Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Шабунин, Примеры α -полных систем k -значной логики при $k = 3, 4$, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 4, 45–55

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm72>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 18:32:28

Примеры α -полных систем k -значной логики при $k = 3, 4$

© 2006 г. А. Л. Шабунин

В статье доказывается α -полнота конечных систем функций k -значной логики при $k = 3, 4$, содержащих все подстановки из симметрической группы S_k подстановок множества $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, операцию сложения по модулю k и еще k фиксированных бинарных операций. Этот результат затем распространяется на некоторые другие системы функций, получающиеся из указанных заменой операции сложения на квазигрупповую операцию.

Пусть P_k — множество всех функций k -значной логики, X — множество символов переменных со значениями из $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, $P_k(n)$ — множество всех функций из P_k , зависящих от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Следуя М. М. Глухову [1], определим индуктивно понятие α -формулы над непустым классом $F \subseteq P_k$ как выражения вида $f(\varphi, x_{i_1}, \dots, x_{i_s})$, где $f(x_1, \dots, x_{s+1})$ — обозначение функции из F , φ — символ переменной или α -формула над F , а $x_{i_1}, \dots, x_{i_s} \in X$. Множество всех функций из P_k , реализуемых (представимых) α -формулами над F , называется α -пополнением (α -замыканием) множества F и обозначается через $[F]_\alpha$. При построении α -формул используется ограниченная суперпозиция: α -формула может подставляться в $f(x_1, \dots, x_{s+1})$ только вместо x_1 . Такие суперпозиции называются α -суперпозициями. Если $[F]_\alpha = P_k$, то F называется α -полной системой; α -полная система функций F называется α -базисом P_k , если $F \setminus \{f\}$ уже не является α -полной при любой $f \in F$. В [1] доказано, что α -полной при $k \geq 7$ является любая система функций из P_k , содержащая все подстановки из симметрической группы S_k подстановок множества E_k и одну любую квазигрупповую функцию. В [2] приведены условия α -полноты систем функций k -значной логики, состоящих из функций, у которых все одноместные подфункции, полученные произвольной фиксацией всех переменных, кроме первой, являются подстановками; для $k \geq 5$ построены α -полные системы из двух бинарных операций с правым сокращением, а для $k = 2$ доказано отсутствие конечных α -полных систем. Там же доказано, что при любом k в P_k отсутствуют α -полные системы, состоящие из одной функции.

В настоящей статье рассматриваются случаи $k = 3, 4$. Доказывается, что при этих значениях k система функций k -значной логики, содержащая все подстановки множества E_k , операцию сложения по модулю k и k бинарных операций, определенных ниже, α -полна. Этот результат затем распространяется на другие системы функций, содержащие все подстановки множества E_k , одну квазигрупповую операцию и упомянутые k бинарные операции.

Далее, если не оговорено противное, символы $+$, $-$ и $\cdot$ обозначают операции сложения, вычитания и умножения по модулю k , определенные на множестве E_k .

Рассмотрим сначала случай $k = 4$.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$[x_1 + x_2]_\alpha = [x_1 + x_2, x_1 - x_2]_\alpha.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что функция $x_1 - x_2$ представляется α -формулой $((x_1 + x_2) + x_2) + x_2$ над системой $\{x_1 + x_2\}$.

Определим на множестве E_4 бинарные операции $\circ_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, полагая $1 \circ_0 2 = 3$, $3 \circ_0 2 = 1$, $1 \circ_1 3 = 3$, $3 \circ_1 3 = 1$, $1 \circ_2 0 = 3$, $3 \circ_2 0 = 1$, $1 \circ_3 1 = 3$, $3 \circ_3 1 = 1$ и $a \circ_i b = a$ в остальных случаях.

Операции $\circ_i$ являются операциями с правым сокращением, то есть удовлетворяют условию

$$a \circ_i c = b \circ_i c \implies a = b.$$

Поэтому для них определены правые обратные операции $/_i$, где

$$a /_i b = c \iff a = c \circ_i b.$$

Легко проверить, что в нашем случае $x /_i y = x \circ_i y$.

Пусть

$$T = S_4 \cup \{+, \circ_0, \circ_1, \circ_2, \circ_3\}.$$

Условимся в виде fh записывать суперпозицию $h(f)$ для $f \in P_4$ и $h \in S_4$. Операцию + будем иногда обозначать символом $\circ_4$, а (правую) обратную к ней операцию вычитания — символом $/_4$. Справедливы равенства

$$x \circ_4 y = x + y, \quad x /_4 y = x - y = ((x + y) + y) + y.$$

Поэтому любая α -формула над T будет иметь вид

$$(\dots (x_{i_1} h_1 \circ_{j_2} x_{i_2}) h_2 \dots \circ_{j_l} x_{i_l}) h_l, \quad (1)$$

где $x_{i_1}, \dots, x_{i_l} \in X$, $h_1, \dots, h_l \in S_4$, $j_2, \dots, j_l \in \{0, \dots, 4\}$.

В дальнейшем α -формулы над T будем называть просто α -формулами. Для α -формулы Φ и переменной x выражение $\Phi - x$ обозначает α -формулу

$$((\Phi + x) + x) + x.$$

Пусть α -формула Φ имеет вид (1) и переменная z отлична от переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$. Положим

$$\Phi^{-1}(z) = z \Phi^{-1} = ((\dots (zh_l^{-1} /_{j_l} x_{i_l}) h_{l-1}^{-1} /_{j_{l-1}} x_{i_{l-1}} \dots) h_2^{-1} /_{j_2} x_{i_2}) h_1^{-1} - x_{i_1}.$$

Если Ψ — произвольная α -формула, то запись $\Psi \Phi^{-1}$ обозначает α -формулу

$$((\dots (\Psi h_l^{-1} /_{j_l} x_{i_l}) h_{l-1}^{-1} /_{j_{l-1}} x_{i_{l-1}} \dots) h_2^{-1} /_{j_2} x_{i_2}) h_1^{-1} - x_{i_1},$$

являющуюся результатом подстановки α -формулы Ψ вместо переменной z в α -формулу $\Phi^{-1}(z)$.

Лемма 2. *Для любой α -формулы Φ на множестве E_4 выполняется тождество*

$$\Phi \Phi^{-1} = 0.$$

Доказательство. Пусть α -формула Φ имеет вид (1). Тогда

$$\begin{aligned}\Phi\Phi^{-1} &= (((((x_{i_1}h_1 \circ_{j_2} x_{i_2})h_2 \dots \circ_{j_l} x_{i_l})h_l)h_l^{-1}/_{j_l} x_{i_l})h_{l-1}^{-1}/_{j_{l-1}} x_{i_{l-1}} \dots)h_2^{-1}/_{j_2} x_{i_2})h_1^{-1} - x_{i_1} \\ &= (((x_{i_1}h_1 \circ_{j_2} x_{i_2})h_2)h_2^{-1}/_{j_2} x_{i_2})h_1^{-1} - x_{i_1} = x_{i_1} - x_{i_1} = 0.\end{aligned}$$

Подстановки из S_4 будем записывать в виде циклов (транспозиций) или произведений (независимых) циклов. Подстановки умножаем слева направо в соответствии с правилом $(h_i h_j)(x) = h_j(h_i(x))$. Для функции f из $P_4(1)$ запись $f = [abcd]$ означает, что $f(0) = a$, $f(1) = b$, $f(2) = c$, $f(3) = d$.

Лемма 3. Все одноместные функции из P_4 реализуются α -формулами над T .

Доказательство. Покажем, что для каждой функции f из $P_4(1)$ существует α -формула Φ , которая реализует эту функцию. Для уменьшения числа проверок воспользуемся следующим замечанием. Две функции f и g из $P_4(1)$ назовем однотипными, если для некоторой подстановки h из S_4 выполняется равенство

$$f(x) = h(g(x))$$

для любого $x \in E_4$. Ясно, что если одна из двух однотипных функций реализуется α -формулой над T , то и другая функция реализуется α -формулой над T . С учетом этого замечания достаточно построить α -формулы для следующих 14 попарно неоднотипных функций:

$$\begin{aligned}f_0 &= [0000], & f_1 &= [0031], & f_2 &= [1310], & f_3 &= [0310], & f_4 &= [0332], \\ f_5 &= [2131], & f_6 &= [0211], & f_7 &= [2223], & f_8 &= [1121], & f_9 &= [0100], \\ f_{10} &= [3222], & f_{11} &= [0011], & f_{12} &= [0202], & f_{13} &= [0330].\end{aligned}$$

Определим подстановки из S_4 :

$$\begin{aligned}h_0 &= (13), & h_1 &= (132), & h_2 &= (12), & h_3 &= (021), & h_4 &= (123), \\ h_5 &= (0132), & h_6 &= (23), & h_7 &= (031), & h_8 &= (013), & h_9 &= (03).\end{aligned}$$

Легко проверить, что функция f_i реализуется α -формулой Φ_i , $i = 0, 1, \dots, 13$, где

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= xh_0 + x, & \Phi_1 &= xh_1 + x, & \Phi_2 &= (xh_3 + x)h_2 + x, \\ \Phi_3 &= xh_4 + x, & \Phi_4 &= xh_2 + x, & \Phi_5 &= (xh_5 + x)h_2 + x, \\ \Phi_6 &= xh_6 + x, & \Phi_7 &= (xh_7 + x)h_6 + x, & \Phi_8 &= (xh_8 + x)h_6 + x, \\ \Phi_9 &= (xh_1 + x)h_6 + x, & \Phi_{10} &= (xh_9 + x)h_2 + x, & \Phi_{11} &= (xh_2 + x)h_6 + x, \\ \Phi_{12} &= x + x, & \Phi_{13} &= (xh_6 + x) + x.\end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Через $\text{Var}(\Phi)$ обозначим множество всех переменных, входящих в α -формулу Φ . Запись $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ означает, что $\text{Var}(\Phi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$. Значение α -формулы $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ при значении переменных $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$, где $a_1, \dots, a_n \in E_4$, обозначим через $\Phi[(x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n)]$ или, короче, $\Phi(a_1, \dots, a_n)$.

Теорема 1. Система функций T α -полна, то есть

$$[T]_\alpha = P_4. \quad (2)$$

Доказательство. Достаточно доказать включение

$$f(x_1, \dots, x_n) \in [T]_\alpha \quad (3)$$

для любой функции $f \in P_4$. Утверждение (3) докажем индукцией по n .

При $n = 1$ утверждение (3) верно в силу леммы 3. Допустим, что оно верно для всех $n < m$ и докажем его для $n = m$.

Следуя [1], покажем, что $[T]_\alpha$ содержит функции

$$\psi_{a_1, \dots, a_m, b}(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} b, & \text{если } (x_1, \dots, x_m) = (a_1, \dots, a_m), \\ 0, & \text{если } (x_1, \dots, x_m) \neq (a_1, \dots, a_m) \end{cases} \quad (4)$$

при любых $a_1, \dots, a_m, b \in E_4$, $b \neq 0$.

Пусть $a_1, \dots, a_m \in E_4$. Обозначим a_m через i . Возьмем

$$j = \begin{cases} 0, & \text{если } i \text{ нечетно,} \\ 1, & \text{если } i \text{ четно.} \end{cases}$$

Легко видеть, что $i \neq j$ и $2i \neq 2j$. Напомним, что элементы из E_4 мы умножаем (складываем, вычитаем) по модулю 4. Таким образом, $2i \in E_4$ при любом $i \in E_4$.

Положим

$$a = 0, \quad b = i - j, \quad c = 2, \quad d = j - i.$$

Справедливы вхождения $a, b, c, d \in E_4$.

Из таблицы

i	j	a	b	c	d	$j - b$
0	1	0	3	2	1	2
1	0	0	1	2	3	3
2	1	0	1	2	3	0
3	0	0	3	2	1	1

видно, что элементы a, b, c, d попарно различны при любом i , так что $E_4 = \{a, b, c, d\}$.

Возьмем функцию

$$f_1(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} a, & \text{если } (x_1, \dots, x_{m-1}) = (a_1, \dots, a_{m-1}), \\ b, & \text{если } (x_1, \dots, x_{m-1}) \neq (a_1, \dots, a_{m-1}), \end{cases}$$

не зависящую существенно от x_m . По предположению индукции $f_1 \in [T]_\alpha$. Пусть функция f_1 представляется α -формулой

$$\Phi_1 = (\dots (x_{i_1} h_1 \circ_{j_2} x_{i_2}) h_2 \dots \circ_{j_l} x_{i_l}) h_l,$$

где $x_{i_1}, \dots, x_{i_l} \in \{x_1, \dots, x_{m-1}\}$, $h_1, \dots, h_l \in S_4$, $j_2, \dots, j_l \in \{0, 1, \dots, 4\}$.

В силу леммы 2 справедливо тождество

$$((\dots (\Phi_1 h_l^{-1} /_{j_l} x_{i_l}) h_{l-1}^{-1} /_{j_{l-1}} x_{i_{l-1}} \dots) h_2^{-1} /_{j_2} x_{i_2}) h_1^{-1} - x_{i_1} = 0. \quad (5)$$

Определим подстановки $\tau_1 = (i, j)$, $\tau_2 = (c, d)$ и рассмотрим функцию $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, представимую α -формулой

$$\Phi = (((\Phi_1 + x_m) \tau_1 - x_m) \tau_2 + x_m) \tau_1 - x_m.$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned}\varphi(a_1, \dots, a_m) &= \varphi(a_1, \dots, a_{m-1}, i) \\ &= (((a + i)\tau_1 - i)\tau_2 + i)\tau_1 - i = ((i\tau_1 - i)\tau_2 + i)\tau_1 - i \\ &= ((j - i)\tau_2 + i)\tau_1 - i = (c + i)\tau_1 - i = c + i - i = c.\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\varphi(a_1, \dots, a_{m-1}, j) &= (((a + j)\tau_1 - j)\tau_2 + j)\tau_1 - j \\ &= ((i - j)\tau_2 + j)\tau_1 - j = (i - j + j)\tau_1 - j = j - j = 0 = a.\end{aligned}$$

Пусть $l \neq i, j$. Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(a_1, \dots, a_{m-1}, l) &= (((a + l)\tau_1 - l)\tau_2 + l)\tau_1 - l \\ &= ((l - l)\tau_2 + l)\tau_1 - l = l\tau_1 - l = l - l = 0 = a.\end{aligned}$$

Пусть $(b_1, \dots, b_{m-1}) \neq (a_1, \dots, a_{m-1})$, $l \in E_4$. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $b + l = i$. Тогда $l = i - b = j$.

Справедливы равенства

$$\begin{aligned}\varphi(b_1, \dots, b_{m-1}, l) &= \varphi(b_1, \dots, b_{m-1}, j) \\ &= (((b + j)\tau_1 - j)\tau_2 + j)\tau_1 - j \\ &= ((j - j)\tau_2 + j)\tau_1 - j = j\tau_1 - j = i - j = b.\end{aligned}$$

2. Пусть $b + l = j$. В этом случае $l = j - b$ и $d + l = 2i + 3j \notin \{i, j\}$.

Справедливы равенства

$$\begin{aligned}\varphi(b_1, \dots, b_{m-1}, l) &= (((b + l)\tau_1 - l)\tau_2 + l)\tau_1 - l = ((i - l)\tau_2 + l)\tau_1 - l \\ &= (c\tau_2 + l)\tau_1 - l = (d + l)\tau_1 - l = d + l - l = d.\end{aligned}$$

3. Пусть $b + l \neq i, j$. Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(b_1, \dots, b_{m-1}, l) &= (((b + l)\tau_1 - l)\tau_2 + l)\tau_1 - l \\ &= ((b + l - l)\tau_2 + l)\tau_1 - l = (b + l)\tau_1 - l = b + l - l = b.\end{aligned}$$

Таким образом, $\varphi \in [T]_\alpha$ и

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} c, & \text{если } (x_1, \dots, x_m) = (a_1, \dots, a_m), \\ a, & \text{если } (x_1, \dots, x_{m-1}) = (a_1, \dots, a_{m-1}) \text{ и } x_m \neq a_m, \\ b, & \text{если } (x_1, \dots, x_{m-1}) \neq (a_1, \dots, a_{m-1}) \text{ и } x_m \neq j - b, \\ d, & \text{если } (x_1, \dots, x_{m-1}) \neq (a_1, \dots, a_{m-1}) \text{ и } x_m = j - b. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(x_1, \dots, x_m) = \varphi(x_1, \dots, x_m) \circ_i x_m.$$

Ясно, что $\psi \in [T]_\alpha$. Покажем, что для ψ выполняется соотношение

$$\psi(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} c, & \text{если } (x_1, \dots, x_m) = (a_1, \dots, a_m), \\ f_1(x_1, \dots, x_m) & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (6)$$

Действительно, пусть $i = 0$ ($i = a_m$). Тогда $j - b = 2$, $a = 0$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 1$. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} c \circ_0 i &= c, & a \circ_0 l &= a, & l &\neq i, \\ d \circ_0 (j - b) &= 1 \circ_0 2 = 3 = b, \\ b \circ_0 l &= 3 \circ_0 l = 3 = b, & l &\neq j - b. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\psi(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} c, & \text{если } (x_1, \dots, x_m) = (a_1, \dots, a_m), \\ a, & \text{если } (x_1, \dots, x_{m-1}) = (a_1, \dots, a_{m-1}) \text{ и } x_m \neq a_m, \\ b, & \text{если } (x_1, \dots, x_{m-1}) \neq (a_1, \dots, a_{m-1}). \end{cases}$$

Таким образом, соотношение (6) верно, когда $i = 0$.

Случаи $i = 1, 2, 3$ проверяются аналогично.

Пусть $\Psi(x_1, \dots, x_m)$ — α -формула, реализующая функцию ψ . Рассмотрим α -формулу

$$\Delta = \Psi \Phi_1^{-1} = ((\dots (\Psi h_l^{-1}/j_l x_{i_l}) h_{l-1}^{-1}/j_{l-1} x_{i_{l-1}} \dots) h_2^{-1}/j_2 x_{i_2}) h_1^{-1} - x_{i_1},$$

где $h_1^{-1}, \dots, h_l^{-1}, x_{i_1}, \dots, x_{i_l}, j_2, \dots, j_l$ взяты из тождества (5).

Ясно, что

$$\Delta(a_1, \dots, a_m) = ((\dots (c h_l^{-1}/j_l a_{i_l}) \dots) h_2^{-1}/j_2 a_{i_2}) h_1^{-1} - a_{i_1} = c_1$$

для некоторого $c_1 \in E_4$. Пусть $l \neq a_m$. Ввиду (5)

$$\begin{aligned} \Delta(a_1, \dots, a_{m-1}, l) &= ((\dots (a h_l^{-1}/j_l a_{i_l}) \dots) h_2^{-1}/j_2 a_{i_2}) h_1^{-1} - a_{i_1} \\ &= ((\dots (0 h_l^{-1}/j_l a_{i_l}) \dots) h_2^{-1}/j_2 a_{i_2}) h_1^{-1} - a_{i_1} = 0. \end{aligned}$$

Отображение

$$x \mapsto ((\dots (x h_l^{-1}/j_l a_{i_l}) \dots) h_2^{-1}/j_2 a_{i_2}) h_1^{-1} - a_{i_1}$$

биективно на E_4 . Поэтому $c_1 \neq 0$.

Пусть $(b_1, \dots, b_{m-1}) \neq (a_1, \dots, a_{m-1})$. Учитывая (5), получаем, что

$$\Delta(b_1, \dots, b_m) = ((\dots (b h_l^{-1}/j_l b_{i_l}) \dots) h_2^{-1}/j_2 b_{i_2}) h_1^{-1} - b_{i_1} = 0.$$

Таким образом, α -формула Δ реализует функцию $\psi_{a_1, \dots, a_m, c_1}$, то есть

$$\psi_{a_1, \dots, a_m, c_1} \in [T]_\alpha.$$

Поскольку $[T]_\alpha$ содержит все функции вида $h(\psi_{a_1, \dots, a_m, c_1})$, где $h \in S_4$, множество $[T]_\alpha$ содержит и все функции вида (4).

С помощью функций вида $\psi_{a_1, \dots, a_m, b}$ можно (см. [1]) из любой одной функции $f(x_1, \dots, x_m) \in [T]_\alpha$ построить любую функцию $\varphi(x_1, \dots, x_m) \in P_4$, не выходя из класса $[T]_\alpha$. Действительно, если функция f представляется α -формулой

$$((\dots (x_{j_1} g_1 \circ_{i_2} x_{j_2}) g_2 \circ_{i_3} \dots) g_{t-1} \circ_{i_t} x_{j_t}) g_t,$$

то функция

$$((\dots ((\psi_{a_1, \dots, a_m, b} + x_{j_1}) g_1 \circ_{i_2} x_{j_2}) g_2 \circ_{i_3} \dots) g_{t-1} \circ_{i_t} x_{j_t}) g_t$$

содержится в $[T]_\alpha$ и отличается от f лишь в точке $(a_1, \dots, a_m)$, в которой при подходящем b ($b \neq 0$) принимает любое значение, отличное от $f(a_1, \dots, a_m)$. Это вытекает из того, что отображение

$$\sigma: x \mapsto ((\dots((x + a_{j_1})g_1 \circ_{i_2} a_{j_2})g_2 \circ_{i_3} \dots)g_{t-1} \circ_{i_t} a_{j_t})g_t$$

биективно на множестве E_4 и $\sigma(0) = f(a_1, \dots, a_m)$.

Изменив таким образом значение функции f в нужном числе точек на подходящие элементы из E_4 , мы сможем получить любую функцию от m переменных из P_4 . Следовательно, включение (3) верно для $n = m$.

Теорема 1 доказана.

Обозначим через $\mu(f)$ арность операции $f \in P_k$. Говорят, что алгебры

$$A = (E_k, \{f_i \mid i \in I\}), \quad B = (E_k, \{g_i \mid i \in I\})$$

имеют один и тот же тип $\tau = \{n_i \mid i \in I\}$ (являются однотипными), если

$$\mu(f_i) = \mu(g_i) = n_i$$

для всех $i \in I$. При этом операции f_i и g_i , отвечающие одному и тому же индексу $i \in I$, называются одноименными.

Лемма 4. Пусть φ — изоморфизм алгебры $A = (E_k, \{f_i \mid i \in I\})$ на однотипную алгебру $B = (E_k, \{g_i \mid i \in I\})$, $F = \{f_i \mid i \in I\}$, $G = \{g_i \mid i \in I\}$. Тогда

$$f(x_1, \dots, x_n) \in [F]_\alpha \iff \varphi(f(\varphi^{-1}(x_1), \dots, \varphi^{-1}(x_n))) \in [G]_\alpha$$

для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k .

Доказательство. Для записи α -формул над F будем использовать сигнатуру $\{f_i \mid i \in I\}$, а для записи α -формул над G — сигнатуру $\{g_i \mid i \in I\}$. Если нужно подчеркнуть различие между функцией f_i из F и соответствующим ей функциональным символом f_i , то функцию f_i будем обозначать через f_i^A .

Пусть Φ — произвольная α -формула над F . Через Φ^* обозначим α -формулу над G , которая получается из Φ заменой символов f_i на соответствующие им символы g_i , $i \in I$. Формулу Φ^* назовем переводом формулы Φ .

Отображение φ является подстановкой на множестве E_k и

$$\varphi(f_i^A(a_1, \dots, a_{n_i})) = g_i^B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_{n_i}))$$

для всех $a_1, \dots, a_{n_i}$ из E_k и для всех i из I ($n_i = \mu(f_i)$). Индукцией по построению α -формулы над F устанавливается равенство

$$\varphi(\Phi(a_1, \dots, a_n)) = \Phi^*(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$$

для всех $a_1, \dots, a_n$ из E_k . Отсюда

$$\begin{aligned} \Phi(a_1, \dots, a_n) &= \varphi^{-1}(\Phi^*(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))), \\ \Phi^*(a_1, \dots, a_n) &= \varphi(\Phi(\varphi^{-1}(a_1), \dots, \varphi^{-1}(a_n))). \end{aligned}$$

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in [F]_\alpha$ и $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ — α -формула над F , реализующая f . Перевод $\Phi^*(x_1, \dots, x_n)$ формулы Φ является α -формулой над G и реализует некоторую функцию $g(x_1, \dots, x_n)$. Для всех $a_1, \dots, a_n$ из E_k

$$\begin{aligned} g(a_1, \dots, a_n) &= \Phi^*(a_1, \dots, a_n) = \varphi(\Phi(\varphi^{-1}(a_1), \dots, \varphi^{-1}(a_n))) \\ &= \varphi(f(\varphi^{-1}(a_1), \dots, \varphi^{-1}(a_n))). \end{aligned}$$

Это означает, что

$$g(x_1, \dots, x_n) = \varphi(f(\varphi^{-1}(x_1), \dots, \varphi^{-1}(x_n)))$$

и $\varphi(f(\varphi^{-1}(x_1), \dots, \varphi^{-1}(x_n))) \in [G]_\alpha$.

Пусть теперь $\varphi(f(\varphi^{-1}(x_1), \dots, \varphi^{-1}(x_n))) \in [G]_\alpha$ и $\Psi(x_1, \dots, x_n)$ — α -формула над G , реализующая функцию

$$g(x_1, \dots, x_n) = \varphi(f(\varphi^{-1}(x_1), \dots, \varphi^{-1}(x_n))).$$

Формула Ψ является переводом некоторой α -формулы $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ над F , то есть $\Psi = \Phi^*$. Для функции $f_1(x_1, \dots, x_n)$, реализуемой α -формулой Φ над F ,

$$\begin{aligned} f_1(a_1, \dots, a_n) &= \Phi(a_1, \dots, a_n) = \varphi^{-1}(\Phi^*(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))) \\ &= \varphi^{-1}(\Psi(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))) = \varphi^{-1}(g(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(f(\varphi^{-1}(\varphi(a_1)), \dots, \varphi^{-1}(\varphi(a_n)))) = f(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

для всех $a_1, \dots, a_n$ из E_k . Следовательно, $f(x_1, \dots, x_n)$ реализуется α -формулой $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ и $f(x_1, \dots, x_n) \in [F]_\alpha$. Лемма 4 доказана.

Из леммы 4 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Если однотипные алгебры $A = (E_k, \{f_i \mid i \in I\})$ и $B = (E_k, \{g_i \mid i \in I\})$ изоморфны, то система функций $F = \{f_i \mid i \in I\}$ α -полна тогда и только тогда, когда α -полна система функций $G = \{g_i \mid i \in I\}$, то есть

$$[F]_\alpha = P_k \iff [G]_\alpha = P_k.$$

Согласно [1] для любой квазигруппы $(E_4, \cdot)$ может быть построена изотопная ей лупа $(E_4, \circ)$ с нейтральным элементом 0 и такая, что

$$[x_1 x_2, S_4]_\alpha = [x_1 \circ x_2, S_4]_\alpha.$$

При этом операция $\circ$ определяется α -формулой вида

$$x \circ y = (x h_1 \cdot y) h_2,$$

где $h_1, h_2 \in S_4$. Если операция $\cdot$ имеет таблицу Кэли

$\cdot$	0	1	2	3
0	a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}
1	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
2	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
3	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}

(7)

то

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ i_0 & i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где i_0 определяется из условия $a_{i_0,0} = 0$, а i_1, i_2, i_3 — из условий $a_{i_1,0} = a_{i_0,1}$, $a_{i_2,0} = a_{i_0,2}$, $a_{i_3,0} = a_{i_0,3}$ соответственно.

Подстановка h_2 задается равенством

$$h_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{i_0,1} & a_{i_0,2} & a_{i_0,3} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Таблица Кэли для операции $\circ$ имеет вид

$$\begin{array}{c|cccc} \circ & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 2 & 2 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 3 & 3 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array} \quad (10)$$

С помощью подстановки h_1 происходит перестановка строк во внутренней части таблицы (7), а с помощью подстановки h_2 — переименование элементов.

На множестве E_4 можно задать всего четыре лупы с таблицей Кэли вида (10):

$$\begin{array}{l} L1: \begin{array}{c|cccc} + & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} L2: \begin{array}{c|cccc} \oplus & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} L3: \begin{array}{c|cccc} \circ & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} L4: \begin{array}{c|cccc} * & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \end{array}$$

Все эти лупы являются коммутативными и ассоциативными лупами, то есть абелевыми группами. Группы $(E_4, +)$, $(E_4, \circ)$, $(E_4, *)$ — циклические группы, изоморфные группе Z_4 , а группа $(E_4, \oplus)$ — элементарная 2-группа, изоморфная прямой сумме $Z_2 + Z_2$.

Согласно [1] для группы $(E_4, \oplus)$ система функций $T_2 = S_4 \cup \{x_1 \oplus x_2\}$ не является α -полной. Вопрос об α -полноте системы

$$T'_2 = S_4 \cup \{\oplus, \circ_0, \circ_1, \circ_2, \circ_3\}$$

остается открытым. Известно лишь, что все одноместные функции представимы α -формулами над T'_2 .

Занумеруем подстановки из S_4 произвольным образом. Получим

$$S_4 = \{h_i \mid i \in I\},$$

где $I = \{1, 2, \dots, 24\}$. Подстановка $\varphi = (12)$ является изоморфизмом группы $(E_4, +)$ на группу $(E_4, \circ)$, а подстановка $\psi = (23)$ — изоморфизмом группы $(E_4, +)$ на группу $(E_4, *)$. Положим

$$\begin{aligned} h_i^B &= \varphi^{-1} h_i \varphi, & i &\in I, \\ x \circ_j^B y &= \varphi(\varphi^{-1} x \circ_j \varphi^{-1} y), & j &\in \{0, 1, 2, 3\}, \\ h_i^C &= \psi^{-1} h_i \psi, & i &\in I, \\ x \circ_j^C y &= \psi(\psi^{-1} x \circ_j \psi^{-1} y), & j &\in \{0, 1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Тогда φ — изоморфизм алгебры

$$A = (E_4, +, \{h_i \mid i \in I\}, \{\circ_j \mid j \in \{0, 1, 2, 3\}\})$$

на алгебру

$$B = (E_4, \circ, \{h_i^B \mid i \in I\}, \{\circ_j^B \mid j \in \{0, 1, 2, 3\}\}),$$

а ψ — изоморфизм алгебры A на алгебру

$$C = (E_4, *, \{h_i^C \mid i \in I\}, \{\circ_j^C \mid j \in \{0, 1, 2, 3\}\}).$$

Лемма 5. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned} [S_4 \cup \{\circ_0, \circ_1, \circ_2, \circ_3\}]_\alpha &= [S_4 \cup \{\circ_0^B, \circ_1^B, \circ_2^B, \circ_3^B\}]_\alpha, \\ [S_4 \cup \{\circ_0, \circ_1, \circ_2, \circ_3\}]_\alpha &= [S_4 \cup \{\circ_0^C, \circ_1^C, \circ_2^C, \circ_3^C\}]_\alpha. \end{aligned}$$

Доказательство. Легко видеть, что верны тождества

$$\begin{aligned} x \circ_0 \varphi(y) &= x \circ_3 y, & x \circ_1 \varphi(y) &= x \circ_1 y, \\ x \circ_2 \varphi(y) &= x \circ_2 y, & x \circ_3 \varphi(y) &= x \circ_0 y. \end{aligned}$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} x \circ_0^B y &= (x \varphi \circ_0 y \varphi) \varphi = (x \varphi \circ_3 y) \varphi, \\ x \circ_3^B y &= (x \varphi \circ_3 y \varphi) \varphi = (x \varphi \circ_0 y) \varphi, \\ x \circ_j^B y &= (x \varphi \circ_j y \varphi) \varphi = (x \varphi \circ_j y) \varphi, \end{aligned}$$

если $j = 1, 2$. Во всех случаях операция $\circ_j^B$, $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, представима α -формулой над $S_4 \cup \{\circ_0, \circ_1, \circ_2, \circ_3\}$. Очевидно, что верно и обратное: каждая операция $\circ_j$ реализуется α -формулой над системой $S_4 \cup \{\circ_0^B, \circ_1^B, \circ_2^B, \circ_3^B\}$. Первое равенство доказано. Второе равенство доказывается аналогично с заменой φ на ψ .

Из леммы 5 и теоремы 2 получаем α -полноту систем функций

$$T_3 = S_4 \cup \{\circ, \circ_0, \circ_1, \circ_2, \circ_3\}, \quad T_4 = S_4 \cup \{*, \circ_0, \circ_1, \circ_2, \circ_3\},$$

где $\circ$ и $*$ — бинарные операции с таблицами $L3$ и $L4$ соответственно.

Теорема 3. Если $(E_4, \cdot)$ — произвольная квазигруппа, изотопная циклической группе Z_4 , то система функций $S_4 \cup \{\cdot, \circ_0, \circ_1, \circ_2, \circ_3\}$ является α -полной.

Доказательство. Пусть квазигруппа $(E_4, \cdot)$ имеет таблицу Кэли (7). Используя подстановки (8) и (9), построим изотопную лупу $(E_4, \diamond)$ с нейтральным элементом 0 и операцией

$$x \diamond y = (xh_1 \cdot y)h_2. \quad (11)$$

Лупа $(E_4, \diamond)$ изотопна группе Z_4 . По теореме Алберта (см. [3], с. 17) лупа $(E_4, \diamond)$ является группой, изоморфной группе Z_4 . Поэтому операция $\diamond$ совпадает с одной из операций, которые задаются таблицами $L1, L3, L4$. Отсюда следует α -полнота системы функций $S_4 \cup \{\diamond, \circ_0, \circ_1, \circ_2, \circ_3\}$. В силу (11)

$$[S_4 \cup \{\cdot, \circ_0, \circ_1, \circ_2, \circ_3\}]_\alpha = [S_4 \cup \{\diamond, \circ_0, \circ_1, \circ_2, \circ_3\}]_\alpha = P_4.$$

Теорема 3 доказана.

Перейдем теперь к случаю $k = 3$. Определим на множестве E_3 бинарные операции $\circ_i, i = 0, 1, 2$, полагая

$$\begin{aligned} 1 \circ_0 1 &= 2, & 2 \circ_0 1 &= 1, & 0 \circ_0 2 &= 2, & 2 \circ_0 2 &= 0, \\ 0 \circ_1 0 &= 2, & 2 \circ_1 0 &= 0, & 1 \circ_1 2 &= 2, & 2 \circ_1 2 &= 1, \\ 1 \circ_2 0 &= 2, & 2 \circ_2 0 &= 1, & 0 \circ_2 1 &= 2, & 2 \circ_2 1 &= 0 \end{aligned}$$

и $a \circ_i b = a$ в остальных случаях.

Пусть

$$T = S_3 \cup \{+, \circ_0, \circ_1, \circ_2\}.$$

Легко проверить, что все одноместные функции из P_3 реализуются α -формулами над T .

Теорема 4. Система функций T α -полна, то есть $[T]_\alpha = P_3$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

На множестве E_3 можно задать всего одну лупу $(E_3, \circ)$ с нейтральным элементом 0. В этой лупе операция $\circ$ совпадает с операцией сложения по модулю 3. Любая квазигруппа $(E_3, \cdot)$ изотопна лупе $(E_3, \circ)$, причем согласно [1] имеет место равенство

$$x \circ y = (xh_1 \cdot y)h_2,$$

где h_1, h_2 — подходящие подстановки из S_3 . Отсюда и из теоремы 4 получаем следующее утверждение.

Теорема 5. Если $(E_3, \cdot)$ — произвольная квазигруппа, то система функций $S_3 \cup \{\cdot, \circ_0, \circ_1, \circ_2\}$ является α -полной.

Список литературы

1. Глухов М. М., Об α -замкнутых классах и α -полных системах функций k -значной логики. *Дискретная математика* (1989) 1, №1, 16–21.
2. Чернышов А. Л., Условия α -полноты систем функций многозначной логики. *Дискретная математика* (1992) 4, №4, 117–130.
3. Белоусов В. Д., *Основы теории квазигрупп и луп*. Наука, Москва, 1967.
4. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1979.

Статья поступила 17.08.2004.

Переработанный вариант поступил 27.06.2005.