Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Назаров, Схемы открытого распределения ключа на основе некоммутативной операции, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 4, 148–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm79>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 11:48:34

Схемы открытого распределения ключа на основе некоммутативной операции

© 2006 г. В. В. Назаров

В работе изучаются свойства двух схем открытого распределения ключа, основанных на некоммутативной операции и предложенных В. М. Сидельниковым. В качестве некоммутативной операции рассматриваются операция из семейства, предложенного М. А. Черепневым, а именно, операции в кольцах целых чисел круговых полей, основанные на символе степенного вычета. В работе проведен криптоанализ обеих схем для одного частного случая некоммутативной операции. В случае произвольной операции из вышеупомянутого класса доказана нестойкость первой схемы. Для второй схемы доказана эквивалентность задачи ее вскрытия одной задаче вычислительной алгебраической теории чисел.

1. Введение

Список односторонних функций, используемых в криптографии, весьма невелик. Подавляющее большинство криптографических протоколов основано на отсутствии в настоящее время полиномиальных алгоритмов обращения операций умножения целых чисел и возведения в степень в конечных полях. В настоящей работе изучается операция вычисления символа степенного вычета на предмет ее использования в схеме открытого распределения ключа на основе некоммутативной операции.

Принципиальная схема открытого распределения ключа на основе некоммутативной операции была предложена В. М. Сидельниковым [1]. М. А. Черепнев [2] предложил использовать для этой схемы символы Лежандра и Якоби. О. Н. Василенко заметил, что можно использовать и символ степенного вычета (обобщенный символ Якоби). В работах [2, 3] рассмотрены примеры полиномиально вычислимых функций, на основе данного символа, которые оказались намного более стойкими к обращению, чем все предложенное ранее для данной схемы.

2. Используемый математический и криптографический аппарат

Пусть

$$K = Q(\xi_p)$$

— круговое поле, где p — простое целое рациональное число,

$$\zeta_p = e^{2\pi i/p}.$$

Обозначим $\mathbf{R}$ кольцо целых поля $\mathbf{K}$. Известно, что $\mathbf{R}$ является факториальным кольцом и векторным пространством над $\mathbf{Z}$ с базисом, состоящим из степеней ζ_p , а именно,

$$\mathbf{R} = \langle 1, \zeta_p, \dots, \zeta_p^{p-2} \rangle_{\mathbf{Z}}.$$

Введем также обозначение

$$\lambda = 1 - \zeta_p.$$

Известно, что

$$p = u \cdot \lambda^{p-1},$$

где u — обратимый элемент кольца $\mathbf{R}$.

Пусть $\mathcal{F}$ — простой идеал в $\mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$, причем $\mathcal{F}$ и (a) взаимно просты с (λ) и между собой, пусть также $\mathcal{F}$ — идеал в $\mathbf{R}$, взаимно простой с (a) и (λ) .

Определение 1. Символ степенного вычета (обобщенный символ Якоби) есть

$$\left(\frac{a}{\mathcal{F}} \right)_p = \zeta_p^i \equiv a^{(N(\mathcal{F})-1)/p} \pmod{\mathcal{F}},$$

$$\left(\frac{a}{\mathcal{F}} \right)_p = \prod_{\mathcal{F}|\mathcal{F}, \mathcal{F} \text{ — простые}} \left(\frac{a}{\mathcal{F}} \right)_p^{\nu_{\mathcal{F}}(\mathcal{F})},$$

где

$$\mathcal{F} = \prod_{\mathcal{F}} \mathcal{F}^{\nu_{\mathcal{F}}(\mathcal{F})}$$

Свойство 1. Символ степенного вычета мультипликативен по верхнему и по нижнему аргументам (при соблюдении условий взаимной простоты).

Свойство 2. Пусть $a_1, a_2 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $(a_1), (a_2)$ взаимно просты с (p) , $\mathcal{F}$ — идеал, взаимно простой с (a_i) и (p) ,

$$a_1 \equiv a_2 \pmod{\mathcal{F}}.$$

Тогда

$$\left(\frac{a_1}{\mathcal{F}} \right)_p = \left(\frac{a_2}{\mathcal{F}} \right)_p.$$

Определение 2. Пусть $a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $(a), (b)$ взаимно просты между собой и с (p) . Тогда

$$\left(\frac{a}{b} \right)_p = \left(\frac{a}{(b)} \right)_p.$$

Определение 3. Пусть p — простое целое рациональное число, $x \in \mathbb{Z}$ взаимно просто с p . Тогда частное Ферма от x

$$\Phi_p(x) = \frac{x^{p-1} - 1}{p} \pmod{p}.$$

Легко заметить, что для $x, y \in \mathbb{Z}$, $(x, p) = (y, p) = 1$, выполнено соотношение

$$\Phi_p(xy) \equiv \Phi_p(x) + \Phi_p(y) \pmod{p}.$$

Далее рассмотрим два варианта схемы открытого распределения ключа на основе некоммутативной операции. Оба варианта были предложены В. М. Сидельниковым в [1].

Пусть $(G, *)$ — полугруппа, где $*$ — некоммутативная, ассоциативная, полиномиально вычислимая операция, G_0, G_1, G_2 — подполугруппы, внутри которых операция $*$ коммутативна, A, B — абоненты, $\gamma \notin G_0$, $\mathcal{K}$ — общий секретный ключ.

Схема I.

Абонент А

1. выбирает $a_1, a_2 \in G_0$,
вычисляет $d_A = a_1 * \gamma * a_2$,
отправляет d_A абоненту В.
2. вычисляет $\mathcal{K} = \mathcal{K}_A = a_1 * d_B * a_2$.

Абонент В

1. выбирает $b_1, b_2 \in G_0$,
вычисляет $d_B = b_1 * \gamma * b_2$,
отправляет d_B абоненту А.
2. вычисляет $\mathcal{K} = \mathcal{K}_B = b_1 * d_A * b_2$.

Схема II.

Абонент А

1. выбирает $a_i \in G_i, i = 1, 2$;
вычисляет $d_A = a_1 * a_2$;
отправляет d_A абоненту В.
2. Calculate $\mathcal{K} = \mathcal{K}_A = a_1 * d_B * a_2$.

Абонент В

1. выбирает $b_i \in G_i, i = 1, 2$;
вычисляет $d_B = b_1 * b_2$;
отправляет d_B абоненту А.
2. вычисляет $\mathcal{K} = \mathcal{K}_B = b_1 * d_A * b_2$.

В [3] показано, что в качестве операции $*$ можно использовать операцию в $\mathbf{K}$

$$a * b = a \cdot b \cdot \left(\frac{\eta(a)}{\mu(b)} \right)_p, \quad (1)$$

где $\mu(x), \eta(x)$ — мультипликативные функции такие, что

$$\mu(\zeta_p) = \eta(\zeta_p) = 1.$$

В частности, при $\eta(x) = N(x)$ (где $N(x)$ — норма из $\mathbf{K}$ в $\mathbf{Q}$) и $\mu(x) = \mathcal{F}^{\Phi_p(N(x))}$ получим операцию [2]

$$a * b = a \cdot b \cdot \left(\frac{N(a)}{\mathcal{F}} \right)_p^{\Phi_p(N(b))}. \quad (2)$$

Замечание 1. Вместо $\Phi_p(N(x))$ можно взять любую логарифмическую функцию по модулю p .

3. Криптоанализ схем I, II для операции (1)

Теорема 1. *Схема I с операцией (1) нестойкая.*

*В схеме II с той же операцией * задача нахождения ключа по открытой информации эквивалентна задаче нахождения по открытой информации любого из трех элементов*

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \left(\frac{\eta(a_1)}{\mu(d_B)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(d_B)}{\mu(a_2)} \right)_p = \left(\frac{\eta(b_1)}{\mu(d_A)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(d_A)}{\mu(b_2)} \right)_p, \\ \tau_1 &= \left(\frac{\eta(a_2)}{\mu(b_1)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(b_1)}{\mu(a_2)} \right)_p^{-1} = \frac{a_2 * b_1}{b_1 * a_2}, \\ \tau_2 &= \left(\frac{\eta(b_2)}{\mu(a_1)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(a_1)}{\mu(b_2)} \right)_p^{-1} = \frac{b_2 * a_1}{a_1 * b_2}.\end{aligned}$$

При $\mu = \eta$, $\tau_1 = (\eta(a_2), \eta(b_1))_\lambda$, $\tau_2 = (\eta(b_2), \eta(a_1))_\lambda$ — символы норменного вычета. В этом случае можно считать, что общим секретным ключом, вырабатываемым в схеме, является один заранее выбранный символ норменного вычета, например $\tau_1 = (d_A * d_B) / \mathcal{K}$.

Напомним, что открытой информацией являются элементы d_A и d_B , а также описание коммутирующих подполугрупп G_i , $i = 0$ в схеме I и $i = 1, 2$ в схеме II; кроме того, в схеме I известен элемент γ .

Доказательство. Сначала докажем первое утверждение теоремы.

Заметим, что

$$\begin{aligned}x * y = y * x &\iff x \cdot y \cdot \left(\frac{\eta(x)}{\mu(y)} \right)_p = y \cdot x \cdot \left(\frac{\eta(y)}{\mu(x)} \right)_p \\ &\iff \left(\frac{\eta(x)}{\mu(y)} \right)_p = \left(\frac{\eta(y)}{\mu(x)} \right)_p,\end{aligned}$$

то есть

$$\left(\frac{\eta(x)}{\mu(y)} \right)_p = \left(\frac{\eta(y)}{\mu(x)} \right)_p$$

для всех $x, y \in G_0$.

Положим

$$\mathcal{L}_1 = d_A / \gamma * d_B.$$

Ясно, что $\mathcal{L}_1$ может быть вычислен противником по открытой информации за одно вычисление операции * и одно деление в $\mathbb{Z}[\zeta_p]$. То, что d_A делится нацело на γ (в смысле $\mathbb{Z}[\zeta_p]$) следует из определений d_A и операции *.

Распишем $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}_1$ через обычное умножение, используя определение операции *, ее

ассоциативность и свойства функций η и μ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K} &= a_1 * d_B * a_2 \\
 &= a_1 \cdot b_1 \cdot \gamma \cdot b_2 \cdot a_2 \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\eta(a_1)}{\mu(b_1)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(a_1)}{\mu(b_2)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(a_1)}{\mu(\gamma)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(a_1)}{\mu(a_2)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(b_1)}{\mu(b_2)} \right)_p \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\eta(b_1)}{\mu(\gamma)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(b_1)}{\mu(a_2)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(\gamma)}{\mu(b_2)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(\gamma)}{\mu(a_2)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(b_2)}{\mu(a_2)} \right)_p, \\
 \mathcal{L}_1 &= \frac{d_A}{\gamma} * d_B \\
 &= a_1 \cdot b_1 \cdot \gamma \cdot b_2 \cdot a_2 \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\eta(a_1)}{\mu(b_1)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(a_1)}{\mu(\gamma)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(a_1)}{\mu(a_2)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(a_1)}{\mu(b_2)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(b_1)}{\mu(b_2)} \right)_p \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\eta(b_1)}{\mu(\gamma)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(a_2)}{\mu(b_1)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(\gamma)}{\mu(a_2)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(\gamma)}{\mu(b_2)} \right)_p \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\eta(a_2)}{\mu(b_2)} \right)_p \cdot \left(\frac{\eta(a_1 a_2)}{\mu(\gamma)} \right)_p.
 \end{aligned}$$

Так как $a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{G}_0$, мы видим, что

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\eta(a_2)}{\mu(b_1)} \right)_p &= \left(\frac{\eta(b_1)}{\mu(a_2)} \right)_p, \\
 \left(\frac{\eta(a_2)}{\mu(b_2)} \right)_p &= \left(\frac{\eta(b_2)}{\mu(a_2)} \right)_p,
 \end{aligned}$$

поэтому

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{K} \cdot \tau_1,$$

где

$$\tau_1 = \left(\frac{\eta(a_1 a_2)}{\mu(\gamma)} \right)_p.$$

В силу определения операции $*$ и свойств функции η

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= \left(\frac{\eta(a_1 a_2)}{\mu(\gamma)} \right)_p = \left(\frac{\eta(d_A/\gamma)}{\mu(\gamma)} \right)_p \\
 &= \frac{d_A/\gamma * \gamma}{d_A/\gamma \cdot \gamma} = \frac{d_A/\gamma * \gamma}{d_A}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{K} = \frac{L_1}{\tau_1} = \frac{d_A/\gamma * d_B}{d_A/\gamma * \gamma} \cdot d_A,$$

то есть для вычисления $\mathcal{K}$ по открытой информации противнику нужно произвести два деления в $\mathbf{Z}[\zeta_p]$, одно умножение и два вычисления операции $*$, что и доказывает первое утверждение теоремы.

Обратимся теперь ко второму утверждению теоремы. Выкладками, аналогичными вышеизложенным, можно показать, что

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= d_A \cdot d_B \cdot \tau_0, \\ \mathcal{K} &= (d_A * d_B) \cdot \tau_1^{-1}, \\ \mathcal{K} &= (d_B * d_A) \cdot \tau_2^{-1}.\end{aligned}$$

Так как d_A и d_B находятся в открытом доступе, по этим формулам, зная $\mathcal{K}$, можно найти τ_0, τ_1, τ_2 .

4. Криптоанализ схемы II для операции (2)

Введем обозначение

$$E = \{x \in \mathbb{Z}[\zeta_p] \mid ((x), \mathcal{J}) = ((x), (p)) = 1\},$$

где p – простое целое рациональное число. Тогда $*$ определена на $E \times E$. В разделе 2 мы показали, что данная операция $*$ является частным случаем операции, для которой формулировались теоремы в разделе 3, поэтому мы можем применять второе утверждение теоремы 1.

Определим функции $f(x), g(x)$ на E , полагая

$$\begin{aligned}f(x) &= i, \quad \text{где } i \in [0, p-1], \quad \left(\frac{N(x)}{\mathcal{J}}\right)_p = \zeta_p^i, \\ g(x) &= j, \quad \text{где } j \in [0, p-1], \quad \Phi_p(N(x)) \equiv j \pmod{p}.\end{aligned}$$

Заметим, что при таком определении $f(x), g(x)$ справедливо равенство

$$a * b = a \cdot b \cdot \zeta_p^{f(a) \cdot g(b)}.$$

Предложение 1. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned}f(\zeta_p) &= g(\zeta_p) = 0, \\ f(xy) &\equiv f(x) + f(y) \pmod{p}, \\ g(xy) &\equiv g(x) + g(y) \pmod{p}.\end{aligned}$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Ясно, что

$$N(\zeta_p) = 1,$$

поэтому из определения частного Ферма следует, что

$$\Phi_p(N(\zeta_p)) = \frac{1^{p-1} - 1}{p} \pmod{p} = 0$$

(то есть $g(\zeta_p) = 0$) и из определения символа степенного вычета получаем, что

$$f(\zeta_p) = 0.$$

Второе утверждение верно в силу логарифмического свойства показателя и частных Ферма.

Рассмотрим следующие подмножества E :

$$H_{0,0} = \{x \in E \mid f(x) = g(x) = 0\},$$

$$H_0 = \{x \in E \mid f(x) = 0, g(x) \neq 0\},$$

$$H_p = \{x \in E \mid f(x) \neq 0, g(x) = 0\},$$

$$H_n = \{x \in E \mid f(x) \cdot g(x)^{-1} \equiv n \pmod{p}\}, \quad n = 1, \dots, p-1.$$

Заметим, что введенные множества попарно не пересекаются, а их объединение равно E .

Предложение 2. *Элементы множества $H_{0,0}$ коммутируют со всеми элементами E . Элементы $x_1, x_2 \notin H_{0,0}$ коммутируют тогда и только тогда, когда существует $n_0 \in \{0, 1, \dots, p\}$ такое, что $x_1, x_2 \in H_{n_0}$.*

Доказательство. Из определения следует, что

$$x_1 * x_2 = x_2 * x_1 \iff f(x_1) \cdot g(x_2) \equiv f(x_2) \cdot g(x_1)$$

(здесь и далее все сравнения по модулю p).

Если $x_1 \in H_{0,0}$, то для всех $x_2 \in E$

$$f(x_1)g(x_2) \equiv f(x_2)g(x_1) \equiv 0,$$

поэтому

$$x_1 * x_2 = x_2 * x_1.$$

Таким образом, первое утверждение доказано.

Пусть $x_1, x_2 \in H_{n_0}$. Рассмотрим три случая.

Пусть $n_0 = 0$, тогда

$$f(x_1) = f(x_2) = 0,$$

поэтому

$$f(x_1) \cdot g(x_2) \equiv f(x_2) \cdot g(x_1) \equiv 0.$$

Пусть $n_0 = p$, тогда

$$g(x_1) = g(x_2) = 0.$$

поэтому

$$f(x_1) \cdot g(x_2) \equiv f(x_2) \cdot g(x_1) \equiv 0.$$

Пусть $n_0 \notin \{0, p\}$, тогда

$$f(x_1) \cdot g(x_1)^{-1} \equiv f(x_2) \cdot g(x_2)^{-1}.$$

Домножим обе части сравнения на $g(x_1) \cdot g(x_2) \neq 0$, получим, что

$$f(x_1) \cdot g(x_2) \equiv f(x_2) \cdot g(x_1).$$

Во всех трех случаях

$$f(x_1) \cdot g(x_2) \equiv f(x_2) \cdot g(x_1),$$

поэтому

$$x_1 * x_2 = x_2 * x_1.$$

Таким образом, мы доказали, что если элементы лежат в одном множестве H_{n_0} , то они коммутируют.

Пусть

$$x_1 * x_2 = x_2 * x_1, \quad x_1, x_2, x_3 \notin H_{0,0}.$$

Тогда

$$f(x_1) \cdot g(x_2) \equiv f(x_2) \cdot g(x_1).$$

Рассмотрим два возможных варианта.

Пусть $f(x_1) \cdot g(x_2) \equiv 0$, тогда в силу простоты p либо $f(x_1) \equiv 0$, либо $g(x_2) \equiv 0$. Если $f(x_1) \equiv 0$, то (так как $x_1 \notin H_{0,0}$) справедливо равенство $g(x_1) \not\equiv 0$. Кроме того,

$$f(x_2) \cdot g(x_1) \equiv f(x_1) \cdot g(x_2) \equiv 0.$$

Поэтому $f(x_2) \equiv 0$, то есть $x_2 \in H_0$ (так как $x_2 \notin H_{0,0}$). Если же $g(x_2) \equiv 0$, то аналогично получим, что $x_1, x_2 \in H_p$.

Пусть теперь

$$f(x_1) \cdot g(x_2) \equiv f(x_2) \cdot g(x_1) \not\equiv 0.$$

Тогда обе части равенства можно разделить на ненулевое выражение $g(x_1) \cdot g(x_2)$. Получим, что

$$f(x_1) \cdot g(x_1)^{-1} \equiv f(x_2) \cdot g(x_2)^{-1} \equiv n_0.$$

то есть $x_1, x_2 \in H_{n_0}$ для $n_0 \in [1, p-1]$.

Из предложения 2 ясно, что при данном выборе операции $*$ подполугруппы G_1, G_2 будут подмножествами $H_{n_1} \sqcup H_{0,0}$ и $H_{n_2} \sqcup H_{0,0}$ для некоторых $n_1 \neq n_2$ соответственно. Заметим, что n_i нужно считать известными противнику, так как они могут быть вычислены по произвольному элементу из $G_i \setminus H_{0,0}$.

Теорема 2. Для операции (2) схема Π является нестойкой.

Доказательство. Как мы уже отмечали, можно применить пункт 2 теоремы 1: если мы покажем, что по открытой информации можно быстро вычислять элемент

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \left(\frac{N(a_2)}{\mathcal{F}} \right)_p^{\Phi_p(N(b_1))} \cdot \left(\frac{N(b_1)}{\mathcal{F}} \right)_p^{-\Phi_p(N(a_2))} \\ &= \zeta_p^{f(a_2) \cdot g(b_1) - f(b_1) \cdot g(a_2)} \end{aligned}$$

то этим мы докажем теорему. Таким образом достаточно показать, что по открытой информации можно быстро вычислить

$$\rho = f(a_2) \cdot g(b_1) - f(b_1) \cdot g(a_2) \pmod{p}.$$

Будем считать, что G_i не содержат элементов из $H_{0,0}$ (случай, когда такие элементы есть, рассматривается аналогично).

Введем обозначения

$$\begin{aligned} x_1 &= f(a_1), & y_1 &= f(a_2), & z_1 &= f(b_1), & w_1 &= f(b_2), & c_A &= f(d_A), & c_B &= f(d_B), \\ x_2 &= g(a_1), & y_2 &= g(a_2), & z_2 &= g(b_1), & w_2 &= g(b_2), & e_A &= g(d_A), & e_B &= g(d_B). \end{aligned}$$

здесь x_i, y_i, z_i, w_i — неизвестные, c_A, e_A, c_B, e_B известны (они вычисляются по открытой информации исходя из определения). В таких обозначениях

$$\rho = y_1 z_2 - z_1 y_2 \pmod{p}.$$

Посмотрим, какие уравнения с неизвестными x_i, y_i, z_i, w_i мы можем составить. По предложению 1

$$x_1 + y_1 \equiv c_A,$$

$$x_2 + y_2 \equiv e_A,$$

$$z_1 + w_1 \equiv c_B,$$

$$z_2 + w_2 \equiv e_B.$$

Далее нам нужно будет отдельно рассмотреть следующие случаи:

$$n_i \in \{0, p\}, \quad i = 1, 2,$$

$$n_1 \in \{0, p\}, \quad n_2 \notin \{0, p\} \text{ или } n_2 \in \{0, p\}, \quad n_1 \notin \{0, p\},$$

$$n_i \notin \{0, p\}, \quad i = 1, 2.$$

Мы подробно разберем только последний из названных случаев, в остальных все получается аналогично.

Напишем систему для x_i, y_i, z_i, w_i , получаемую непосредственно из определений множеств H_{n_1}, H_{n_2} . В данном случае она имеет вид

$$x_1 \equiv x_2 \dots n_1,$$

$$y_1 \equiv y_2 \dots n_2,$$

$$z_1 \equiv z_2 \dots n_1,$$

$$w_1 \equiv w_2 \dots n_2. \tag{3}$$

Подставляя уравнения системы (4) в систему (3), получим, что

$$n_1 x_2 + n_2 y_2 \equiv c_A,$$

$$x_2 + y_2 \equiv e_A,$$

$$n_2 w_2 \equiv c_B,$$

$$z_2 + w_2 \equiv e_B.$$

Это линейная система в поле $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ с определителем $(n_1 - n_2)^2 \neq 0$. Поэтому она имеет единственное решение. Решая ее, получаем определенные выше неизвестные x_2, y_2, z_2, w_2 и далее по уравнениям системы (4) находим x_1, y_1, z_1, w_1 .

В случаях, когда один или оба из n_1, n_2 лежат в $\{0, p\}$, мы получим другие системы вида (4) и соответственно другие системы вида (5). Но во всех случаях определитель системы вида (5) будет ненулевым и все неизвестные будут найдены.

Список литературы

1. Сидельников В. М., Черепнев М. А., Ященко В. В., Системы открытого распределения ключей на основе некоммутативных полугрупп. *ДАН СССР* (1993), 332, 566–567.
2. Черепнев М. А., Схемы открытого распределения ключа на основе некоммутативной группы. *Дискретная математика* (2003) 15, №2, 47–51.
3. Черепнев М. А., Схемы открытого распределения ключа на основе некоммутативной операции. В сб.: *Тез. докл. XIII Международной конф. «Проблемы теоретической кибернетики»*. Казань, 2002, с. 190.

Статья поступила 9.09.2004.