin{aligned} 2^{c_2(\tilde{y})} &= \min \left(2 \left(x(\tilde{y}) + \sum_{i=0}^{r-1} u_i(\tilde{y}) + t'(\tilde{y}) \sum_{i=0}^{r-1} v_i(\tilde{y}) \right), 2^{c_2(\tilde{y})} \right), \\ 2^{c_1(\tilde{y})} &= \min(2(x(\tilde{y}) + 2t'(\tilde{y})p_2(\tilde{y})), 2^{c_1(\tilde{y})}), \end{aligned}$$

поэтому $2^{c_1(\tilde{y})}, 2^{c_2(\tilde{y})} \in \Phi$. Следовательно, $p_1(\tilde{y}), p_2(\tilde{y}), u_{r'}(\tilde{y}), v_{r'}(\tilde{y}) \in \Phi$. Поскольку $z(\tilde{y})$ есть $(w; l(\tilde{y}))$ -код заключительной конфигурации машины Минского M , справедливо равенство

$$f(\tilde{y}) = \text{rm}(z(\tilde{y}), 2^{l(\tilde{y})}).$$

Заметим, что

$$h(x, \tilde{y}) = \text{rm}(\text{rm}(x, 2^{c_2(\tilde{y})}), 2^{l(\tilde{y})}) \in \Phi$$

и

$$f(\tilde{y}) = h(Q(x(\tilde{y}), p_1(\tilde{y}), p_2(\tilde{y}), c_1(\tilde{y}), c_2(\tilde{y}), t'(\tilde{y})), \tilde{y}).$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Гжегорчик А., Некоторые классы рекурсивных функций. В кн.: *Проблемы математической логики*. Мир, Москва, 1970, с. 9–49.
2. Мальцев А. И., *Алгоритмы и рекурсивные функции*. Наука, Москва, 1986.
3. Марченков С. С., Базисы по суперпозиции в классах рекурсивных функций. *Матем. вопросы кибернетики*. (1991) 3, 115–139.
4. Марченков С. С., Об ограниченных рекурсиях. *Mathematica Balkanica* (1972) 2, 124–142.
5. Марченков С. С., Об одном базисе по суперпозиции в классе функций, элементарных по Кальмару. *Матем. заметки* (1980) 27, №3, 321–332.
6. Марченков С. С., Простые примеры базисов по суперпозиции в классе функций, элементарных по Кальмару. *Vanach Center Publ.* (1989) 25, 119–126.
7. Марченков С. С., *Элементарные рекурсивные функции*. МЦНМО, Москва, 2003.
8. Минский М., *Вычисления и автоматы*. Мир, Москва, 1971.

Статья поступила 21.04.2005.