Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Грушо, Е. Е. Тимонина, Некоторые связи между дискретными статистическими задачами и свойствами вероятностных мер на топологических пространствах, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 4, 128–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm77>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 10:39:34

Некоторые связи между дискретными статистическими задачами и свойствами вероятностных мер на топологических пространствах

© 2006 г. А. А. Грушо, Е. Е. Тимонина

В работе исследуются задачи существования состоятельных последовательностей критериев в последовательности конечных пространств. Затронуты задачи существования последовательностей критериев со свойствами, близкими к состоятельности. Эти задачи тесно связаны со свойствами некоторых множеств в тихоновских произведениях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 04-01-00089.

1. Введение

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ — конечное множество, которое определяет последовательность конечных множеств $X, X^2, \dots, X^n, \dots$. На каждом из множеств этой последовательности заданы вероятностные меры

$$\{P_{0,n}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}), (x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in X^n\}, \quad (1)$$

$$\{P_{1,\theta,n}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}), \theta \in \Theta, (x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in X^n\}. \quad (2)$$

Для каждого $n, n = 1, 2, \dots$, рассматривается задача проверки простой гипотезы $H_{0,n}: P_{0,n}$ против сложной альтернативы $H_{1,n}: \{P_{1,\theta,n}, \theta \in \Theta\}$. Последовательность критериев $T_n, n = 1, 2, \dots$, для проверки гипотез $H_{0,n}$ против $H_{1,n}$ называется состоятельной [1], если уровни значимости для этой последовательности критериев стремятся к 0, а мощности критериев стремятся к 1 при каждом значении параметра θ . Введем пространство бесконечных последовательностей

$$X^\infty = \{\alpha = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}, \dots), x_{i_n} \in X, n = 1, 2, \dots\}.$$

Пусть $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \times X^\infty, x_{i_n} \in X, n = 1, 2, \dots$, — элементарное цилиндрическое множество в X^∞ , цилиндрическое множество I_n есть конечное объединение элементарных цилиндрических множеств, а $\mathcal{A}$ — минимальная σ -алгебра, порожденная всеми цилиндрическими множествами. Вероятностные меры (1), (2) можно рассматривать как

вероятностные меры на алгебрах цилиндрических подмножеств пространства бесконечных последовательностей, то есть при любом фиксированном n

$$P_{0,n}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = P_{0,n}((x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \times X^\infty). \quad (3)$$

Меру на алгебре цилиндрических множеств для $\theta \in \Theta$ определяет аналогичная формула

$$P_{1,\theta,n}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = P_{1,\theta,n}((x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \times X^\infty). \quad (4)$$

Пусть вероятностные меры, определяемые формулами (3) и (4), являются согласованными семействами конечномерных распределений (см. [2]). Тогда мера $\{P_{0,n}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})\}$ определяет единственную вероятностную меру P_0 на измеримом пространстве $(X^\infty, \mathcal{A})$.

Для каждого $\theta \in \Theta$ согласованное семейство конечномерных распределений $\{P_{1,\theta,n}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})\}$ определяет единственную вероятностную меру $P_{1,\theta}$ на пространстве $(X^\infty, \mathcal{A})$.

Далее в работе исследуется проблема существования состоятельной последовательности критериев и задача существования последовательности критериев со свойствами, близкими к состоятельности. Эти задачи тесно связаны со свойствами некоторых множеств в топологических пространствах, которые называются тихоновскими произведениями [3, 4].

2. Строго состоятельные последовательности критериев

Определим некоторые характеристики последовательностей критериев T_n , $n = 1, 2, \dots$. Обозначим через S_n , $n = 1, 2, \dots$, последовательность критических множеств для критериев T_n , $n = 1, 2, \dots$, проверяющих гипотезы $H_{0,n}$ против альтернатив $H_{1,n}$. Соответствующие уровни значимости обозначим α_n , $n = 1, 2, \dots$, и пусть $W_n(\theta)$ — функции мощности этих критериев.

Определение 1. Последовательность тестов T_n , $n = 1, 2, \dots$, называется строго состоятельной, если при $\alpha_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ для любого $\theta \in \Theta$ при $n \rightarrow \infty$ выполняется соотношение $W_n(\theta) \rightarrow 1$ и $\bar{S}_n \times X^\infty \supseteq \bar{S}_{n+1} \times X^\infty$, где $\bar{S}_n = X^n \setminus S_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Отметим, что если последовательность тестов строго состоятельна, то она состоятельна [2].

Пусть $\tilde{X}$ — произвольное $\mathcal{A}$ -измеримое множество и

$$\mathfrak{A} = \{\tilde{X} \cap A, A \in \mathcal{A}\}$$

— σ -алгебра на $\tilde{X}$. Будем предполагать, что меры P_0 и $P_{1,\theta}$, $\theta \in \Theta$, сконцентрированы на $(\tilde{X}, \mathfrak{A})$.

Пусть меры P_0 и $P_{1,\theta}$, $\theta \in \Theta$, порождены согласованными конечномерными распределениями и сосредоточены на $\tilde{X}$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Строго состоятельная последовательность тестов T_n , $n = 1, 2, \dots$, для проверки H_0 против $H_{1,n}$ существует тогда и только тогда, когда существует невозрастающая последовательность цилиндрических множеств I_n , $n = 1, 2, \dots$, $I_n \subseteq X^\infty$ такая, что

$$A_0 = \tilde{X} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \right),$$

и для любого $\theta \in \Theta$ существует $A_1(\theta) \in \mathfrak{A}$, при котором

$$\begin{aligned} A_0 \cap A_1(\theta) &= \emptyset, \\ P_0(\tilde{X} \setminus A_0) &= 0, \\ P_{1,\theta}(\tilde{X} \setminus A_1(\theta)) &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем достаточность. Для любого $n = 1, 2, \dots$, цилиндрическое множество I_n будем записывать в виде

$$I_n = D_n \times X^\infty, \quad D_n \subseteq X^n.$$

В качестве критических множеств критериев T_n на X^n возьмем множества

$$S_n = \bar{D}_n, \quad \bar{D}_n = X^n \setminus D_n.$$

По условию теоремы $I_n \supseteq I_{n+1}$ для всех n . Поэтому

$$\bar{S}_n \times X^\infty \supseteq \bar{S}_{n+1} \times X^\infty, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Тем самым последнее условие строгой состоятельности выполнено.

Покажем, что $P_{0,n}(S_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. По определению

$$A_0 \subseteq (D_n \times X^\infty) \cap \tilde{X}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Поэтому

$$\tilde{X} \setminus A_0 \supseteq (\bar{D}_n \times X^\infty) \cap \tilde{X} = (S_n \times X^\infty) \cap \tilde{X}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Из (5) следует, что

$$(\bar{S}_n \times X^\infty) \cap \tilde{X} \supseteq (\bar{S}_{n+1} \times X^\infty) \cap \tilde{X}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n \times X^\infty) \cap \tilde{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (S_n \times X^\infty) \cap \tilde{X} \subseteq \tilde{X} \setminus A_0.$$

Справедливо и обратное включение. Пусть $\omega \in \tilde{X} \setminus A_0$, то есть

$$\omega \in \left(X^\infty \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \right) \right) \cap \tilde{X}.$$

Тогда

$$\omega \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \cap \tilde{X},$$

то есть

$$\begin{aligned} \exists n \omega \notin I_n \cap \tilde{X}, & \quad \omega \in \tilde{X}, \\ \omega \notin (D_n \times X^\infty) \cap \tilde{X}, & \quad \omega \in \tilde{X}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\omega \in (\bar{D}_n \times X^\infty) \cap \tilde{X},$$

и

$$\omega \in (S_n \times X^\infty) \cap \tilde{X}.$$

Отсюда

$$\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (S_n \times X^\infty) \cap \tilde{X}.$$

Из равенства множеств, доказанного выше, следует, что

$$A_1(\theta) \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (S_n \times X^\infty) \right) \cap \tilde{X}.$$

По условию $P_{1,\theta}(A_1(\theta)) = 1$. Значит,

$$1 = P_{1,\theta} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (S_n \times X^\infty) \cap \tilde{X} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,\theta}((S_n \times X^\infty) \cap \tilde{X}).$$

Из условия, что мера $P_{1,\theta}$ сосредоточена на $\tilde{X}$, следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,\theta}(S_n \times X^\infty) = 1.$$

Из равенства

$$P_{1,\theta}(S_n \times X^\infty) = P_{1,\theta,n}(S_n)$$

следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,\theta,n}(S_n) = 1.$$

Докажем необходимость. Если последовательность тестов $T_n, n = 1, 2, \dots$, строго состоятельна, то

$$\bar{S}_n \times X^\infty \supseteq \bar{S}_{n+1} \times X^\infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$I_n = \bar{S}_n \times X^\infty, \quad I_n \supseteq I_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Введем обозначение

$$A_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \cap \tilde{X}.$$

Из условий

$$P_{0,n}(S_n) \leq \alpha_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

следует, что

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{0,n}(S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_0(S_n \times X^\infty). \quad (6)$$

Из непрерывности вероятностной меры P_0 и ее концентрации на $\tilde{X}$ следует, что

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} P_0(S_n \times X^\infty) &= P_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (S_n \times X^\infty)\right) \\ &= P_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (S_n \times X^\infty) \cap \tilde{X}\right).\end{aligned}$$

Из равенства

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (S_n \times X^\infty) \cap \tilde{X} = \tilde{X} \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \tilde{X} \setminus A_0 \quad (7)$$

и равенства (6) следует, что

$$P_0(\tilde{X} \setminus A_0) = 0.$$

Из равенств (7) и $A_1(\theta) \cap A_0 = \emptyset$ получаем равенство

$$A_0 \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (S_n \times X^\infty) \cap \tilde{X}\right) = \emptyset.$$

Из условия, что для любого $\theta \in \Theta$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(\theta) = 1,$$

и равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(\theta) = P_{1,\theta}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (S_n \times X^\infty) \cap \tilde{X}\right) = 1$$

получаем, что в качестве $A_1(\theta)$ для $\theta \in \Theta$ можно взять

$$A_1(\theta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (S_n \times X^\infty) \cap \tilde{X}.$$

Теорема 1 доказана.

Пример 1. Покажем, что состоятельная последовательность критериев может существовать, хотя строго состоятельного критерия не существует.

Пусть $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots)$ — бесконечная последовательность, $\vec{\omega}_n = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ — начальный участок $\vec{\omega}$ длины n . Для любого n обозначим $\vec{\omega}^{(n)} = (\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \dots)$ бесконечную последовательность такую, что $\vec{\omega}_n^{(n)} = \vec{\omega}_n$, $\omega_i \neq \omega_i^{(n)}$ для всех $i > n$. Пусть

$$\tilde{X} = \{\vec{\omega}, \vec{\omega}^{(1)}, \vec{\omega}^{(2)}, \dots\}.$$

Любая точка пространства X^∞ $\mathcal{A}$ -измерима, поэтому и $\tilde{X}$ измеримо. Пусть также

$$P_0(\vec{\omega}^{(i)}) > 0, \quad P_0(\vec{\omega}) = 0, \quad P_{1,\theta}(\vec{\omega}) = 1, \quad \Theta = \{\theta\},$$

$\tilde{X}$ — счетное множество.

Любое цилиндрическое множество I_n , покрывающее носитель меры P_0 , содержит $\vec{\omega}$, поэтому

$$\vec{\omega} \in \bigcap_n I_n = A_0.$$

Следовательно, не существует такого замкнутого A_0 , что $P_0(A_0) = 1$ и $\omega \notin A_0$. Следовательно, не выполняются достаточные условия теоремы и строго состоятельной последовательности критериев нет, но есть состоятельная последовательность критериев с критическими множествами

$$S_n = \bigcup_{k \geq n} \{\omega_k\} \cup \{\vec{\omega}\}.$$

Для этих критериев при $n \rightarrow \infty$

$$W_n(\theta) = P_{1,\theta}(S_n) = 1, \quad P_{0,n}(S_n) \rightarrow 0.$$

Пример 2. Легко построить пример, когда состоятельной последовательности критериев не существует вовсе. Для этого достаточно хотя бы для одного параметра $\theta \in \Theta$ положить $P_0 = P_{1,\theta}$. Тогда если S_n — последовательность критических множеств некоторого критерия и $P_{0,n}(S_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $P_{1,\theta,n}(S_n) \rightarrow 0$ и поэтому последовательность критериев не может быть состоятельной.

3. Открытые покрытия носителя меры P_0

Пусть вероятностные меры P_0 и $P_{1,\theta}$, $\theta \in \Theta$, порождены согласованными семействами распределений, определенными (3) и (4).

Теорема 2. Для существования состоятельной последовательности тестов T_n , $n = 1, 2, \dots$, для проверки $H_{0,n}$ против $H_{1,n}$ достаточно, чтобы существовало такое открытое множество A_0 из X^∞ , что для любого $\theta \in \Theta$ существует $A_1(\theta) \in \mathcal{A}$, при котором

$$A_0 \cap A_1(\theta) = \emptyset, \quad P_0(X^\infty \setminus A_0) = 0, \quad P_{1,\theta}(X^\infty \setminus A_1(\theta)) = 0.$$

Доказательство. В рассматриваемом нами случае тихоновское произведение X^∞ является топологическим пространством со счетной базой. Тогда $A_0 = \bigcup_{n=1}^\infty I_n$ для некоторого набора цилиндрических множеств I_n . Отсюда следует, что множество A_0 является $\mathcal{A}$ -измеримым. Поскольку конечное объединение цилиндрических множеств является цилиндрическим множеством, можно считать, что последовательность цилиндрических множеств I_n монотонно не убывает. Введем обозначения $I_n = D_n \times X^\infty$, $D_n \in X^n$.

Определим последовательность критериев T_n с критическими множествами $S_n = X^n \setminus D_n$. Докажем состоятельность построенной последовательности критериев. Ясно, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_{0,n}(S_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_0(S_n \times X^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_0(X^\infty \setminus (D_n \times X^\infty)) \\ &= P_0 \left(X^\infty \setminus \bigcup_{n=1}^\infty I_n \right) = 0. \end{aligned}$$

Для любого $\theta \in \Theta$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,\theta,n}(S_n) = P_{1,\theta}(X^\infty \setminus A_0).$$

Поскольку $A_1(\theta) \cap A_0 = \emptyset$, заключаем, что $A_1(\theta) \subseteq X^\infty \setminus A_0$. Поэтому

$$P_{1,\theta}(X^\infty \setminus A_0) \geq P_{1,\theta}(A_1(\theta)) = 1.$$

Теорема доказана.

4. Возможность принятия правильного решения на конечном шаге

Лемма 1. Если множество B замкнуто в тихоновском произведении X^∞ , то существует такая невозрастающая последовательность цилиндрических множеств I_n , $n = 1, 2, \dots$, что

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Доказательство. Пусть B замкнуто в тихоновском произведении X^∞ . Тогда $X^\infty \setminus B$ — открытое множество. В силу счетности базы топологии в X^∞

$$X^\infty \setminus B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{I}_n,$$

где $\tilde{I}_n$, $n = 1, 2, \dots$, — некоторые цилиндрические множества.

Конечное объединение цилиндрических множеств является цилиндрическим множеством. Поэтому можно считать, что последовательность $\tilde{I}_n$, $n = 1, 2, \dots$, — монотонно неубывающая последовательность. Пусть $I_n = X^\infty \setminus \tilde{I}_n$. Тогда последовательность I_n , $n = 1, 2, \dots$, — монотонно невозрастающая последовательность цилиндрических множеств. При этом $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Лемма доказана.

Следствие 1. Если множество B замкнуто в тихоновском произведении X^∞ , то B является $\mathcal{A}$ -измеримым.

Пусть существует замкнутое множество A_0 и замкнутое множество A такие, что $A \cap A_0 = \emptyset$. Пусть выполняется условие, что для любого $\theta \in \Theta$ существует $A_1(\theta) \in \mathcal{A}$, при котором

$$A_0 \cap A_1(\theta) = \emptyset, \quad P_0(X^\infty \setminus A_0) = 0, \quad P_{1,\theta}(X^\infty \setminus A_1(\theta)) = 0.$$

Предположим, что $A_1(\theta) \subseteq A$ для любого $\theta \in \Theta$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Существование замкнутых множеств A_0 и A , удовлетворяющих перечисленным выше условиям, необходимо и достаточно для существования состоятельной последовательности критериев T_n , $n = 1, 2, \dots$, с последовательностью критических множеств S_n такой, что существует N , для которого при любом $n \geq N$ справедливо равенство $W_n(\theta) = 1$ для всех $\theta \in \Theta$ и $P_{0,n}(S_n) = 0$.

Доказательство. Докажем достаточность. Множества A_0 и A замкнуты. Поэтому существуют невозрастающие последовательности цилиндрических множеств $I_n, n = 1, 2, \dots$, и $I'_n, n = 1, 2, \dots$, такие, что $I_n = S_n \times X^\infty, S_n \subseteq X^n$, и

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n, \quad A_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} I'_n.$$

По условию теоремы $A \cap A_0 = \emptyset$. Поэтому

$$\emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} (I_n \cap I'_n).$$

Любое пересечение цилиндрических множеств $I_n \cap I'_n = I''_n$ — цилиндрическое множество или пустое множество. Последовательность I''_n монотонно не возрастает. Тогда

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I''_n = \emptyset.$$

Так как X — компакт, тихоновское произведение X^∞ — также компакт. Тогда (см. [3]) существует N такое, что

$$\bigcap_{n=1}^N I''_n = \emptyset.$$

Из условия невозрастания последовательности I''_n следует, что $I''_N = \emptyset$.

Пусть для критерия $T_n, n = 1, 2, \dots$, критическая область равна S_n . Ясно, что $A_0 \subseteq I'_N$ и $I_N \cap I'_N = \emptyset$. Значит, $A_0 \cap I_N = \emptyset$. Тогда $I_N \subseteq X^\infty \setminus A_0$,

$$0 = P_0(X^\infty \setminus A_0) \geq P_0(I_N) = P_{0,N}(S_N).$$

Из того, что $A_1(\theta) \subseteq A \subseteq I_N$ для любого $\theta \in \Theta$, следует, что

$$W_N(\theta) = P_{1,\theta,N}(S_N) = P_{1,\theta}(I_N) \geq P_{1,\theta}(A) \geq P_{1,\theta}(A_1(\theta)) = 1.$$

Докажем необходимость. Пусть $T_n, n = 1, 2, \dots$, — последовательность критериев и S_n — их критические области. Предположим, что существует N такое, что $P_{0,n}(S_n) = 0$ для любого $n \geq N$ и $P_{1,\theta,n}(S_n) = 1$ для всех $\theta \in \Theta$. Тогда, положив $\bar{S}_n = X^n \setminus S_n$, получим, что

$$P_{0,N}(S_N) = P_0(S_N \times X^\infty) = 1 - P_0(\bar{S}_N \times X^\infty).$$

Введем обозначение $A_0 = \bar{S}_N \times X^\infty$. Множество A_0 является замкнутым и

$$P_0(S_N) = P_0(X^\infty \setminus A_0) = 0.$$

Пусть $A = S_N \times X^\infty$. Множество A является замкнутым, $A \cap A_0 = \emptyset$, и для любого $\theta \in \Theta$ положим $A_1(\theta) = A$. Для всех $\theta \in \Theta$

$$1 = P_{1,\theta,N}(S_N) = P_{1,\theta}(A).$$

Тогда для всех $\theta \in \Theta$

$$P_{1,\theta}(X^\infty \setminus A) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Легко построить пример, когда существует строго состоятельный критерий (и, следовательно, состоятельный критерий), но не существует конечного N , для которого возможно с вероятностью 1 правильное решение.

Пример 3. Пусть $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in X^\infty$ — бесконечная последовательность, $\vec{\omega}^{(n)} = (\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \dots)$ — бесконечная последовательность, отличающаяся от $\vec{\omega}$ только в n -й компоненте. Пусть $\Theta = \{\theta(1), \theta(2), \dots\}$ и $\tilde{X} = \{\vec{\omega}, \vec{\omega}^{(1)}, \vec{\omega}^{(2)}, \dots\}$. Положим $P_0(\vec{\omega}) = 1$ и $P_{1, \theta(n)}(\vec{\omega}^{(n)}) = 1$. Так как $\{\vec{\omega}\}$ — замкнутое множество и носители альтернатив с $\{\vec{\omega}\}$ не пересекаются, согласно теореме 1 выполнены условия существования строго состоятельного критерия. Отсюда следует, что состоятельный критерий в этой задаче существует.

Вместе с тем, для любого цилиндрического множества $I_n = \vec{\omega}_n \times X^\infty$, где $\vec{\omega}_n = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ — начальный участок $\vec{\omega}$ длины n , $P_0(I_n) = 1$. Значит, любое критическое множество, вероятность которого в мере $P_{0,n}$ меньше 1, не содержит $\vec{\omega}_n$. Следовательно, это критическое множество не содержит начальный участок длины n последовательности $\vec{\omega}^{(n+1)}$. Поэтому мощность критерия при значении параметра $\theta(n+1)$ равна нулю.

5. Заключение

Связи между конечными и бесконечными моделями могут оказаться полезными при конструировании протоколов и технических устройств, в которых сбои и отклонения от нормального поведения выявляются статистическими методами.

Список литературы

1. Леман Э., *Проверка статистических гипотез*. Наука, Москва, 1964.
2. Неве Ж., *Математические основы теории вероятностей*. Мир, Москва, 1969.
3. Бурбаки Н., *Общая топология. Основные структуры*. Наука, Москва, 1968.
4. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., *Теория вероятностей*. Наука, Москва, 1993.

Статья поступила 3.08.2006.