Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Колчин, В. Ф. Колчин, О переходе распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с одной решетки на другую в обобщенной схеме размещения, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 4, 113–127

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm76>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 07:20:11

О переходе распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с одной решетки на другую в обобщенной схеме размещения

© 2006 г. А. В. Колчин, В. Ф. Колчин

Рассматривается эффект перехода распределений сумм независимых одинаково распределенных неотрицательных целочисленных случайных величин с одной решетки на другую в контексте обобщенной схемы размещения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05-01-00035, программой Отделения математических наук РАН «Современные проблемы теоретической математики» и программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ 4129.2006.1.

1. Введение

В вероятностной комбинаторике получил распространение подход, основанный на применении обобщенной схемы размещения, позволяющий сводить ряд комбинаторных задач к задачам о суммах независимых случайных величин, классическому объекту изучения в теории вероятностей [7–10, 14–20]. Обобщенная схема размещения была введена в [7] и заняла заметное место в асимптотических исследованиях в вероятностной комбинаторике. Свое название эта схема получила в связи с тем, что она является обобщением классической задачи о случайном размещении частиц по ячейкам [8].

В обобщенной схеме размещения частиц распределение заполнений ячеек представимо как условное распределение независимых случайных величин при условии, что их сумма принимает фиксированное значение. Пусть $\eta_1, \dots, \eta_N$ — неотрицательные целочисленные случайные величины, рассматриваемые как некоторые числовые характеристики комбинаторной структуры из N компонент, состоящей из n элементов, такие, что $\eta_1 + \dots + \eta_N = n$. Если существуют независимые случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ такие, что совместное распределение $\eta_1, \dots, \eta_N$ допускает представление

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}, \quad (1)$$

где $k_1, \dots, k_N$ — произвольные целые числа, то говорят, что $\eta_1, \dots, \eta_N$ образуют обобщенную схему размещения с параметрами n и N и независимыми случайными величинами $\xi_1, \dots, \xi_N$. Случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$ интерпретируются как заполнения ячеек.

В силу независимости случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_N$, изучение многих характеристик обобщенной схемы размещения сводится к задачам о суммах независимых случайных величин.

Например, пусть случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ одинаково распределены и пусть μ_l — число случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_N$, принявших значение l , $l = 0, 1, \dots, N$. Нетрудно показать (см., например, [8]), что

$$\mathbf{P}\{\mu_l = k\} = \binom{N}{k} p_l^k (1 - p_l)^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\xi_1^{(l)} + \dots + \xi_{N-k}^{(l)} = n - kl\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\}},$$

где $\xi_1^{(l)}, \dots, \xi_{N-k}^{(l)}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(l)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \neq l\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и

$$p_l = \mathbf{P}\{\xi_1 = l\}, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, получение предельного распределения случайной величины μ_l сводится к применению локальных теорем для сумм независимых случайных величин. В случае, когда распределения слагаемых одинаковы и фиксированы (не зависят от числа слагаемых), можно пользоваться хорошо развитой теорией суммирования независимых случайных величин [1]. Однако во многих применениях обобщенной схемы возникает необходимость в локальных предельных теоремах в схеме серий. В таких случаях до сих пор нет исчерпывающего ответа на вопрос, справедлива ли локальная предельная теорема даже в случае сходимости к нормальному закону; для каждого конкретного случая приходится проводить отдельное доказательство, либо следуя доказательству локальной теоремы, предложенному Б. В. Гнеденко [1, 2, 11, 13, 14], либо проверяя условия общих локальных теорем [3, 12].

Обычно (см., например, [9]), распределение случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_N$ представляется в виде

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{b_k \theta^k}{k! B(\theta)}, \quad (2)$$

где $b_0, b_1, b_2, \dots$ — некоторая последовательность неотрицательных чисел,

$$B(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k \theta^k}{k!},$$

и θ — параметр, принимающий положительные значения из области сходимости ряда $B(\theta)$. В таких случаях, если соотношение (1) справедливо при некотором значении θ , то оно остается верным при всех положительных θ из области сходимости ряда $B(\theta)$ (см., например, [8, 9, 10]).

Для изучения характеристик обобщенной схемы размещения, как правило, требуются локальные предельные теоремы при всех значениях параметра θ .

В [6] были рассмотрены простейшие случаи. Предполагалось, что b_0 и b_1 строго положительны и допускались лишь значения параметра θ , не приближающиеся к значению радиуса сходимости ряда $B(\theta)$. При этих ограничениях были получены предельные теоремы о сходимости к нормальному распределению и распределению Пуассона.

В настоящей статье рассматривается эффект перехода распределений сумм независимых одинаково распределенных целочисленных неотрицательных случайных величин с распределением вида (2) с одной решетки на другую. В схеме размещения частиц по ячейкам этот эффект был описан в [8] для распределения числа ячеек, содержащих ровно одну частицу.

В случае, когда значения параметра θ приближаются к границе сходимости ряда $B(\theta)$, как показано на примерах в [4, 5, 9, 10]), могут появляться и другие предельные распределения.

Некоторые из доказанных в [6] и настоящей статье теорем, по-видимому, могут быть получены путем проверки приведенных в [12] общих условий справедливости локальных теорем о сходимости к нормальному распределению (см. [3]), однако авторы считают, что наличие простых прямых доказательств может оказаться полезным для дальнейших исследований в этой области.

2. Основные обозначения. Вспомогательные соотношения

Мы будем придерживаться следующих обозначений. Пусть задана последовательность неотрицательных чисел $b_0, b_1, b_2, \dots$, таких, что радиус сходимости R ряда

$$B(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k \theta^k}{k!}$$

положителен. Введем целочисленную случайную величину $\xi = \xi(\theta)$, распределенную по следующему закону:

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{b_k \theta^k}{k! B(\theta)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Будем говорить, что выполнено условие A_r , $r \geq 2$, если $b_0 > 0$, $b_1 = \dots = b_{r-1} = 0$, $b_r > 0$, и максимальный шаг распределения (3) равен единице. Если $b_0, b_1 > 0$, то будем говорить, что выполнено условие A_1 .

Положим

$$m = m(\theta) = \mathbf{M}\xi, \quad \sigma^2 = \sigma^2(\theta) = \mathbf{D}\xi, \quad \beta = \beta(\theta) = \mathbf{M}|\xi - m|^3.$$

Заметим, что при $|\theta| < R$ случайная величина ξ имеет все моменты.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины, распределение которых совпадает с распределением (3) случайной величины ξ .

Нашей целью является получение предельных теорем для сумм вида

$$S_N = \sum_{k=1}^N \xi_k$$

при $N \rightarrow \infty$ и различных вариантах поведения параметра $\theta = \theta(N)$. Положим

$$P_N(n) = \mathbf{P}\{S_N = n\}.$$

Обозначим через $F_N(x)$ функцию распределения суммы центрированных и нормированных случайных величин

$$S_N^* = \sum_{k=1}^N \frac{\xi_k - m}{\sigma \sqrt{N}}.$$

Легко видеть, что производящая функция распределения случайной величины ξ есть

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k \theta^k z^k}{k! B(\theta)} = \frac{1}{B(\theta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k (z\theta)^k}{k!} = \frac{B(z\theta)}{B(\theta)}.$$

Характеристическая функция $\varphi(t)$ случайной величины ξ есть $\phi(e^{it})$, поэтому

$$\varphi(t) = \frac{B(\theta e^{it})}{B(\theta)}.$$

Далее, характеристическая функция $\varphi^*(t)$ центрированной и нормированной случайной величины $(\xi - m)/(\sigma \sqrt{N})$ есть $\phi(e^{it/(\sigma \sqrt{N})})e^{-itm/(\sigma \sqrt{N})}$, поэтому

$$\varphi^*(t) = \frac{B(\theta e^{it/(\sigma \sqrt{N})})}{B(\theta)} e^{-itm/(\sigma \sqrt{N})}. \quad (4)$$

Через $\tilde{\varphi}(t) = \mathbf{M}e^{it(\xi-m)}$ обозначим характеристическую функцию центрированной случайной величины $\xi - m$.

Легко видеть, что первые два момента случайной величины ξ выражаются через функцию $B(\theta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} m = \mathbf{M}\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k b_k \theta^k}{k! B(\theta)} = \frac{\theta B'(\theta)}{B(\theta)}, \\ \mathbf{M}\xi(\xi - 1) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1) b_k \theta^k}{k! B(\theta)} = \frac{\theta^2 B''(\theta)}{B(\theta)}, \\ \sigma^2 = \mathbf{D}\xi &= \mathbf{M}\xi(\xi - 1) + \mathbf{M}\xi - (\mathbf{M}\xi)^2 \\ &= \frac{\theta^2 B''(\theta)}{B(\theta)} + \frac{\theta B'(\theta)}{B(\theta)} - \frac{\theta^2 (B'(\theta))^2}{(B(\theta))^2}. \end{aligned}$$

3. Предельные теоремы

3.1. Интегральные предельные теоремы

В [6] предполагалось выполнение условия A_1 . Оказывается, что в доказательстве интегральной предельной теоремы о слабой сходимости распределений сумм S_N^* к стандартному нормальному закону не требуется выполнения каких-либо арифметических ограничений на последовательность $b_0, b_1, \dots$

Теорема 1. Пусть $N \rightarrow \infty$ и существуют постоянные θ_0, θ_1 , $0 < \theta_0 < \theta_1 < R$, такие, что параметр $\theta = \theta(N) \in [\theta_0, \theta_1]$. Тогда распределение S_N^* слабо сходится к стандартному нормальному закону, причем справедлива оценка

$$\sup_x |F_N(x) - \Phi(x)| \leq c \frac{\beta^*}{(\sigma^*)^3 \sqrt{N}}, \quad (5)$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона и

$$\sigma^* = \min_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1} \sigma(\theta) > 0, \quad \beta^* = \max_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1} \beta(\theta),$$

c — постоянная из неравенства Берри–Эссеена.

Доказательство. Справедливость теоремы следует из того, что если зафиксировать произвольное значение параметра θ , то по теореме Берри–Эссеена

$$\sup_x |F_N(x) - \Phi(x)| \leq c \frac{\beta(\theta)}{(\sigma(\theta))^3 \sqrt{N}} \leq c \frac{\beta^*}{(\sigma^*)^3 \sqrt{N}};$$

положительность σ^* следует из того, что $\sigma(\theta)$ есть непрерывная функция от θ и $\sigma(\theta) > 0$ при $\theta > 0$ при выполнении любого из условий A_r , $r \geq 1$.

Теорема 2. Пусть выполнено условие A_r , $r \geq 1$. Пусть $N \rightarrow \infty$, и пусть параметр $\theta = \theta(N) \rightarrow 0$ так, что выполняется соотношение

$$\frac{b_r}{r! b_0} N \theta^r \rightarrow \lambda,$$

где λ — некоторая положительная постоянная. Тогда распределение суммы S_N/r слабо сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

Доказательство. Применим теорему непрерывности для производящих функций (см., например, [11]). Производящая функция случайной величины, имеющей распределение Пуассона с параметром λ на решетке целых неотрицательных чисел, кратных r , равна

$$\phi_{\Pi}^{(r)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} z^{kr} = e^{-\lambda(1-z^r)}.$$

Докажем, что при выполнении условий теоремы производящая функция $\phi^N(z)$ случайной величины S_N стремится к $\phi_{\Pi}^{(r)}(z)$ при любом фиксированном z , $0 < z < 1$. Пользуясь асимптотическим разложением

$$\ln(1+x) = x + O(x^2),$$

справедливым при $|x| < 1$, получаем, что при выполнении условий теоремы

$$\begin{aligned} \ln \phi^N(z) &= N(\ln B(\theta z) - \ln B(\theta)) \\ &= N \ln \left(1 + \frac{b_r(\theta z)^r}{b_0 r!} + O(\theta^{r+1}) \right) - N \ln \left(1 + \frac{b_r \theta^r}{b_0 r!} + O(\theta^{r+1}) \right) \\ &= \frac{b_r \theta^r}{b_0 r!} N(z^r - 1) + O(N\theta^{r+1}) = \lambda(z^r - 1)(1 + o(1)), \end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы.

Теорема 3. Пусть выполнено условие A_r , $r \geq 1$. Пусть $N \rightarrow \infty$ и пусть параметр $\theta = \theta(N) \rightarrow 0$ так, что $\theta^r N \rightarrow \infty$. Тогда распределение суммы S_N^* слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Доказательство. Случай $r = 1$ рассмотрен в [6]. Поэтому предполагаем, что $r \geq 2$. Покажем, что при условиях теоремы $(\varphi^*(t))^N \rightarrow e^{-t^2/2}$.

Представим $B(\theta e^{it/(\sigma\sqrt{N})})$ в виде

$$B(\theta e^{it/(\sigma\sqrt{N})}) = B(\theta + \Delta\theta), \quad \Delta = e^{it/(\sigma\sqrt{N})} - 1.$$

Возьмем логарифм от обеих частей представления характеристической функции (4). Разложим $\ln B(\theta + \Delta\theta)$ в точке θ при фиксированном t до членов третьего порядка малости, но вначале выясним асимптотическое поведение производных функции $B(\theta)$ в точке θ . Нетрудно видеть, что при выполнении условия A_r , $r \geq 2$,

$$\begin{aligned} B(\theta) &= b_0 + \frac{b_r \theta^r}{r!} + O(\theta^{r+1}), \\ B'(\theta) &= \frac{b_r \theta^{r-1}}{(r-1)!} + O(\theta^r), \\ B''(\theta) &= \frac{b_r \theta^{r-2}}{(r-2)!} + O(\theta^{r-1}), \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$|B'''(\theta)| = \begin{cases} O(1), & r = 2, \\ O(\theta^{r-3}), & r \geq 3. \end{cases}$$

Поэтому при фиксированном t

$$\ln B(\theta + \Delta\theta) = \ln \left(B(\theta) + \Delta\theta B'(\theta) + \frac{(\Delta\theta)^2}{2} B''(\theta) + R_r \right), \quad (7)$$

где $R_r = R_r(\Delta, \theta) = O(\Delta^3 \theta^3 |B'''(\theta)|)$, так что $R_2 = R_2(\Delta, \theta) = O(\Delta^3 \theta^3)$ и $R_r = R_r(\Delta, \theta) = O(\Delta^3 \theta^r)$, $r \geq 3$. Далее, пользуясь разложением

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

при $x \rightarrow 0$, с учетом соотношения (6) получаем, что

$$\begin{aligned} \ln B(\theta + \Delta\theta) &= \ln B(\theta) + \ln \left(1 + \frac{\Delta\theta B'(\theta)}{B(\theta)} + \frac{\Delta^2 \theta^2 B''(\theta)}{2B(\theta)} + \frac{R_r}{B(\theta)} \right) \\ &= \ln B(\theta) + \frac{\Delta\theta B'(\theta)}{B(\theta)} + \frac{\Delta^2 \theta^2 B''(\theta)}{2B(\theta)} - \frac{\Delta^2 \theta^2 (B'(\theta))^2}{2(B(\theta))^2} + O(R_r). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \ln \varphi^*(t) &= \ln \frac{B(\theta e^{it/(\sigma\sqrt{N})})}{B(\theta)} e^{-itm/(\sigma\sqrt{N})} \\ &= \ln B(\theta + \Delta\theta) - \ln B(\theta) - itm/(\sigma\sqrt{N}) \\ &= \frac{\Delta\theta B'(\theta)}{B(\theta)} + \frac{\Delta^2 \theta^2 B''(\theta)}{2B(\theta)} - \frac{\Delta^2 \theta^2 (B'(\theta))^2}{2(B(\theta))^2} - \frac{itm}{\sigma\sqrt{N}} + O(R_r). \end{aligned}$$

Легко видеть, что при $\theta \rightarrow 0$, в силу ранее полученных представлений для $m(\theta)$ и $\sigma^2(\theta)$ и асимптотических выражений для производных функции $B(\theta)$, справедливы представления

$$\begin{aligned} m &= m(\theta) = \mathbf{M}\xi = \theta \frac{B'(\theta)}{B(\theta)} = \frac{b_r \theta^r}{b_0(r-1)!} + O(\theta^{r+1}), \\ \sigma^2 &= \sigma^2(\theta) = \mathbf{D}\xi = \frac{\theta^2 B''(\theta)}{B(\theta)} + \frac{\theta B'(\theta)}{B(\theta)} - \frac{\theta^2 (B'(\theta))^2}{(B(\theta))^2} \\ &= \frac{b_r \theta^r}{b_0(r-2)!} + \frac{b_r \theta^r}{b_0(r-1)!} + O(\theta^{r+1}) = \frac{r b_r \theta^r}{b_0(r-1)!} + O(\theta^{r+1}). \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, очевидно, что

$$\Delta \frac{\theta B'(\theta)}{B(\theta)} - \frac{itm}{\sigma \sqrt{N}} = \Delta m - \frac{itm}{\sigma \sqrt{N}}.$$

При $N \rightarrow \infty$ при любом фиксированном t

$$\Delta = e^{it/(\sigma \sqrt{N})} - 1 = \frac{it}{\sigma \sqrt{N}} - \frac{t^2}{2\sigma^2 N} + O\left(\frac{1}{\sigma^3 N^{3/2}}\right),$$

откуда следует, что

$$\Delta m - \frac{itm}{\sigma \sqrt{N}} = -\frac{t^2 m}{2\sigma^2 N} + O\left(\frac{1}{\theta^{r/2} N^{3/2}}\right),$$

поскольку в условиях теоремы

$$\sigma^2 N = \frac{r b_r N \theta^r}{b_0(r-1)!} + O(N \theta^{r+1}) \rightarrow \infty;$$

здесь используется условие, что $\theta^r N \rightarrow \infty$.

Окончательно получаем следующую оценку для логарифма характеристической функции случайной величины ξ :

$$\begin{aligned} \ln \varphi^*(t) &= -\frac{t^2 m}{2\sigma^2 N} + \frac{\Delta^2}{2} \left(\frac{\theta^2 B''(\theta)}{B(\theta)} - \frac{(\theta B'(\theta))^2}{(B(\theta))^2} \right) + O(R_r) \\ &= -\frac{t^2 m}{2\sigma^2 N} - \frac{t^2}{2\sigma^2 N} (\mathbf{M}\xi(\xi-1) - (\mathbf{M}\xi)^2) + O(R_r) \\ &= -\frac{t^2}{2\sigma^2 N} (\mathbf{M}\xi + \mathbf{M}\xi(\xi-1) - (\mathbf{M}\xi)^2) + O(R_r) = -\frac{t^2}{2N} + O(R_r), \end{aligned}$$

где

$$R_2 = O(\Delta^3 \theta^3) = O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right), \quad R_r = O(\Delta^3 \theta^r) = O\left(\frac{1}{\theta^{r/2} N^{3/2}}\right), \quad r \geq 3.$$

Поэтому

$$(\varphi^*(t))^N = \begin{cases} e^{-t^2/2} + O(1/\sqrt{N}), & r = 2, \\ e^{-t^2/2} + O(1/\sqrt{\theta^r N}), & r \geq 3, \end{cases}$$

что завершает доказательство теоремы.

3.2. Локальные предельные теоремы

Введем дополнительные обозначения. Пусть выполнено условие A_r при некотором $r \geq 2$, и пусть s — первое большее r число, для которого $b_s > 0$. Положим

$$z = \frac{n - Nm}{\sigma\sqrt{N}},$$

где, как и ранее, $m = \mathbf{M}\xi$, $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi$.

Теорема 4. Пусть выполнено условие A_r при некотором $r \geq 2$, $N \rightarrow \infty$, $\theta = \theta(N) \rightarrow 0$ так, что $N\theta^s \rightarrow \infty$ и максимальный шаг решетки, на которой лежат точки 0 , r и s , равен единице. Тогда

$$\sigma\sqrt{N}P_N(n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \rightarrow 0$$

равномерно относительно целых неотрицательных n .

Доказательство. Напомним, что характеристическая функция случайной величины ξ равна $\varphi(t) = B(\theta e^{it})/B(\theta)$, $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t)e^{-itm}$ — характеристическая функция центрированной случайной величины $\xi - m$ и $\varphi^*(t) = \bar{\varphi}(t/(\sigma\sqrt{n})) = \varphi(t/(\sigma\sqrt{n}))e^{-itm/(\sigma\sqrt{n})}$ — характеристическая функция центрированной и нормированной случайной величины $(\xi - m)/(\sigma\sqrt{N})$.

По теореме обращения для характеристических функций

$$P_N(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^N(t) e^{-itm} dt.$$

Положим

$$n = mN = \sigma z \sqrt{N}.$$

Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} P_N(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it\sigma z \sqrt{N}} e^{-itmN} \varphi^N(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it\sigma z \sqrt{N}} (\bar{\varphi}(t))^N dt. \end{aligned}$$

Сделав замену $x = \sigma t \sqrt{N}$, получаем, что

$$P_N(n) = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{N}} \int_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-ixz} (\bar{\varphi}(x/(\sigma\sqrt{N})))^N dx.$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi} e^{-z^2/2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz - x^2/2} dx,$$

разность

$$R_N(n) = 2\pi \left(\sigma\sqrt{N}P_N(n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \right)$$

можно представить в виде суммы четырех интегралов

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-A}^A (((\bar{\varphi}(x)/(\sigma\sqrt{N})))^N - e^{-x^2/2}) dx, \\ I_2 &= - \int_{|x| \geq A} e^{-ixz - x^2/2} dx, \\ I_3 &= - \int_{A \leq |x| \leq \pi\sigma\sqrt{N}} e^{-ixz} (\bar{\varphi}(x/(\sigma\sqrt{N})))^N dx, \\ I_4 &= - \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{N} \leq |x| \leq \pi\sigma\sqrt{N}} e^{-ixz} (\bar{\varphi}(x/(\sigma\sqrt{N})))^N dx, \end{aligned}$$

где положительные постоянные A и ε будут выбраны позднее.

Покажем, что выбором A , ε и N величины $R_N(n)$ может быть сделана сколь угодно малой, точнее, покажем, что для произвольного $\delta > 0$ выбором A , ε и N можно добиться выполнения неравенства $|R_N(n)| \leq \delta$.

Ясно, что

$$|I_2| \leq \int_{|x| \geq A} e^{-x^2/2} dx,$$

и выбором достаточно большого A можно добиться выполнения неравенства

$$|I_2| \leq \frac{\delta}{4}.$$

Оценим интеграл

$$I_3 = - \int_{A \leq |x| \leq \pi\sigma\sqrt{N}} e^{-ixz} (\bar{\varphi}(x/(\sigma\sqrt{N})))^N dx.$$

Воспользуемся разложением характеристической функции

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{B(\theta e^{it})}{B(\theta)} e^{-itm}.$$

Введем обозначение $a = e^{it} - 1$. Аналогичное (7) разложение имеет вид

$$\ln B(\theta + a\theta) = \ln(B(\theta) + a\theta B'(\theta) + \frac{1}{2}(a\theta)^2 B''(\theta) + R_r),$$

где $R_2 = 0(a^3\theta^3)$, $R_r = 0(a^3\theta^r)$ при $r \geq 3$. Далее,

$$\begin{aligned} \ln B(\theta + a\theta) &= \ln B(\theta) + \ln \left(1 + \frac{a\theta B'(\theta)}{B(\theta)} + \frac{(a\theta)^2 B''(\theta)}{2B(\theta)} + O(R_r) \right) \\ &= \ln B(\theta) + \frac{a\theta B'(\theta)}{B(\theta)} + \frac{(a\theta)^2 B''(\theta)}{2B(\theta)} - \frac{(a\theta)^2 (B'(\theta))^2}{2(B(\theta))^2} + O(R_r). \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} a &= e^{it} - 1 = it - \frac{t^2}{2} + O(t^3), \\ am - itm &= -\frac{t^2 m}{2} + O(mt^3). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 \ln \bar{\varphi}(t) &= \ln \left(\frac{B(\theta e^{it})}{B(\theta)} e^{-itm} \right) \\
 &= am + \frac{(a\theta)^2 B''(\theta)}{2B(\theta)} - \frac{(a\theta)^2 (B'(\theta))^2}{2(B(\theta))^2} - itm + O(R_r) \\
 &= -\frac{t^2}{2} (\mathbf{M}\xi + \mathbf{M}\xi(xi - 1) - (\mathbf{M}\xi)^2) + O(R_r) + O(mt^3) \\
 &= -\frac{t^2 \sigma^2}{2} + O(R_r) + O(mt^3).
 \end{aligned}$$

Учитывая асимптотику m и σ (см. (8)), получаем, что

$$\ln \bar{\varphi}(t) = -\frac{t^2 \sigma^2}{2} + O(t^3 \theta^r),$$

откуда

$$\bar{\varphi}(t) = e^{-t^2 \sigma^2 / 2 + O(t^3 \theta^r)},$$

так что при $|t| \leq \varepsilon$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$|\bar{\varphi}(t)| \leq e^{-t^2 \sigma^2 / 4}.$$

Оценивая теперь интеграл I_3 , находим, что

$$\begin{aligned}
 |I_3| &\leq \int_{A \leq |x| \leq \varepsilon \sigma \sqrt{N}} |\bar{\varphi}(x/(\sigma \sqrt{N}))|^N dx \leq \int_{A \leq |x| \leq \varepsilon \sigma \sqrt{N}} (e^{-x^2/(4N)})^N dx \\
 &\leq \int_{A \leq |x|} e^{-x^2/4} dx,
 \end{aligned}$$

и выбором достаточно большого A можно добиться выполнения неравенства

$$|I_3| \leq \frac{\delta}{4}.$$

Итак, выбирая достаточно большое A и достаточно малое ε , получаем, что для интегралов I_2 и I_3 выполняются неравенства $|I_2| \leq \delta/4$ и $|I_3| \leq \delta/4$.

При фиксированном A интеграл I_1 может быть сделан сколь угодно малым выбором достаточно большого N , так как при $N\theta^r \rightarrow \infty$ справедлива теорема 3 о сходимости распределения случайной величины S_N^* к стандартному нормальному распределению, так что при $N \rightarrow \infty$

$$\bar{\varphi}(x/(\sigma \sqrt{N})) \rightarrow e^{-x^2/2}$$

равномерно в любом конечном интервале, например, при $|x| \leq A$. Выбирая достаточно большое N , получаем, что

$$|I_1| \leq \frac{\delta}{4}.$$

При оценке интеграла I_4 приходится учитывать влияние значений $|\varphi(t)|$, возможно близких к единице в некоторых точках интервала $[-\pi, \pi]$, исключая, конечно, окрестность точки $t = 0$, где уже оценен интеграл I_1 . Такими точками являются точки $t_k^{(r)} = 2\pi k/r$, $|k| = 0, 1, \dots, [r/2]$. В этих точках сумма первых двух членов разложения характеристической функции $\varphi(t)$, равная

$$\frac{1}{B(\theta)} \left(b_0 + \frac{b_r \theta^r}{r!} e^{itr} \right),$$

имеет то же значение, что и при $t = 0$.

Третий по величине член разложения, равный $b_s \theta^s e^{its}/s!$, принимает то же значение, что и в точке $t = 0$, в точках $t_k^{(s)} = 2\pi k/s$, $|k| = 0, 1, \dots, [s/2]$.

Выделим ε -окрестности точек $t_k^{(r)}$, $|k| = 0, 1, \dots, [r/2]$, и $t_k^{(s)}$, $|k| = 0, 1, \dots, [s/2]$. Обозначим $R_{r,\varepsilon}$ часть интервала $[-\pi, \pi]$, полученную удалением ε -окрестностей точек $t_k^{(r)}$, $|k| = 0, 1, \dots, [r/2]$, и $R_{s,\varepsilon}$ часть интервала $[-\pi, \pi]$, полученную удалением ε -окрестностей точек $t_k^{(s)}$, $|k| = 0, 1, \dots, [s/2]$. По условию теоремы, максимальный шаг решетки, на которой лежат точки $0, r, s$, равен единице, поэтому наибольшее общее кратное чисел r и s равно 1. Отсюда следует, что, кроме точки 0, все точки $t_k^{(r)}$, $t_k^{(s)}$ различны, и, значит, все удаленные ε -окрестности этих точек при достаточно малом $\varepsilon > 0$ не пересекаются, за исключением окрестностей точки 0. Поэтому

$$R_{r,\varepsilon} \cup R_{s,\varepsilon} = [-\pi, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi].$$

Для оценки интеграла I_4 представим его в виде

$$I_4 = \sigma \sqrt{N} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi} e^{-itz\sigma\sqrt{N}} \bar{\varphi}(t) dt.$$

Из этого представления следует, что

$$|I_4| \leq \sigma \sqrt{N} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi} |\varphi(t)| dt.$$

Оценим модуль характеристической функции $\varphi(t)$. Для краткости введем обозначения

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{b_r \theta^r}{b_0 r!}, & a_s &= \frac{b_s \theta^s}{b_0 s!}, \\ \alpha_r &= rt, & \alpha_s &= st. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= (1 + a_r e^{i\alpha_r} + a_s e^{i\alpha_s} + O(\theta^{s+1})) / (1 + a_r + a_s + O(\theta^{s+1})) \\
 &= \frac{1 + a_r e^{i\alpha_r} + a_s e^{i\alpha_s} + O(\theta^{s+1})}{(1 + a_r)(1 + a_s / (1 + a_r)) + O(\theta^{s+1})} \\
 &= \frac{(1 + a_r e^{i\alpha_r}) / (1 + a_r) + a_s e^{i\alpha_s} + O(\theta^{s+1})}{1 + a_s + O(\theta^{s+1})} \\
 &= \left(\frac{1 + a_r e^{i\alpha_r}}{1 + a_r} + a_s e^{i\alpha_s} + O(\theta^{s+1}) \right) (1 - a_s + O(\theta^{s+1})) \\
 &= \frac{1 + a_r e^{i\alpha_r}}{1 + a_r} + a_s e^{i\alpha_s} - \frac{a_s(1 + a_r e^{i\alpha_r})}{1 + a_r} + O(\theta^{s+1}) \\
 &= 1 - \frac{a_r}{1 + a_r} (1 - e^{i\alpha_r}) - a_s (1 - e^{i\alpha_s}) + O(\theta^{s+1}) \\
 &= 1 - \frac{a_r}{1 + a_r} (1 - \cos \alpha_r - i \sin \alpha_r) - a_s (1 - \cos \alpha_s - i \sin \alpha_s) + O(\theta^{s+1}).
 \end{aligned}$$

Переходя к оценке модуля характеристической функции, находим, что

$$\begin{aligned}
 |\varphi(t)|^2 &= \left| 1 - \frac{a_r}{1 + a_r} (1 - \cos \alpha_r - i \sin \alpha_r) - a_s (1 - \cos \alpha_s - i \sin \alpha_s) + O(\theta^{s+1}) \right|^2 \\
 &= \left(1 - \frac{a_r}{1 + a_r} (1 - \cos \alpha_r - a_s (1 - \cos \alpha_s)) \right)^2 \\
 &\quad + \left(\frac{a_r}{1 + a_r} \sin \alpha_r + a_s \sin \alpha_s \right)^2 + O(\theta^{s+1}) \\
 &= 1 - \frac{2a_r}{1 + a_r} (1 - \cos \alpha_r) + \frac{a_r^2}{(1 + a_r)^2} (1 - \cos \alpha_r)^2 - 2a_s (1 - \cos \alpha_s) \\
 &\quad + \frac{a_r^2}{(1 + a_r)^2} \sin^2 \alpha_r + O(\theta^{s+1}) \\
 &= 1 - \frac{2a_r}{1 + a_r} (1 - \cos \alpha_r) + \frac{a_r^2}{(1 + a_r)^2} (1 - 2 \cos \alpha_r + \cos^2 \alpha_r + \sin^2 \alpha_r) \\
 &\quad - 2a_s (1 - \cos \alpha_s) + O(\theta^{s+1}) \\
 &= 1 - \frac{2a_r}{1 + a_r} (1 - \cos \alpha_r) + \frac{2a_r^2}{(1 + a_r)^2} (1 - \cos \alpha_r) \\
 &\quad - 2a_s (1 - \cos \alpha_s) + O(\theta^{s+1}).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$|\varphi(t)|^2 \leq 1 - a_r (1 - \cos \alpha_r) - 2a_s (1 - \cos \alpha_s) + O(\theta^{s+1}). \quad (9)$$

Если $t \in R_{r,\varepsilon}$, то есть t не лежит в ε -окрестности ни одной из точек $t_k^{(r)}$, $|k| = 1, 2, \dots, [r/2]$, то для любой из этих точек $|t_k^{(r)} - t| \geq \varepsilon$, а значит, $|2\pi k/r - t| \geq \varepsilon$ и $|2\pi k - \alpha_r| \geq \varepsilon r$. Поэтому

$$1 - \cos \alpha_r \geq 1 - \cos \varepsilon r \geq 2c, \quad (10)$$

где c — положительная постоянная. Из (9) следует, что

$$|\varphi(t)|^2 \leq 1 - a_r(1 - \cos \alpha_r) + O(\theta^{s+1}),$$

поэтому в силу того, что $a_r = O(\theta^r)$, из (10) следует, что

$$\begin{aligned} |\varphi(t)|^2 &\leq 1 - 2ca_r + O(\theta^{s+1}) \\ &\leq 1 - ca_r \leq e^{2b\theta^r}, \end{aligned}$$

где b — положительная постоянная и $t \in R_{r,\varepsilon}$.

Итак,

$$|\varphi(t)| \leq e^{-b\theta^r},$$

и для интеграла $\sigma \sqrt{n} \int_{R_{r,\varepsilon}} |\varphi(t)|^N dt$ с учетом того, что $\sigma^2 = O(\theta^r)$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sigma \sqrt{N} \int_{R_{r,\varepsilon}} |\varphi(t)|^N dt &\leq c_1 \sqrt{\theta^r N} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-b\theta^r N} dt \\ &= 2\pi c_1 \sqrt{\theta^r N} e^{-b\theta^r N}, \end{aligned}$$

где c_1 — положительная постоянная.

Таким образом, эта часть интеграла I_4 стремится к нулю в условиях теоремы.

Пусть теперь $t \notin R_{r,\varepsilon}$, то есть t лежит в ε -окрестности одной из точек $t_k^{(r)}$, $|k| = 1, 2, \dots, [r/2]$, так что существует k_0 такое, что $|t_{k_0}^{(r)} - t| \leq \varepsilon$, откуда следует, что

$$|rt_{k_0}^{(r)} - \alpha_r| \leq r\varepsilon,$$

и значит, $\alpha_r = 2\pi k_0 + r\tau$, где $|\tau| \leq \varepsilon$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$,

$$1 - \cos \alpha_r = 1 - \cos r\tau \geq c_2 \tau^2. \quad (11)$$

Если t лежит в ε -окрестности точки $t_{k_0}^{(r)}$, то $t \in R_{s,\varepsilon}$, и поэтому

$$1 - \cos \alpha_s \geq 1 - \cos \varepsilon s \geq 2c_3, \quad (12)$$

где c_3 — положительная постоянная.

Теперь из (9), (11) и (12) следует, что в каждой из ε -окрестностей любой из точек $t_k^{(r)}$, $|k| = 1, 2, \dots, [r/2]$,

$$\begin{aligned} |\varphi(t)|^2 &\leq 1 - c_2 a_r \tau^2 - 2c_3 a_s + O(\theta^{s+1}) \\ &\leq 1 - c_2 a_r \tau^2 - c_3 a_s \\ &\leq 1 - c_4 \theta^r \tau^2 - c_5 \theta^s, \end{aligned}$$

где c_4, c_5 — положительные постоянные и $\tau \leq \varepsilon$.

Оценивая теперь часть интеграла I_4 по ε -окрестностям всех точек $t_k^{(r)}$, $|k| = 1, 2, \dots, [r/2]$, находим, что

$$\begin{aligned} \sigma \sqrt{N} \int_{[-\pi, \varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi] \setminus R_{r, \varepsilon}} |\varphi(t)|^N dt &\leq c_6 \sqrt{\theta^r N} r \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-c_4 \theta^r N \tau^2 - c_5 \theta^s N} d\tau \\ &\leq c_6 r e^{-c_5 \theta^s N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_4 u^2} du \leq c_7 e^{-c_5 \theta^s N}, \end{aligned}$$

где последний интеграл получен заменой переменной $u = \sqrt{\theta^r N} \tau$ и расширением области интегрирования. Правая часть этой цепочки неравенств при $N \rightarrow \infty$ и $\theta \rightarrow 0$ стремится к нулю, так как по условию теоремы $\theta^s N \rightarrow \infty$.

Итак, обе части интеграла I_4 , по областям $R_{r, \varepsilon}$ и $[-\pi, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi] \setminus R_{r, \varepsilon}$, стремятся к нулю, и выбором достаточно большого N можно добиться выполнения неравенства

$$|I_4| \leq \frac{\delta}{4}.$$

Таким образом, доказательство теоремы 4 завершено.

Итак, если $N\theta^s \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, то для S_N справедлива локальная предельная теорема (теорема 4) о сходимости к нормальному распределению на решетке целых чисел. Если же $N\theta^r \rightarrow \lambda r! b_0/b_r$, $\lambda > 0$, то для S_N справедлива теорема 2 о сходимости к распределению Пуассона с параметром λ на решетке целых неотрицательных чисел с шагом r . Таким образом, при промежуточных порядках стремления параметра θ к нулю происходит переход распределения S_N с решетки всех целых чисел на решетку неотрицательных целых чисел с шагом r . Этот переход будет описан в другой статье, так как для изучения деталей этого перехода требуются другие методы исследования.

Список литературы

1. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*. ГИТТЛ, Москва–Ленинград, 1949.
2. Казимиров Н. И., Павлов Ю. Л., Одно замечание о лесах Гальтона–Ватсона. *Дискретная математика* (2000) 12, №1, 47–59.
3. Казимиров Н. И., О некоторых условиях отсутствия гигантской компоненты в обобщенной схеме размещения. *Дискретная математика* (2002) 14, №2, 107–118.
4. Kolchin A. V., On the number of hyperforests. *J. Math. Sci.* (1995) 76, 2250–2258.
5. Kolchin A. V., On the asymptotic behaviour of the number of hyperforests. In: *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics*. VSP, Utrecht, 1996, pp. 285–294.
6. Колчин А. В., Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения. *Дискретная математика* (2003) 15, №4, 148–157.
7. Колчин В. Ф., Один класс предельных теорем для условных распределений. *Литовский матем. сборник* (1968) 8, №1, 111–126.
8. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
9. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
10. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2000.
11. Колчин В. Ф., *Асимптотические методы теории вероятностей*. МИЭМ, Москва, 1984.

12. Мухин А. Б., Локальные предельные теоремы для решетчатых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1991) **36**, №4, 660–674.
13. Myllari T. B., Limit distributions of the number of leaves of a Galton–Watson forest. In: *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics*. VSP, Utrecht, 2002, pp. 257–271.
14. Pavlov Yu. L., *Random forests*. VSP, Utrecht, 2000.
15. Павлов Ю. Л., Предельные теоремы для объемов деревьев непомеченного графа случайного отображения. *Дискретная математика* (2004) **16**, №3, 63–75.
16. Павлов Ю. Л., Предельные теоремы для объемов деревьев в случайном непомеченном лесе. *Дискретная математика* (2005) **17**, №2, 70–86.
17. Тимашёв А. Н., Об асимптотических разложениях в локальных предельных теоремах в равновероятных схемах размещения частиц по различным ячейкам. *Дискретная математика* (2000) **12**, №1, 60–69.
18. Тимашёв А. Н., О распределении числа циклов заданной длины в классе подстановок с известным числом циклов. *Дискретная математика* (2001) **13**, №4, 60–72.
19. Тимашёв А. Н., Случайные свободные деревья и леса с ограничениями на кратности вершин. *Дискретная математика* (2004) **16**, №4, 117–133.
20. Тимашёв А. Н., Большие отклонения для числа деревьев заданного объема и максимального объема дерева в случайном лесе. *Дискретная математика* (2006) **18**, №3, 77–84.

Статья поступила 8.10.2006.