Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Зубков, О. К. Шибанов, Пуассоновская предельная теорема для двухэтапной равновероятной схемы размещения частиц по ячейкам, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 4, 99–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm74>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:11:11

Пуассоновская предельная теорема для двухэтапной равновероятной схемы размещения частиц по ячейкам

© 2006 г. А. М. Зубков, О. К. Шибанов

Рассматривается двухэтапная схема размещения частиц по ячейкам. На первом этапе N_0 исходных частиц независимо и равновероятно размещаются по N_1 ячейкам первого слоя. На втором этапе N_1 ячеек первого слоя рассматриваются как частицы и независимо и равновероятно размещаются по N_2 ячейкам второго слоя вместе с содержащимися в них исходными частицами. Указаны условия, при которых распределение числа ячеек второго слоя, содержащих ровно r частиц, сходится к распределению Пуассона.

Работа выполнена при поддержке программой Отделения математических наук РАН «Современные проблемы теоретической математики» и программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ 4129.2006.1.

1. Введение

Схема случайного размещения частиц по ячейкам является удобной математической моделью различных реальных процессов в физике, технике, биологии и т.п. Различные ее варианты рассматриваются в математической статистике. Предельные теоремы для ряда вариантов схемы случайного размещения частиц по ячейкам можно найти в книге [1]. В обычной схеме равновероятного размещения частиц по ячейкам предполагается, что частицы независимо одна от другой размещаются по N ячейкам так, что вероятность попадания k -й частицы в j -ю ячейку равна $1/N$ для любых $k = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, N$. Пусть $\eta_j = \eta_j(n, N)$ — число частиц, попавших в j -ю ячейку после размещения n частиц, и $\mu_r(n, N)$ — число ячеек, в которые попало ровно r частиц. В [1] доказано, в частности, что если $r > 1$ — константа, а $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$\frac{1}{r!} \frac{n^r}{N^{r-1}} e^{-n/N} \rightarrow \lambda \in (0, \infty),$$

то для любого фиксированного $k = 0, 1, \dots$

$$\mathbf{P}(\mu_r(n, N) = k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k} e^{-\lambda}.$$

Приведенная формулировка охватывает два случая: левую область (когда $n/N \rightarrow 0$) и правую область (когда $n/N \rightarrow \infty$).

В настоящей работе мы рассматриваем более сложную (двухэтапную, или двуслойную) схему равномерного размещения частиц по ячейкам. Схема задается не двумя, а тремя параметрами, которые мы будем обозначать N_0, N_1 и N_2 . На первом этапе N_0 исходных частиц независимо и равномерно размещаются по N_1 ячейкам первого слоя. На втором этапе N_1 ячеек первого слоя рассматриваются как частицы и независимо и равномерно размещаются по N_2 ячейкам второго слоя вместе с содержащимися в них исходными частицами. Обозначим через $\eta_j^{(i)} = \eta_j^{(i)}(N_0, N_1, N_2)$ число исходных частиц, попавших в j -ю ячейку i -го слоя, и через $\mu_r^{(i)}(N_0, N_1, N_2) = \mu_r^{(i)}$ — число ячеек i -го слоя, в которые попало ровно r исходных частиц.

Теорема 1. Если в равномерной двухэтапной схеме размещения частиц $r > 0$ фиксировано, $N_0, N_1, N_2 \rightarrow \infty$ так, что $N_0 = o(N_2)$, $N_0 = O(N_1)$ и

$$\mathbf{E}\mu_r^{(2)} \rightarrow \lambda \in (0, \infty),$$

то для любого фиксированного $k = 0, 1, \dots$

$$\mathbf{P}(\mu_r^{(2)} = k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Результаты анонсировались в [2, 3].

Прежде чем переходить к доказательству, отметим одну интерпретацию двухэтапной схемы равномерного размещения частиц по ячейкам, демонстрирующую ее аналогию с процедурами, используемыми при построении оценок по методу бутстрэпа.

Сначала по обычной равномерной схеме разместим N_1 частиц по N_2 ячейкам; пусть $\eta_j(N_1, N_2)$ — число частиц, попавших в j -ю ячейку, $j = 1, \dots, N_2$. Отношения

$$\pi_j = \frac{\eta_j(N_1, N_2)}{N_1}, \quad j = 1, \dots, N_2,$$

образуют случайное распределение вероятностей. Теперь проведем размещение N_0 частиц по N_2 ячейкам в соответствии с распределением π_j . Нетрудно убедиться в том, что описанная схема эквивалентна двухэтапной равномерной схеме размещения частиц. Действительно, схему размещения, в которой (случайные) вероятности попадания в ячейки выбираются в соответствии с вышеприведенной процедурой, можно описать иначе следующим образом. Первый этап размещения N_1 частиц по N_2 ячейкам соответствует случайному разбиению N_1 ячеек на N_2 подмножеств $M_1, \dots, M_{N_2}$, содержащих $\eta_1(N_1, N_2), \dots, \eta_{N_2}(N_1, N_2)$ элементов соответственно. Если после этого разбиения провести равномерное размещение N_0 частиц по N_1 ячейкам, то вероятность попадания частицы в множество M_j (и, следовательно, в j -ю ячейку второго слоя) будет равна $\eta_j(N_1, N_2)/N_1$.

Всюду в работе $c, c_0, \dots$ обозначают некоторые положительные константы. Случайная величина $\theta_j = \theta_j(r)$, $j = 1, \dots, N_2$, — индикатор события, состоящего в том, что в j -ю ячейку второго слоя попало ровно r частиц; таким образом,

$$\mu_r^{(2)} = \sum_{j=1}^{N_2} \theta_j. \quad (1)$$

При натуральном $r \geq 2$ будем использовать обозначение

$$K(r) = \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}_0^r: k_1 + 2k_2 + \dots + rk_r = r\},$$

где $\mathbb{Z}_0 = \{0, 1, \dots\}$. Число элементов множества $K(r)$ не превосходит числа целых неотрицательных решений уравнения $m_1 + m_2 + \dots + m_r = r$, которое равно $\binom{2r-1}{r}$.

2. Пуассоновские предельные распределения $\mu_r^{(2)}$

Нетрудно проверить, что

$$\{\eta_j^{(2)} = r\} = \bigcup_{\mathbf{k} \in K(r)} C_j(\mathbf{k}),$$

где $C_j(\mathbf{k})$ — событие, состоящее в том, что в j -ю ячейку второго слоя попало ровно k_i ячеек первого слоя, содержащих ровно i частиц, $i = 1, \dots, r$.

Пусть $\bar{\mu}_1^{(1)} = \mu_1^{(1)} + \dots + \mu_{N_0}^{(1)}$ — число непустых ячеек первого слоя. Очевидно, что $0 \leq \bar{\mu}_1^{(1)} \leq \min(N_0, N_1)$.

В следующей лемме приводятся асимптотические соотношения для $\mathbf{E}\mu_r^{(2)}$ при некоторых способах изменения параметров N_0, N_1, N_2 .

Лемма 1. В равновероятной двухэтапной схеме при любом $r \geq 2$

$$\mathbf{E}\mu_r^{(2)} = \frac{N_0^r}{r! N_1^{r-1}} e^{-N_0/N_1} \left(1 + O\left(\frac{N_1}{N_2} + \frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_1}\right) \right),$$

если $N_0 \rightarrow \infty$, $N_0 = O(N_1)$, $N_1 = O(N_2)$, а если $N_0 \rightarrow \infty$, $N_0 = o(\min(N_1, N_2))$, $N_2 = O(N_1)$, то

$$\mathbf{E}\mu_r^{(2)} = \frac{N_0^r}{r! N_2^{r-1}} \left(1 + O\left(\frac{N_0}{N_2} + \frac{1}{N_0} + \frac{N_2}{N_1}\right) \right).$$

Доказательство. Для равновероятной двухэтапной схемы индикаторы $\theta_1, \dots, \theta_{N_2}$, очевидно, одинаково распределены; следовательно,

$$\mathbf{E}\mu_r^{(2)} = \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{P}(\theta_i = 1) = N_2 \mathbf{P}(\theta_1 = 1). \quad (2)$$

В силу (2) достаточно найти асимптотику $\mathbf{P}(\theta_1 = 1)$. Пусть $\mathbf{k}_0 = (0, \dots, 0, 1)$, тогда

$$\mathbf{P}(\theta_1 = 1) = \mathbf{P}(C_1(\mathbf{k}_0)) + \sum_{\mathbf{k} \in K(r) \setminus \{\mathbf{k}_0\}} \mathbf{P}(C_1(\mathbf{k})).$$

Вероятность отдельного события равна

$$\mathbf{P}(C_1(\mathbf{k})) = \frac{\mathbf{E}(\mu_1^{(1)})^{[k_1]} \dots (\mu_r^{(1)})^{[k_r]}}{k_1! \dots k_r! N_2^{k_1 + \dots + k_r}} \left(1 - \frac{1}{N_2} \right)^{\bar{\mu}_1^{(1)} - k_1 - \dots - k_r}. \quad (3)$$

Последний множитель (с учетом неравенства $k_1 + \dots + k_r \leq \bar{\mu}_1^{(1)} \leq \min(N_0, N_1)$) можно оценить так:

$$1 \geq \left(1 - \frac{1}{N_2} \right)^{\bar{\mu}_1^{(1)} - k_1 - \dots - k_r} \geq 1 - \frac{\min(N_0, N_1) - k_1 - \dots - k_r}{N_2}. \quad (4)$$

Согласно [1], с. 45, при $k_1 + \dots + rk_r = r$

$$\mathbf{E}(\mu_1^{(1)})^{[k_1]} \dots (\mu_r^{(1)})^{[k_r]} = \frac{N_0^{[r]} N_1^{[k_1 + \dots + k_r]}}{N_1^{[r]} (1!)^{k_1} \dots (r!)^{k_r}} \left(1 - \frac{k_1 + \dots + k_r}{N_1} \right)^{N_0 - r}. \quad (5)$$

Так как $-x - x^2 < \ln(1 - x) < -x$ при $0 < x < 1/2$, то при $N_1 > 2k$

$$e^{-kN_0/N_1} e^{-kN_0/N_1^2} < \left(1 - \frac{k}{N_1}\right)^{N_0-r} < e^{-k(N_0-r)/N_1}.$$

Заменяя факториальные степени обычными и учитывая условия леммы 1, получаем:

$$\mathbf{P}(C_1(\mathbf{k}_0)) = \frac{N_0^r}{r! N_1^{r-1} N_2} e^{-N_0/N_1} \left(1 + O\left(\frac{\min(N_0, N_1)}{N_2} + \frac{1}{N_0}\right)\right).$$

С другой стороны, если $\mathbf{k} \in K(r) \setminus \{\mathbf{k}_0\}$, то $2 \leq k_1 + \dots + k_r \leq r$; учитывая (3) и (5), находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(C_1(\mathbf{k})) &= \frac{N_0^{[r]} N_1^{[k_1+\dots+k_r]}}{N_1^r (1!)^{k_1} \dots (r!)^{k_r} k_1! \dots k_r! N_2^{k_1+\dots+k_r}} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{k_1 + \dots + k_r}{N_1}\right)^{N_0-r} \left(1 - \frac{1}{N_2}\right)^{\bar{\mu}_1^{(1)} - k_1 - \dots - k_r} \\ &\leq \frac{N_0^r}{N_2^{k_1+\dots+k_r} N_1^{r-k_1-\dots-k_r}} e^{-(k_1+\dots+k_r)(N_0-r)/N_1} \\ &= O\left(\frac{N_0^r}{N_2^2 N_1^{r-2}} e^{-2N_0/N_1}\right) = O\left(\frac{N_1}{N_2} \mathbf{P}(C_1(\mathbf{k}_0))\right), \end{aligned}$$

и в силу конечности множества $K(r)$ при условиях $N_0 = O(N_1)$, $N_1 = O(N_2)$

$$\mathbf{E}\mu_r^{(2)} = N_2 \mathbf{P}(\theta_1 = 1) = \frac{N_0^r}{r! N_1^{r-1}} e^{-N_0/N_1} \left(1 + O\left(\frac{N_0 + N_1}{N_2} + \frac{1}{N_0}\right)\right).$$

Для доказательства второй формулы положим $\mathbf{k}_1 = (r, 0, \dots, 0)$; тогда

$$\mathbf{P}(\theta_1 = 1) = \mathbf{P}(C_1(\mathbf{k}_1)) + \sum_{\mathbf{k} \in K(r) \setminus \{\mathbf{k}_1\}} \mathbf{P}(C_1(\mathbf{k})).$$

Первое слагаемое есть

$$\mathbf{P}(C_1(\mathbf{k}_1)) = \frac{N_0^r}{r! N_2^r} \left(1 + O\left(\frac{N_0}{N_2} + \frac{N_0}{N_1} + \frac{1}{N_0}\right)\right).$$

Если $\mathbf{k} \in K(r) \setminus \{\mathbf{k}_1\}$, то $1 \leq k_1 + \dots + k_r \leq r - 1$ и при $N_2 = O(N_1)$

$$\mathbf{P}(C_1(\mathbf{k})) \leq \frac{N_0^r}{N_2^{k_1+\dots+k_r} N_1^{r-k_1-\dots-k_r}} \leq \frac{N_0^r}{N_1 N_2^{r-1}} = O\left(\frac{N_2}{N_1} \mathbf{P}(C_1(\mathbf{k}_1))\right).$$

Так же, как в первом случае, из последних оценок с учетом соотношения $N_0 = O(N_2)$ следует, что

$$\mathbf{E}\mu_r^{(2)} = N_2 \mathbf{P}(C_1(\mathbf{k}_1)) \left(1 + O\left(\frac{N_2}{N_1}\right)\right) = \frac{N_0^r}{r! N_2^{r-1}} \left(1 + O\left(\frac{N_0}{N_2} + \frac{1}{N_0} + \frac{N_2}{N_1}\right)\right).$$

Тем самым лемма 1 доказана.

Лемма 2. В равновероятной двухэтапной схеме размещения частиц для любых $r \in \{2, 3, \dots\}$, $m \in \{1, 2, \dots\}$ при $N_0, N_1, N_2 \rightarrow \infty$, $N_0 = o(N_2)$, $N_0 = O(N_1)$

$$\mathbf{E}\mu_r^{[m]} = (\mathbf{E}\mu_r)^m \left(1 + O\left(\frac{N_0}{N_2} + \frac{1}{N_0}\right)\right).$$

Доказательство. Как в лемме 1,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\mu_r^{(2)} &= N_2 \mathbf{P}(\theta_1 = 1), \\ \mathbf{E}(\mu_r^{(2)})^{[m]} &= N_2^{[m]} \mathbf{P}(\theta_1 = \dots = \theta_m = 1), \\ \mathbf{P}(\theta_1 = 1) &= \sum_{\mathbf{k} \in K(r)} \mathbf{P}(C_1(\mathbf{k})), \\ \mathbf{P}(\theta_1 = \dots = \theta_m = 1) &= \sum_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m \in K(r)} \mathbf{P}(C_1(\mathbf{k}_1) \dots C_m(\mathbf{k}_m)).\end{aligned}$$

Поэтому утверждение леммы следует из равенства

$$\mathbf{P}(C_1(\mathbf{k}_1) \dots C_m(\mathbf{k}_m)) = \mathbf{P}(C_1(\mathbf{k}_1)) \dots \mathbf{P}(C_m(\mathbf{k}_m)) \left(1 + O\left(\frac{N_0}{N_2} + \frac{1}{N_0}\right)\right), \quad (6)$$

где $\mathbf{k}_i = (k_{i1}, \dots, k_{ir})$, $k_{i1} + 2k_{i2} + \dots + rk_{ir} = r$, $i = 1, \dots, m$.

Докажем (6). Условная вероятность события $C_1(\mathbf{k}_1) \dots C_m(\mathbf{k}_m)$ при условии, что $\mu_1 = v_1, \dots, \mu_r = v_r$, равна

$$\frac{v_1^{[x_1]} \dots v_r^{[x_r]}}{k_{11}! \dots k_{mr}! N_2^{x_1 + \dots + x_r}} \left(1 - \frac{m}{N_2}\right)^{\tilde{\mu}_1^{(1)} - x_1 - \dots - x_r},$$

где $x_j = k_{1j} + \dots + k_{mj}$, $j = 1, \dots, r$. Поэтому вероятность в левой части (6) равна

$$\mathbf{E} \frac{\mu_1^{[x_1]} \dots \mu_r^{[x_r]}}{k_{11}! \dots k_{mr}! N_2^{x_1 + \dots + x_r}} \left(1 - \frac{m}{N_2}\right)^{\tilde{\mu}_1^{(1)} - x_1 - \dots - x_r}.$$

Учитывая (4) и то, что $\min(N_0, N_1) = O(N_0)$ в силу условия $N_0 = O(N_1)$, получаем:

$$\mathbf{P}(C_1(\mathbf{k}_1) \dots C_m(\mathbf{k}_m)) = \mathbf{E}\mu_1^{[x_1]} \dots \mu_r^{[x_r]} \frac{1}{k_{11}! \dots k_{mr}! N_2^{x_1 + \dots + x_r}} \left(1 + O\left(\frac{N_0}{N_2}\right)\right).$$

Согласно [1], с. 45, при $x_1 + \dots + rx_r = rm$

$$\mathbf{E}\mu_1^{[x_1]} \dots \mu_r^{[x_r]} = \frac{N_0^{[rm]} N_1^{[x_1 + \dots + x_r]}}{N_1^{rm} (1!)^{x_1} \dots (r!)^{x_r}} \left(1 - \frac{x_1 + \dots + x_r}{N_1}\right)^{N_0 - rm}.$$

Проводя те же оценки, что в лемме 1, получаем соотношение

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(C_1(\mathbf{k}_1) \dots C_m(\mathbf{k}_m)) &= \frac{N_0^{rm}}{k_{11}! \dots k_{mr}! N_2^{x_1 + \dots + x_r} N_1^{rm - x_1 - \dots - x_r} (1!)^{x_1} \dots (r!)^{x_r}} \\ &\quad \times e^{-(x_1 + \dots + x_r)N_0/N_1} \left(1 + O\left(\frac{N_0}{N_2} + \frac{1}{N_0}\right)\right). \quad (7)\end{aligned}$$

Аналогично преобразуем сомножители в правой части (6):

$$\begin{aligned} P(C_i(\mathbf{k}_i)) &= E\mu_1^{[k_{i1}]} \dots \mu_r^{[k_{ir}]} \frac{1}{k_{i1}! \dots k_{ir}! N_2^{k_{i1}+\dots+k_{ir}}} \left(1 + O\left(\frac{N_0}{N_2}\right)\right) \\ &= \frac{N_0^r}{k_{i1}! \dots k_{ir}! N_2^{k_{i1}+\dots+k_{ir}} N_1^{r-k_{i1}-\dots-k_{ir}} (1!)^{k_{i1}} \dots (r!)^{k_{ir}}} e^{-(k_{i1}+\dots+k_{ir})N_0/N_1} \\ &\quad \times \left(1 + O\left(\frac{N_0}{N_2} + \frac{1}{N_0}\right)\right). \end{aligned}$$

Значит,

$$P(C_1(\mathbf{k}_1) \dots C_m(\mathbf{k}_m)) = P(C_1(\mathbf{k}_1)) \dots P(C_m(\mathbf{k}_m)) \left(1 + O\left(\frac{N_0}{N_2} + \frac{1}{N_0}\right)\right).$$

Отметим, что постоянные в оценках равномерны по всем событиям, так как при фиксированных r, m суммы по $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m$ состоят из конечного числа слагаемых. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Из леммы 2 следует, что $E\mu_r^{[m]} \rightarrow \lambda^m$ при условиях теоремы 1, следовательно, распределение $\mu_r^{(2)}$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ . Теорема 1 доказана.

Список литературы

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
2. Зубков А. М., Шибанов О. К., Многоступенчатые схемы размещения частиц по ячейкам. *Обзорное прикладной и промышленной математики* (2002) **9**, №1, 115–116.
3. Зубков А. М., Шибанов О. К., Двухступенчатая схема размещения частиц по ячейкам. *Обзорное прикладной и промышленной математики* (2002) **9**, №2, 378–379.

Статья поступила 12.12.2005.