Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Гашков, И. С. Сергеев, О применении метода аддитивных цепочек к инвертированию в конечных полях, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 4, 56–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm80>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:54:48

О применении метода аддитивных цепочек к инвертированию в конечных полях

© 2006 г. С. Б. Гашков, И. С. Сергеев

Получены оценки сложности и глубины булевых схем для инвертирования в нормальных и полиномиальных базисах конечных полей. В частности, показано, что для инвертирования в нормальном базисе поля $GF(2^n)$ можно построить булеву схему со сложностью не более $(\lambda(n-1) + (1 + o(1))\lambda(n)/\lambda(\lambda(n)))M(n)$ и глубиной не более $(\lambda(n-1) + 2)D(n)$, где $M(n)$, $D(n)$ — соответственно сложность и глубина схемы для умножения в этом базисе, а $\lambda(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05-01-00994, программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ 5400.2006.1, и программой фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики», проект «Синтез и сложность управляющих систем».

1. Введение

Вопросы эффективной реализации арифметических операций в больших конечных полях характеристики два имеют существенное значение в криптографических приложениях (см., например, [1]). В [2, 3] показано, что инвертирование в поле $GF(2^n)$ может выполняться булевой схемой глубины $O(\log n)$ и сложности $n^{O(1)}$, однако константы в знаках $O(1)$ достаточно велики, что делает эти методы непригодными для практического применения.

Многие используемые на практике методы инвертирования в таких полях сводят задачу инвертирования к возведению в степень с показателем вида $2^n - 1$. Действительно, для любого $x \in GF(2^n)^*$ (то есть $x \in GF(2^n)$ и $x \neq 0$) справедливо тождество Ферма

$$x^{-1} = x^{2^n-2} = (x^2)^{2^{n-1}-1}.$$

Задача возведения в степень может быть сформулирована в терминах аддитивных цепочек (об аддитивных цепочках см. [4], раздел 4.6.3).

Мы покажем, что наилучшим в определенном классе методов инвертирования в поле $GF(2^n)$ является метод Брауэра (1939 г.), сводящийся к построению кратчайшей аддитивной цепочки для $n - 1$. Необходимые цепочки для первых нескольких миллионов значений n давно подсчитаны (в частности, при построении цепочек для $n \leq 1000$ можно пользоваться рекуррентным правилом из [4], с. 530).

Идея применения аддитивных цепочек к задачам возведения в степень и инвертирования высказывалась явно во многих работах, и во многих работах использовалась неявно. В [5] отмечено, что метод инвертирования [6] является частным случаем метода Брауэра. Однако эта работа не очень проста для чтения и, по-видимому, малоизвестна (мы узнали о ее существовании уже в процессе подготовки нашей статьи). Во всяком случае, в выполненных позже работах [7, 8] нет упоминаний о методе Брауэра, а полученные там результаты фактически им перекрываются. Далее мы приводим простое построение схем для инвертирования в конечных полях, основанное на использовании методов Брауэра и Яо [9].

2. Аддитивные цепочки и метод Брауэра

Аддитивной цепочкой для числа n называется любая начинающаяся с 1 последовательность натуральных чисел $a_0 = 1, a_1, \dots, a_m = n$, в которой каждое число является суммой каких-то двух предыдущих чисел (возможно совпадающих), то есть для всех $i \geq 1$ выполнено равенство $a_i = a_j + a_k$, $j, k < i$. Под длиной цепочки $a_0, a_1, \dots, a_m$ понимается число m . Через $l(n)$ обозначим длину кратчайшей аддитивной цепочки для n .

Возведение в степень может быть интерпретировано как построение аддитивной цепочки для показателя степени. Удвоения в аддитивной цепочке соответствуют возведению в квадрат, а прочие сложения — умножениям.

Аддитивная цепочка называется линейной, если каждый ее элемент равен сумме предыдущего элемента и какого-то еще, то есть для всех $i \geq 1$ выполнено равенство $a_i = a_{i-1} + a_j$, $j < i$. Длина кратчайшей линейной цепочки обозначается через $l^*(n)$.

Метод Брауэра (см., например, [4], раздел 4.6.3) позволяет по заданной линейной цепочке $1, a_1, \dots, a_m = n$ построить аддитивную цепочку для $2^n - 1$ следующим образом. Выписывается последовательность

$$1 = 2^1 - 1, 2^{a_1} - 1, \dots, 2^{a_m} - 1 = 2^n - 1,$$

затем в промежутки между числами вставляются последовательности удвоений. Так, между соседними числами $2^{a_i} - 1$ и $2^{a_{i+1}} - 1$, где $a_{i+1} = a_i + a_j$, помещается последовательность

$$2(2^{a_i} - 1), 2^2(2^{a_i} - 1), \dots, 2^{a_{i+1}-a_i}(2^{a_i} - 1) = 2^{a_{i+1}} - 2^{a_j}.$$

Поскольку

$$2^{a_{i+1}} - 1 = (2^{a_{i+1}} - 2^{a_j}) + (2^{a_j} - 1),$$

итоговая последовательность является линейной аддитивной цепочкой длины $n + m - 1$, состоящей из $n - 1$ удвоений и m сложений.

Метод Брауэра можно использовать и с произвольной цепочкой для n . При этом, если $a_i = a_j + a_k$, то для вычисления $2^{a_i} - 1$ последовательность удвоений необходимо вести от $2^{a_j} - 1$ или от $2^{a_k} - 1$. Число сложений в построенной цепочке также будет совпадать с длиной исходной цепочки для n , но число удвоений может быть больше, чем $n - 1$. Цепочки, для которых методом Брауэра строится цепочка ровно с $n - 1$ удвоениями, называются цепочками Ханзена (линейные цепочки являются частным случаем цепочек Ханзена, см. [4]). В цепочке, построенной методом Брауэра с исходной цепочкой Ханзена, все нелинейные шаги являются удвоениями.

Из метода Брауэра следует, что

$$l^*(2^n - 1) \leq n + l^*(n) - 1.$$

Это утверждение обобщается также на цепочки Ханзена, но гипотеза Шольца—Брауэра, утверждающая, что верно неравенство

$$l(2^n - 1) \leq n + l(n) - 1,$$

по-видимому, до сих пор не доказана и не опровергнута. Также, видимо, не доказано неравенство

$$l(n) \geq \lambda(n) + \lambda(v(n)),$$

где $\lambda(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$, а $v(n)$ — вес числа n , то есть количество единиц в его двоичной записи, хотя А. Шёнхаге в 1975 г. доказал (см. [4, 10]), что

$$l(n) \geq \lambda(n) + \lambda(v(n)) + O(1).$$

Известно (это тоже теорема Ханзена), что для любого c существуют n такие, что $l(n) < l^*(n) - c$, но практически требование линейности не накладывает существенных ограничений, поскольку для всех $n \leq 12508$ справедливо равенство $l(n) = l^*(n)$, то есть для разумных значений n всегда существует линейная аддитивная цепочка минимальной длины (см. [4]).

Метод Брауэра сводит задачу инвертирования в поле $GF(2^n)$ к построению кратчайшей аддитивной цепочки для $n - 1$. Длина этой цепочки соответствует числу сложений при вычислении $2^n - 2$, которое, в свою очередь, соответствует числу выполняемых умножений при возведении элемента поля в $(2^n - 2)$ -ю степень. Число возведений в квадрат при этом гораздо больше и, по меньшей мере, равно $n - 1$. Однако возведение в квадрат в поле $GF(2^n)$ существенно проще умножения, и при выборе стандартного базиса, соответствующего неприводимому трехчлену или пятичлену, имеет сложность $O(n)$. Но еще удобнее при применении метода Брауэра в поле $GF(2^n)$ пользоваться нормальными базисами, так как возведение в квадрат в нормальном базисе практически не требует вычислительных затрат (осуществляется посредством циклического сдвига коэффициентов, см., например, [6]). Если через $M(GF(2^n))$ обозначить сложность умножения в нормальном базисе поля $GF(2^n)$, то сложность метода Брауэра для инвертирования в поле $GF(2^n)$ можно оценить как $l(n - 1)M(GF(2^n))$.

В частности, для сложности $I(GF(2^n))$ инвертирования в поле $GF(2^n)$ справедливы следующие оценки:

$$I(GF(2^n)) \leq \begin{cases} 9M(GF(2^n)), & n \leq 127, \\ 10M(GF(2^n)), & n \leq 191, \\ 11M(GF(2^n)), & n \leq 379, \\ 12M(GF(2^n)), & n \leq 607, \\ 13M(GF(2^n)), & n \leq 1087, \end{cases}$$

и т. д., но для некоторых конкретных значений n оценки реально оказываются лучше.

Далее проводится сравнение общего метода Брауэра, применяемого к аддитивным цепочкам различных типов, с методами [7, 8]. Обозначение $[i_{k-1}, i_{k-2}, \dots, i_0]$ будет применяться для записи числа $i = i_{k-1}2^{k-1} + i_{k-2}2^{k-2} + \dots + i_0$ в двоичной системе счисления (все $i_j \in \{0, 1\}$).

3. Бинарный алгоритм и метод Ито–Цуйи

Пусть $n = [n_{k-1}, n_{k-2}, \dots, n_0]$. Используя схему Горнера, можно записать формулу

$$n = (\dots (2n_{k-1} + n_{k-2})2 + \dots + n_1)2 + n_0,$$

по которой выписывается универсальная аддитивная цепочка для числа n (вычисления производятся слева направо) $a_0 = n_{k-1} = 1$, $a_1 = 2a_0 = 2$, $a_2 = a_1 + n_{k-2}$, $a_3 = 2a_2$, $\dots$, $a_{2k-4} = a_{2k-5} + n_1$, $a_{2k-3} = 2a_{2k-4}$, $a_{2k-2} = a_{2k-3} + n_0$. Удалив из построенной цепочки повторяющиеся элементы, получим окончательно цепочку, соответствующую так называемому бинарному (перебирающему разряды слева направо) алгоритму [4].

Чтобы сразу избежать повторений, можно воспользоваться следующим правилом. Удалим из двоичной записи числа n единицу в старшем разряде, перед остальными единицами вставим двойки, а все нули заменим на двойки. В итоге получится слово из символов 1 и 2, в котором единицы означают прибавление 1, а двойки — удвоение. Например, для числа $n = 19 = [10011]$ получается слово 222121, которому соответствует аддитивная цепочка 1, 2, 4, 8, 9, 18, 19.

Длина бинарной аддитивной цепочки для числа n равна $\lambda(n) + \nu(n) - 1$. Цепочка строится при помощи $\lambda(n)$ удвоений и $\nu(n) - 1$ прочих сложений (в данном случае, прибавлений единицы). Таким образом, построенная на основе данной аддитивная цепочка для числа $2^n - 1$ имеет длину $n + \lambda(n) + \nu(n) - 2$, и содержит $\lambda(n) + \nu(n) - 1$ сложений.

Такой же результат дает метод [6], предложенный в 1988 г. Ито и Цуйи (и с тех пор неоднократно цитируемый, см., например, [1]). Способ построения аддитивной цепочки по методу Ито–Цуйи основан на представлении

$$2^n - 1 = (2^{2^{k-1}} - 1)2^{[n_{k-2}, \dots, n_0]} + 2^{[n_{k-2}, \dots, n_0]} - 1.$$

Продолжая раскладывать $2^{[n_{k-2}, \dots, n_0]} - 1$ и т. д., получаем тождество

$$2^n - 1 = (2^{2^{k-1}} - 1)2^{[n_{k-2}, \dots, n_0]} + n_{k-2}(2^{2^{k-2}} - 1)2^{[n_{k-3}, \dots, n_0]} + \dots + n_1(2^{2^1} - 1)2^{n_0} + n_0, \quad (1)$$

поскольку $2^{n_0} - 1 = n_0$. Воспользуемся тем, что

$$2^{2^l} - 1 = (2 + 1)(2^2 + 1) \dots (2^{2^{l-1}} + 1),$$

и приведем выражение (1) к виду

$$2^n - 1 = (\dots (((2^{2^{k-2}} + 1)2^{n_{k-2}2^{k-2}} + n_{k-2})(2^{2^{k-3}} + 1)2^{n_{k-3}2^{k-3}} + n_{k-3}) \dots) (2 + 1)2^{n_0} + n_0. \quad (2)$$

Формула записана так, что вычисления должны производиться слева направо. Аналогично выпишем формулу, которой следует метод Брауэра с использованием бинарной аддитивной цепочки для n (для краткости, в дальнейшем будем называть его просто бинарным алгоритмом в том случае, когда имеется в виду построение цепочки для $2^n - 1$)

$$2^n - 1 = (\dots (((2^{n_{k-1}} + 1)2^{n_{k-2}} + n_{k-2})(2^{[n_{k-1}, n_{k-2}]} + 1)2^{n_{k-3}} + n_{k-3}) \dots) (2^{[n_{k-1}, \dots, n_1]} + 1)2^{n_0} + n_0. \quad (3)$$

Отсюда видно, что два указанных метода различаются лишь порядком выполнения операций. Для большей наглядности выпишем формулы для первого и второго методов для конкретного значения $n = 19 = [10011]$:

$$2^{19} - 1 = ((2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)2^2 + 1)(2 + 1)2 + 1,$$

$$2^{19} - 1 = ((2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)2 + 1)(2^9 + 1)2 + 1,$$

где жирным шрифтом выделены единицы, соответствующие разрядам числа 19.

Укажем другой способ построения бинарной цепочки для n , не использующий схемы Горнера. Она получается удалением повторяющихся элементов из цепочки $1, 2, [n_1, n_0], 4, [n_2, n_1, n_0], \dots, [n_{k-2}, \dots, n_0], 2^{k-1}, [n_{k-1}, \dots, n_0]$ и также использует $\lambda(n)$ удвоений и $\nu(n) - 1$ прочих сложений — некоторые удвоения являются нелинейными шагами.

4. Метод множителей

О методе множителей и, как следствие, о существовании для некоторых n цепочек, более коротких, чем бинарные, было известно еще в XIX веке (см. [4]).

Пусть $n = st$ и построены аддитивные цепочки для s и t

$$1, a_1, \dots, a_i = s; \quad 1, b_1, \dots, b_j = t.$$

Тогда для n выписывается аддитивная цепочка

$$1, a_1, \dots, a_i = s, sb_1, sb_2, \dots, sb_j = n, \quad (4)$$

длина которой равна сумме длин аддитивных цепочек для сомножителей. Если для вычисления s и t используются бинарные цепочки, то длина цепочки для n равна $\lambda(s) + \lambda(t) + \nu(s) + \nu(t) - 2$. При $n = 15$ метод множителей впервые улучшает результат бинарного метода (с 6 до 5).

Применительно к построению цепочки для $2^n - 1$ метод множителей означает, что в вычислениях используется разложение

$$2^n - 1 = (2^s - 1)(2^{s(t-1)} + 2^{s(t-2)} + \dots + 2^s + 1).$$

Цепочка для первого сомножителя строится одним из двух методов предыдущего параграфа. Теперь заметим, что если в равенствах (2), (3) заменить в левой части $2^n - 1$ на $2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1$, а затем в обеих частях двойки в основаниях заменить на 2^s , то формулы останутся справедливыми. Таким образом мы можем построить цепочку для $2^{s(t-1)} + 2^{s(t-2)} + \dots + 2^s + 1$, используя $s(t-1)$ удвоений и $\lambda(t) + \nu(t) - 1$ сложений. Так как в цепочке для $2^s - 1$ используются $s - 1$ удвоений и $\lambda(s) + \nu(s) - 1$ сложений, окончательно получаем цепочку для $2^n - 1$, состоящую из $n - 1$ удвоений и $\lambda(s) + \lambda(t) + \nu(s) + \nu(t) - 2$ сложений. Отметим также, что если в качестве базового здесь выбирается бинарный метод, то итоговая формула для вычисления $2^n - 1$ совпадает с формулой, построенной сразу по аддитивной цепочке (4) для n .

Приведем пример для $n = 15, s = 3, t = 5$:

$$2^{15} - 1 = ((2 + 1)2 + 1)((2^3 + 1)(2^6 + 1)2^3 + 1).$$

Точно в таком виде метод множителей был фактически переоткрыт в [7]. Естественно, в качестве базового метода выбирался метод Ито–Цуйи.

Метод множителей и метод Такаги–Ёшики–Такаги

В вышеизложенном виде метод множителей применим только к составным числам n , но в случае, когда n — простое число, цепочку для n можно получить из цепочки для $n - 1$ присоединением одного элемента. Для небольших n хорошо себя зарекомендовало следующее правило (обобщенный метод множителей):

- (1) если n — составное число, то применяется обычный метод множителей к разложению $n = pq$, где p — наименьший простой делитель n .
- (2) в противном случае, если n — простое число, перейти к $n - 1$.

Это правило может быть применено рекурсивно к получающимся в разложении сомножителям.

Известно, что первый шаг указанного обобщенного метода множителей неоптимален лишь для ста пяти значений n из диапазона $[2, 1000]$. Более точно, значения $l(n)$ в этом диапазоне могут быть вычислены посредством формулы, приведенной на с. 530 в [4],

$$l(n) = \min\{l(n-1) + 1, l_n\} - \delta_n,$$

где $l_n = \infty$ при простом n и $l_n = l(p) + l(q)$ при $n = pq$, причем p — минимальный простой делитель n , а $\delta_n = 0$ во всех случаях, кроме ста пяти значений n , для которых $\delta_n = 1$ (список таких n приведен на с. 531 в [4]).

Вскоре после появления этого алгоритма Такаги, Ёшики и Такаги в [7] предложили его обобщение (ТҮТ-алгоритм), подобное обобщенному методу множителей.

В основе ТҮТ-алгоритма лежит тот факт, что если $n = pq + h$, $h \geq 0$, то для n может быть построена аддитивная цепочка длины $l_p + l_q + h$, где l_p и l_q — длины аддитивных цепочек для p и q . Авторы [7] ведут изложение не в терминах аддитивных цепочек, здесь мы даем переформулировку описания их алгоритма. Цепочка для pq строится по методу множителей, затем к ней дописываются члены $pq + 1, pq + 2, \dots, pq + h = n$.

Таким образом, предлагается перебирать всевозможные представления n в виде $pq + h$ и искать то, на котором достигается минимум $l_p + l_q + h$, где величины l_p и l_q получены тем же ТҮТ-алгоритмом (если дальнейшее разложение не производится, то методом Ито–Цуйи). Величина

$$l_n = \min\{l_p + l_q + h \mid n = pq + h\}$$

является точной оценкой сложности ТҮТ-алгоритма (то есть числа сложений в цепочке для $2^n - 1$). Нетрудно заметить, что на самом деле

$$l_n = \min\{l_p + l_q \mid n = pq\}, l_{n-1} + 1\},$$

(ср. с обобщенным методом множителей). В качестве базового выбирается алгоритм Ито–Цуйи. Аддитивная цепочка для $2^n - 1$ строится по формуле

$$2^n - 1 = (\dots((2^{2^q} - 1)2 + 1)\dots)2 + 1, \quad (5)$$

где число дополнительных пар удвоений и прибавлений единиц равно h .

Для $n \leq 1000$ окончательное разложение (когда в соответствии с ТҮТ-алгоритмом выписаны разложения для сомножителей p и q , и т. д.) обычно оказывается очень коротким. Так, для $n = 383$ разложение выглядит так:

$$383 = (38 \times 5 + 1) \times 2 + 1,$$

и это самое длинное из приведенных авторами разложений. В данном примере

$$l_{383} = l_{38} + l_5 + l_2 + 2 = 13,$$

где $l_{38} = 7$, $l_5 = 3$, $l_2 = 1$ из метода Ито–Цуйи.

Перебор получается не таким и большим из-за того, что h входит в оценку сложности линейным образом, оно почти всегда равно 0 или 1. Так, среди примеров оптимальных с точки зрения ТУТ-алгоритма разложений в конце работы [7] лишь один раз встречается $h = 2$ (для $n = 863 = 41 \times 21 + 2$).

5. ТУТ-алгоритм и метод Брауэра

Заметим, что в оценках сложности ТУТ-алгоритма ничего не изменится, если в качестве базового выбрать не метод Ито–Цуйи, а бинарный метод. Действительно, по имеющемуся ТУТ-разложению для n можно построить аддитивную цепочку так, как было указано выше, и применить общий метод построения цепочки для $2^n - 1$ из цепочки для n , а это и будет эквивалентно по сложности применению ТУТ-алгоритма. Например, в случае $n = 863$ строятся бинарные цепочки 1, 2, 4, 5, 10, 20, 40, 41 и 1, 2, 4, 5, 10, 20, 21, и окончательно цепочка 1, 2, 4, 5, 10, 20, 40, 41, $41 \cdot 2$, $41 \cdot 4$, $41 \cdot 5$, $41 \cdot 10$, $41 \cdot 20$, $41 \cdot 21 = 861$, 862, 863 длины 15, как и в ТУТ-алгоритме.

Поэтому метод Такаги–Ёшики–Такаги никогда не превосходит метод Брауэра, который годится для произвольной линейной аддитивной цепочки (и вообще для любой цепочки, если количество удвоений несущественно), а не только для линейных цепочек специального вида, соответствующих ТУТ-алгоритму. Более того, мы покажем, что алгоритм [7] в некоторых случаях уступает методу Брауэра.

Первое, что обращает на себя внимание — это способ построения цепочки для $2^{m+h} - 1$, если $2^m - 1$ уже вычислено (см. (5)), который требует h дополнительных сложений. Ведь можно отдельно вычислить $2^h - 1$ с помощью l_h сложений и затем воспользоваться формулой

$$2^{m+h} - 1 = (2^m - 1)2^h + (2^h - 1),$$

которая требует $l_h + 1 = O(\log h)$ дополнительных сложений, что дает выигрыш уже при $h = 4$. Еще лучше использовать при построении цепочки для $2^h - 1$ слагаемые, вычисляемые в цепочке для $2^m - 1$.

Рассмотрим пример, показывающий, какое влияние это оказывает на сложность ТУТ-алгоритма. Из таблицы, приведенной в [7] для некоторых значений n , мы находим среди оптимальных разложений $767 = 59 \times 13$. Это значит, что число $n = 59$ является неделимым с точки зрения ТУТ-алгоритма (то есть сразу должен применяться метод Ито–Цуйи). При помощи бинарного метода легко проверяется, что $l_{59} = 9$. Рассмотрим разложение $59 = 7 \times 8 + 3$, которое в ТУТ-методе отсеивается в силу того, что $l_7 + l_8 + 3 = 10 > 9$. Однако можно воспользоваться формулой

$$2^{59} - 1 = (2^{56} - 1)2^3 + (2^3 - 1) = (2^{56} - 1)2^3 + 2 + 5,$$

согласно которой требуется два дополнительных сложения вместо трех, поскольку числа 2 и 5 встречаются в аддитивной цепочке для $2^7 - 1$, выписываемой методом Ито–Цуйи на первом шаге ТУТ-алгоритма (см. (2)). Полученная цепочка имеет длину 9. А теперь применим бинарный метод в качестве базового. Он позволяет обойтись лишь одним дополнительным сложением, так как $2^3 - 1$ в бинарном методе вычисляется при построении

цепочки для $2^7 - 1$. Цепочка для $n = 59$, которая используется в том же самом разложении с базовым бинарным методом, 1, 2, 3, 6, 7, 14, 28, 56, 59, имеет длину 8, что доказывает неоптимальность ТУТ-алгоритма.

Из этого примера можно увидеть, что, хотя разница между методом Ито–Цуйи и бинарным вариантом метода Брауэра кажется несущественной, однако бинарный метод лучше адаптирован к построению цепочек для разложений, используемых в ТУТ-алгоритме, поскольку вычисляет достаточно много промежуточных членов вида $2^k - 1$ (а именно, при каждом сложении).

Укажем еще примеры, когда ТУТ-алгоритм уступает методу Брауэра. В списке оптимальных разложений из [7] можно найти неделимые числа k с весом $v(k) \geq 5$. Известно, что бинарный метод всегда оптимален для чисел с весом 3 и оптимален для чисел веса 4, за исключением нескольких случаев (см., например, [4]), но, вообще говоря, неоптимален для чисел веса 5 и более. Так, среди примеров [7] было обнаружено четыре числа веса 5, это $k = 59, 115, 173, 213$. Легко проверяется (например, используя сведения на с. 530 в [4]), что для всех этих чисел бинарная цепочка не является кратчайшей, следовательно, ТУТ-алгоритм неоптимален также при $n \in \{115, 173, 213\}$. Можно также заметить среди чисел, неделимых для ТУТ-алгоритма, числа 83 и 149 веса 4, обладающие цепочкой, более короткой, чем бинарная.

В табл. 1 приводятся значения чисел умножений в полях $GF(2^n)$ при $n \leq 300$ для инвертирования методом Брауэра в сравнении с ТУТ-методом. Последний неоптимален уже при $n = 24$, а при $n = 348$ числа умножений, требуемых этими методами, различаются на 2.

6. О глубине и сложности булевых схем для инвертирования

Если мы хотим построить булеву схему для инвертирования из схем для умножения указанным выше методом, то представляет интерес задача минимизации глубины такой схемы (определение булевой схемы и ее глубины см., например, в [11]).

Минимальная глубина, очевидно, будет достигаться, когда глубина соответствующей аддитивной цепочки для $2^n - 1$ будет минимальной. Игнорируя, как и выше, элементы удвоения, можно, повторяя доказательство теоремы Брауэра, получить, что глубина аддитивной цепочки для $2^n - 1$ не превосходит глубины цепочки для числа n .

Очевидно, что минимальная глубина цепочки для n равна $\lceil \log_2 n \rceil$. Пример цепочки с такой глубиной и длиной $\lambda(n) + v(n) - 1$ приведен в конце §3.

Например, для $n = 27$ цепочкой минимальной длины 6 является цепочка 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, но более длинная цепочка 1, 2, 3, 4, 8, 11, 16, 27 имеет меньшую глубину 5. По ней можно построить цепочку для вычисления $2^{27} - 1$, в которой все неудваивающие шаги имеют вид $1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, 2^4 - 1, 2^8 - 1, 2^{11} - 1, 2^{16} - 1, 2^{27} - 1$, и которая также имеет глубину 5, если игнорировать удвоения.

Если для умножения в нормальном базисе применить метод Мессис–Омура [12], то можно построить схему для умножения глубины $1 + \lceil \log_2(2n - 1) \rceil$ и сложности $O(n^3)$. Поэтому можно построить в том же базисе схему для инвертирования глубины $\lceil \log_2 n \rceil (1 + \lceil \log_2(2n - 1) \rceil)$ и сложности $O(n^3 \log n)$ [6]. Для так называемых нормальных базисов низкой сложности (см., например, [13]) последняя оценка очевидно понижается до $O(n^2 \log n)$. Используя метод сведения умножения в нормальных базисах к умножению в стандартном базисе (см. [13]), можно построить в любом нормальном базисе схему для

Таблица 1. Число умножений для инвертирования в полях $GF(2^n)$

n	Тут	Брауэр
4 5	2	2
6 7 9	3	3
8 10 11 13 17	4	4
12 14–16 18 19 21 25 33	5	5
20 22 23 26–29 31 34 35 37 41 49 65	6	6
24	7	7
30 32 36 38–40 42 43 45 46 50–53 55 57 61 66 67 69		
73 81 97 129		
44 47	8	8
54 56 58 59 62–64 68 70 71 74–77 79 82 83 85 86 89		
91 98–101 103 105 109 113 121 130 131 133 137 145	9	9
161 193 257		
48 60 78 84 87 93		
72 80 88 90 92 94 96 102 104 106 107 110–112 114		
115 117 118 120 122–127 132 134–136 138 139 141	10	10
146–149 151 153 154 157 162 163 165 166 169 171		
177 181 194–197 199 201 205 209 217 225 241 258		
259 261 265 273 289		
95 108 116 119 150 155 164 167 173 185		
128 140 142–144 152 156 158–160 170 172 175 176	11	11
178 179 182–184 186–188 190 191 198 200 202 203		
206–208 210 211 213 218–223 226 227 229 232 233		
235 239 242–247 249 251 253 256 260 262 263 266		
267 269 271 274 275 277 281 290–293 295 297 298	12	12
168 174 180 189 204 212 214–216 228 230 231 234		
237 250 282 294 299		
192 224 236 238 240 248 252 254 255 264 268 270	11	11
272 276 278–280 283 285–288 296		
284 300	12	

умножения глубины $O(\log n)$ и сложности $O(n^2/\log n)$. Для этого достаточно перейти от нормального базиса к стандартному, что всегда можно сделать с помощью схемы сложности $O(n^2/\log n)$ и глубины $\log n + O(1)$, реализующей соответствующее линейное преобразование (такие схемы можно построить методом О. Б. Лупанова [11]), выполнить умножение в стандартном базисе любым методом быстрого умножения и вернуться в исходный нормальный базис. Для некоторых нормальных базисов низкой сложности (например, оптимальных нормальных и вообще гауссовых нормальных базисов) можно доказать, что сложность умножения равна $O(n \log n \log \log n)$ при глубине $O(\log n)$ (см. [5, 13, 14]), однако такие базисы существуют не для всех n .

Из сказанного вытекает, что для инвертирования в нормальных базисах всегда можно построить схемы сложности $O(n^2)$ и глубины $O(\log^2 n)$, а для некоторых n оценка сложности понижается до $O(n \log^2 n \log \log n)$ (с довольно большой мультипликативной константой в знаке O).

Метод, позволяющий строить для некоторых значений n схемы глубины, меньшей, чем $\lambda^2(n)$, указан в [15].

7. Об инвертировании в произвольных полях $GF(q^n)$

В случае поля $GF(q^n)$, $q > 2$, согласно [6] для инвертирования можно вычислить $y = x^{(q^n-1)/(q-1)}$, заметить, что $y \in GF(q)$, так как $y^{q-1} = x^{q^n-1} = 1$, и применить формулу

$$x^{-1} = (x^{(q^n-1)/(q-1)})^q y^{-1},$$

справедливость которой проверяется путем сравнения степеней в обеих частях равенства

$$-1 = q(q^{n-1} - 1)/(q - 1) - (q^n - 1)/(q - 1).$$

Вычисление y^{-1} и умножение на него при малых q делается быстро, так как $y \in GF(q)$. Остается вычислить $x^{(q^n-1)/(q-1)}$. Предполагая, что возведение в степень q делается быстро (это заведомо так при использовании нормальных базисов), и игнорируя эти операции, можно перенести доказательство теоремы Брауэра на этот случай и получить оценку для числа умножений при вычислении $x^{(q^n-1)/(q-1)}$ в том же виде $l(n-1)$, что и в случае $q = 2$.

Для вычисления $y = x(x^{(q^n-1)/(q-1)})^q$ нужна еще одна операция умножения, но более простая, чем обычное умножение, так как в ней надо вычислить только одну компоненту произведения, ведь $y \in GF(q)$.

Подобная схема используется при инвертировании в полях составной степени $GF(2^{nm})$ (как, например, в [8]). Если $q = 2^m$, то инвертирование в основном поле сводится к возведению в степень $(q^n-1)/(q-1)$ в поле $GF(q^n)$ и инвертированию в поле $GF(q)$. В [8] параметр m выбирается небольшим (фактически рассматривают $m = 4, 8$), для возведения в степень $(q^n-1)/(q-1)$ используется ТУТ-алгоритм. Так, представляя поля $GF(2^{384})$ и $GF(2^{480})$ как $GF(q^{96})$ и $GF(q^{120})$ (то есть $m = 4$), авторы [8] получают сложность 11 умножений в обоих случаях, тогда как непосредственное применение даже метода Брауэра требует 12 умножений. Если же выбрать $m = 8$ (что допускается) и рассматривать поля $GF(q^{48})$ и $GF(q^{60})$, то ТУТ-алгоритм не приводит к уменьшению сложности. Однако, применение метода Брауэра в этих полях позволяет улучшить оценки [8] до 10.

В [5] для инвертирования в поле $GF(q^n)$, $q > 2$, применяется схема, не использующая инвертирования в $GF(q)$ и имеющая несколько большую сложность. Эта схема основана на использовании формулы

$$x^{-1} = x^{(q^n-1)-1} x^{q-2}.$$

Вычисление x^{q^n-1-1} проводится аналогично тому, как это было указано выше при использовании метода Брауэра.

8. Быстрое инвертирование в полиномиальном базисе

Используя для инвертирования в полиномиальном базисе поля $GF(q^n)$ быструю модификацию расширенного алгоритма Евклида совместно с алгоритмом Шёнхаге умножения многочленов (см., например, [10]), можно вычислить $g^{-1} \bmod f$ с помощью $O(n \log^2 n \log \log n)$ операций в поле $GF(q)$. Однако мультипликативный коэффициент в этой оценке велик (несколько сотен), и указанный алгоритм затруднительно реализовать в виде булевой схемы. Поэтому для практического применения лучше подходит, как и в случае нормальных базисов, метод Брауэра. При этом операция Фробениуса $g^{q^m} \bmod f$, согласно [14], может быть выполнена как модулярная композиция

$g(h) \bmod f$, где $h = x^{q^m} \bmod f$. Действительно, если

$$g(x) = \sum_{i=0}^s a_i x^i,$$

то

$$\begin{aligned} g^{q^m}(x) &= \sum_{i=0}^s a_i^{q^m} x^{q^m i} = \sum_{i=0}^s a_i x^{q^m i} \bmod f \\ &= \sum_{i=0}^s a_i h^i \bmod f = g(h) \bmod f. \end{aligned}$$

Число операций в поле $GF(q)$, необходимых для выполнения модулярной композиции (см., например, [14]), равно

$$S(n) = O(n^{(\omega+1)/2}) + 6n^{1/2}(M(n) + O(n)),$$

где ω — экспонента матричного умножения, наилучшая верхняя оценка для которой получена Виноградом и Купершмитом (см., например, [10]). Для схемной реализации множитель 6 в последнем слагаемом можно опустить. Главный член в этой оценке при малых q и $M(n) = o(n^{\omega/2})$ есть $O((n^{(\omega+1)/2}) = O(n^{1.688})$, а с учетом результата Пана и Хуана о матричном умножении (см. также [10]) он равен $O(n^{1.667})$. Для глубины схем умножения матриц справедлива логарифмическая оценка (см., например, [16]). Однако мультипликативные константы во всех этих оценках, по-видимому, велики, и это обстоятельство, вероятно, делает указанный метод практически неприемлемым даже при n порядка 1000.

На практике используются методы с худшей асимптотикой. Так, для $q = 2$, основываясь на методе Штрассена (см., например, раздел 4.6.4 в [4]), можно построить схему для модулярной композиции с фиксированным многочленом сложности

$$S(n) = O(n^{\log_2 \sqrt{14}} / (\log n)^{\log_2(7/4)}).$$

Для $q > 2$ оценка сложности имеет вид

$$S(n) = O(n^{\log_2 \sqrt{14}})M(GF(q)).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для инвертирования можно построить схему сложности

$$I(GF(q^n)) \leq l(n-1)M(GF(q^n)) + nM(GF(q)) + I(GF(q)) + F(GF(q^n)) + l(n-1)S(n)$$

и глубины

$$O(\log^2 n)D_M(GF(q)) + D_F(GF(q^n)) + D_I(GF(q)),$$

где $D_M(GF(q))$ — глубина схемы умножения и $D_I(GF(q))$ — глубина схемы для инвертирования в поле $GF(q)$, а $F(GF(q^n))$ и $D_F(GF(q^n))$ — сложность и глубина схемы для возведения в степень q в поле $GF(q^n)$.

Для доказательства можно взять минимальную цепочку $1 = a_0, \dots, a_r = n-1$, $r = l(n-1)$, и построить цепочку для $(q^{n-1} - 1)/(q - 1)$, состоящую из чисел

$(q^{a_i} - 1)/(q - 1)$, в промежутки между которыми вставлены результаты операции умножения на числа q^{a_j} (аналогично случаю $q = 2$, см. §2), в используемой аддитивной записи соответствующие преобразованиям Фробениуса, так как

$$(q^{a_i} - 1)q^{a_j}/(q - 1) + (q^{a_j} - 1)/(q - 1) = (q^{a_i+a_j} - 1)/(q - 1).$$

Значит, для вычисления $x^{(q^{n-1}-1)/(q-1)}$ нужны операции Фробениуса для показателей $a_0, \dots, a_r$ (возможно, не все). Операция Фробениуса $g^{q^m} \bmod f$ может быть выполнена как модулярная композиция $g(h) \bmod f$, где $h = x^{q^m} \bmod f$. Всего нужно не более $l(n - 1)$ модулярных композиций, если уже вычислены многочлены $h_i = x^{q^{a_i}} \bmod f$, $i = 1, \dots, r$.

Вычисление

$$y = x(x^{(q^{n-1}-1)/(q-1)})^q$$

выполняется схемой сложности

$$F(GF(q^n)) + M(GF(q^n)),$$

а вычисление

$$x^{-1} = y^{-1}(x^{(q^{n-1}-1)/(q-1)})^q$$

выполняется схемой сложности $I(GF(q)) + nM(GF(q))$, так как $(x^{(q^{n-1}-1)/(q-1)})^q$ уже вычислено, а умножение элемента поля $GF(q^n)$ на элемент поля $GF(q)$ выполняется со сложностью $nM(GF(q))$.

Сложность предвычислений (если имеется в виду программная реализация) можно оценить как

$$l(n - 1)S(n) + F(GF(q^n)).$$

Действительно, поскольку $a_i = a_j + a_k$,

$$\begin{aligned} h_i = x^{q^{a_i}} \bmod f &= x^{q^{a_j+a_k}} \bmod f = (x^{q^{a_j}})^{q^{a_k}} \bmod f \\ &= (x^{q^{a_j}} \bmod f)^{q^{a_k}} \bmod f = h_j^{q^{a_k}} \bmod f = h_j(h_k) \bmod f, \end{aligned}$$

и для вычисления коэффициентов многочленов $h_i = x^{q^{a_i}} \bmod f$, $i = 1, \dots, r$, достаточно вычислить $x^q \bmod f$ и выполнить $r = l(n - 1)$ модулярных композиций.

Уточнения в случае $q = 2$

Выбирая вместо минимальной цепочки обычную линейную бинарную цепочку, состоящую из $\nu(n)$ прибавлений единицы и $\lambda(n) - 1$ удвоений (в отличие от §3, считаем, что элемент 2 цепочки получается из 1 прибавлением единицы), получаем следующий результат.

Теорема 2. *Можно построить схему для инвертирования в полиномиальном базисе сложности*

$$\begin{aligned} I(GF(2^n)) &\leq (\lambda(n - 1) + \nu(n - 1) - 1)M(GF(2^n)) \\ &\quad + \nu(n - 1)K(GF(2^n)) + (\lambda(n - 1) - 1)S(n), \end{aligned}$$

где $M(GF(2^n))$ — сложность умножения в рассматриваемом полиномиальном базисе поля $GF(2^n)$, а $K(GF(2^n))$ — сложность возведения в квадрат в том же базисе поля $GF(2^n)$. В

случае использования базиса, заданного неприводимым трехчленом или пятичленом, при $S(n) = O(n^\beta)$, $\beta < 2$, справедлива оценка

$$I(GF(2^n)) \leq (\lambda(n-1) + \nu(n-1))M(GF(2^n)) + \nu(n-1)K(GF(2^n)) + ((2-\beta)\lambda(n-1) + O(1))S(n).$$

Если неприводимый трехчлен имеет вид $1 + x^k + x^n$, $k \leq n/2$, то

$$I(GF(2^n)) = O(n^2 \log \log n / \log n).$$

Действительно, если цепочка $1 = a_0, \dots, a_r = n-1$, $r = \lambda(n-1) + \nu(n-1) - 1$, построена бинарным методом, то можно выполнить инвертирование с помощью $\lambda(n-1) + \nu(n-1) - 1$ умножений и $\lambda(n-1) + \nu(n-1) - 1$ операций Фробениуса, из которых $\nu(n-1)$ являются возведениями в квадрат. Для реализации остальных $\lambda(n-1) - 1$ операций Фробениуса выполняем $\lambda(n-1) - 1$ операций модулярного умножения, используя (а при программной реализации одновременно вычисляя) необходимые для этого многочлены $x^{2^{a_i}} \bmod f$, где a_i — такие элементы цепочки, которые в ней на следующем шаге удваиваются. Эти вычисления также выполняются посредством $\lambda(n-1) + \nu(n-1) - 1$ операций модулярного умножения, из которых $\nu(n-1)$ операций являются возведениями в квадрат. Заметим, что в случае программной, а не схемной реализации при этом уменьшается используемая память, так как вычисление последовательности $x^{2^{a_i}} \bmod f$ требует запоминания только одного многочлена во время всего вычисления, а другой многочлен надо помнить во время вычисления промежуточных экспонент $g^{2^{a_i-1}} \bmod f$.

Так как возведения в квадрат выполняются отдельно, все используемые операции Фробениуса являются возведениями в степени 2^{a_i} , где последовательность a_i растет как геометрическая прогрессия: $a_{i+1} \geq 2a_i$. Воспользуясь этим, укажем еще возможность уменьшения сложности вычислений в случае использования базиса, заданного неприводимым трехчленом или пятичленом.

Пусть сложность операции модулярной композиции есть $S(n) = O(n^\beta)$, $\beta < 2$, и k таково, что $a_k < n^{\beta-1} \leq a_{k+1}$. Тогда возведения в степени 2^{a_i} , $i \leq k$, можно выполнить путем повторного возведения в квадрат со сложностью

$$\sum_{i=1}^k O(a_i n) = O(a_k n) = O(n^\beta),$$

а остальные $(2-\beta) \log_2 n$ возведений в степени 2^{a_i} , $i \geq k$, выполняем с помощью модулярной композиции. Тогда получаем оценку сложности инвертирования

$$I(GF(2^n)) \leq (\lambda(n-1) + \nu(n-1))M(GF(2^n)) + 2\nu(n-1)K(GF(2^n)) + (2(2-\beta)\lambda(n-1) + O(1))S(n).$$

При схемной реализации множители 2 в последних слагаемых можно убрать, так как вычисление многочленов $x^{2^{a_i}} \bmod f$ выполнять не нужно.

В частности, в случае использования для матричного умножения алгоритма сложности $O(n^3 / \log n)$ получаем для сложности программного инвертирования квадратичную оценку (если сложность алгоритма умножения многочленов удовлетворяет оценке $M(n) = O(n^{1.4})$). Аналогичную оценку можно получить и для схемной реализации, причем с глубиной $O(\log^2 n)$. Оба этих результата легко получить и без использования

модулярной композиции, применяя вместо нее упоминавшиеся в §6 схемы сложности $O(n^2/\log n)$ и глубины $\log_2 n + O(1)$ для вычисления операций Фробениуса (линейных операторов) g^{2^k} . Однако в случае программной реализации это требует большого расхода памяти, так как матрицы каждой используемой операции Фробениуса надо запоминать, а даже для одной из них это требует $O(n^2)$ памяти. Для выполнения модулярной композиции требуется только $O(n^{3/2})$ памяти.

Сложность схемы инвертирования можно уменьшить с квадратичной до величины $O(n^2 \log \log n / \log n)$, используя схемы возведения в квадрат по модулю неприводимого трехчлена $1 + x^k + x^n$, $k \leq n/2$, сложности не выше $4n$ и глубины 2. Для этого операции возведения в степени 2^{a_i} , $a_i \leq n \log_2 \log_2 n / \log_2^2 n$, выполняем путем повторного возведения в квадрат со сложностью $O(n^2 \log \log n / \log n)$, а остальные операции Фробениуса (их не более $\log_2 \log_2 n$) выполняем со сложностью $O(n^2 \log \log n / \log n)$. Эта оценка справедлива и для схемной сложности, но глубина схемы получается равной $O(n \log \log n / \log^2 n)$, даже если использовать в качестве неприводимого базисного многочлена f трехчлен.

Известно, что

$$K(GF(2^n)) \leq 2M(n) + O(n), \quad M(GF(2^n)) \leq 3M(n) + O(n),$$

где $M(n)$ — сложность умножения бинарных многочленов, а если базис задан неприводимым трехчленом или пятичленом, то $K(GF(2^n)) = O(n)$. В случае существования неприводимого трехчлена степени n обязательно существует трехчлен вида $1 + x^k + x^n$, $k \leq n/2$.

Для уменьшения глубины схемы инвертирования можно вместо стандартной бинарной аддитивной цепочки использовать приведенную в конце §3 аддитивную цепочку для n глубины $\lceil \log_2 n \rceil$ и длины $\lambda(n) + \nu(n) - 1$. Тогда получается схема глубины не более $\lceil \log_2 n \rceil (D_M(GF(2^n)) + D_S(n))$ и сложности

$$I(GF(2^n)) \leq (\lambda(n-1) + \nu(n-1) - 1)(M(GF(2^n)) + S(n)),$$

где $D_M(GF(2^n))$ — глубина схемы умножения в рассматриваемом полиномиальном базисе поля $GF(2^n)$, $S(n)$ и $D_S(n)$ — верхние оценки сложности и глубины схем для операций Фробениуса в том же базисе. При выборе конкретного значения n и конкретного базиса эту общую оценку можно усилить, оптимизировав схемы для преобразований Фробениуса по глубине и сложности. Например, если

$$f = 1 + x^k + x^n, \quad k \leq n/2,$$

то сложность и глубину схемы инвертирования можно немного уменьшить, заменив первые $O(\log \log n)$ операций Фробениуса повторным возведением в квадрат.

В практически интересном случае, когда n по порядку не больше нескольких сотен, даже при использовании для умножения метода Карацубы

$$M(GF(2^n)) > S(n).$$

Поэтому для минимизации сложности инвертирования методом Брауэра вместо бинарной цепочки для n надо, как и в случае нормального базиса, взять цепочку длины $l(n)$. Для практического построения подобной цепочки можно применить 2^k -арный метод (также принадлежащий Брауэру, см. раздел 4.6.3 в [4]) построения асимптотически минимальной цепочки для числа n , в которой все неудваивающие шаги имеют вид

$$a_{i+1} = a_i + a_l, \quad a_l \leq \log_2 n / \log_2 \log_2 n.$$

Число неудваивающих шагов в этой цепочке равно

$$l - \lambda(n) = O(\log n / \log \log n),$$

где l — ее длина. В алгоритме инвертирования этим шагам соответствуют операции Фробениуса $g^{2^{a_i}} \bmod f$, $a_i \leq \log_2 n / \log_2 \log_2 n$. Так как каждую из них можно выполнить повторным возведением в квадрат, при выборе в качестве f неприводимого трехчлена суммарную сложность этих операций Фробениуса можно оценить как $O(n \log^2 n / \log^2 \log n)$, а суммарную глубину можно оценить как $O(\log^2 n / \log^2 \log n)$. Для остальных $\lambda(n)$ операций Фробениуса суммарная сложность оценивается как $\lambda(n)S(n)$, а суммарная глубина — как $\lambda(n)D_S(n)$. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Можно построить схему инвертирования глубины не более*

$$lD_M(GF(2^n)) + \lambda(n-1)D_S(n) + O(\log^2 n / \log^2 \log n)$$

и сложности не более

$$lM(GF(2^n)) + \lambda(n-1)S(n) + O(n \log^2 n / \log^2 \log n),$$

где

$$l = \lambda(n-1) + \lambda(n)/\lambda(\lambda(n)) + O(\log n \log \log \log n / \log^2 \log n)$$

— длина цепочки для $n-1$, построенной оптимизированным 2^k -арным методом Брауэра (см. [4]).

В [4] доказано, что в любой цепочке длины l для числа n число неудваивающих шагов не больше $4(l - \lambda(n))$. Если кратчайшая цепочка для n обладает таким свойством, что все неудваивающие шаги имеют вид $a_{i+1} = a_i + a_1$, $a_l \leq \log_2 n / \log_2 \log_2 n$, то указанные выше оценки будут справедливы и для $l = l(n-1)$.

9. Одновременная минимизация аддитивной цепочки по длине и по глубине

Используя метод Яо [9], докажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Существует аддитивная цепочка для числа n глубины не более $\lambda(n) + 2$ и асимптотически минимальной длины $\lambda(n) + \lambda(n)/\lambda(\lambda(n)) + O(\log n \log \log \log n / \log^2 \log n)$. Как следствие, можно построить схему для инвертирования в полиномиальном базисе сложности*

$$I(GF(2^n)) \leq (\lambda(n-1) + (1 + o(1))\lambda(n)/\lambda(\lambda(n)))(M(GF(2^n)) + S(n))$$

и глубины

$$D_I(GF(2^n)) \leq (\lambda(n-1) + 2)(D_M(GF(2^n)) + D_S(n)),$$

а в нормальном базисе — схему сложности

$$I(GF(2^n)) \leq (\lambda(n-1) + (1 + o(1))\lambda(n)/\lambda(\lambda(n)))M(GF(2^n))$$

и глубины

$$D_I(GF(2^n)) \leq (\lambda(n-1) + 2)D_M(GF(2^n)).$$

Действительно, пусть $4 \leq n$. Положим

$$k = \lambda(\lambda(n)) - 3\lambda(\lambda(\lambda(n))) + 3, \quad s = \lfloor (\lambda(n) - 1)/k \rfloor,$$

и представим n в виде

$$n = 2^{\lambda(n)} + a2^{ks} + n_1, \quad n_1 = \sum_{i=0}^{s-1} a_i 2^{ki} = \sum_{j=1}^{2^k-1} j B_j, \quad 0 \leq a, a_i < 2^k,$$

где

$$B_j = \sum_{a_i=j} 2^{ki}.$$

Пусть

$$M_j = \{i \mid a_i = j\}, \quad i = 1, \dots, 2^k - 1.$$

Тогда

$$M_i \cap M_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad \sum_{j=1}^{2^k-1} |M_j| \leq s.$$

Для непустого множества M_j положим

$$r_j = \max\{i \mid i \in M_j\}.$$

Построим цепочку для n , оценивая глубину ее элементов. Сначала построим цепочку $1, 2, 4, \dots, 2^{\lambda(n)}$. Глубина элемента 2^i в ней равна i . Для вычисления B_j (при непустом M_j) строим цепочку, складывая числа 2^{ik} , $i \in M_j$, в порядке возрастания и помещая каждый очередной член этой цепочки после очередного слагаемого 2^{ik} в цепочку степеней двойки. Глубина последнего вставленного элемента не больше $kr_j + 1$, а число добавленных элементов равно $|M_j| - 1$, $j = 1, \dots, 2^k - 1$. Общее число всех добавленных элементов не превосходит s .

Для вычисления jB_j применяем метод множителей: цепочки для B_j уже построены, а цепочку для jB_j строим при помощи линейной цепочки для j глубины $\lceil \log_2 j \rceil$ и длины $\lambda(j) + v(j) - 1$, $j = 1, \dots, 2^k - 1$. Общее число добавленных элементов не превосходит $3k2^{k-1}$. Глубина, с которой вычисляется jB_j , равна $kr_j + 1 + \lceil \log_2 j \rceil$, если $|M_j| > 1$, и на 1 меньше, когда $|M_j| = 1$, и всегда не превосходит $k(r_j + 1) + 1$. Аналогично вычисляем $a2^{ks}$ (в случае, когда $a \neq 0$) с глубиной $ks + \lceil \log_2 a \rceil \leq \lambda(n)$, добавляя не более $2k$ элементов.

Пусть числа j_i пронумерованы в порядке убывания r_{j_i} . Складываем числа $j_i B_{j_i}$ в порядке убывания индекса i (то есть сами числа — в порядке возрастания), тем самым вычисляя n_1 посредством добавления не более $2^k - 2$ элементов в цепочку. В силу того, что $r_{j_i} \leq s - i$, где $i = 1, \dots$, глубина, с которой вычисляется $j_i B_{j_i}$, не больше $k(r_{j_i} + 1) + 1 \leq k(s - i + 1) + 1 \leq \lambda(n) - i + 1$. Поэтому глубина вычисления n_1 не превосходит $\lambda(n) + 1$.

Наконец, вычисляем сумму $n_1 + a2^{ks} + 2^{\lambda(n)} = n$. Заключительная часть цепочки выглядит так: $\dots, n_1, \dots, a2^{ks}, \dots, 2^{\lambda(n)}, 2^{\lambda(n)} + a2^{ks}, 2^{\lambda(n)} + a2^{ks} + n_1 = n$. Глубина построенной цепочки не превосходит $\lambda(n) + 2$, а длина не превосходит

$$\lambda(n) + s + 3k2^{k-1} + 2k + 2^k = \lambda(n) + \lambda(n)/\lambda(\lambda(n)) + O(\log n \log \log \log n / \log^2 \log n).$$

Используя эту цепочку, методом Брауэра можно построить цепочку для $2^n - 1$, состоящую из $\lambda(n) + \lambda(n)/\lambda(\lambda(n)) + O(\log n \log \log \log n / \log^2 \log n)$ обычных шагов (то есть не удвоений), при этом, если не считать удвоений, глубина такой цепочки не больше $\lambda(n) + 2$. Например, применяя метод теоремы 2, можно построить для числа 127 цепочку 1, 2, 4, 5, 8, 10, 15, 16, 32, 48, 64, 112, 127 длины 12 и глубины 8. Методом из конца §3 строится цепочка 1, 2, 3, 4, 7, 8, 15, 16, 31, 32, 63, 64, 127 длины 12 и глубины 7. Метод Брауэра для чисел $2^n - 1$ дает цепочку 1, 2, 3, 4, 7, 14, 28, 56, 63, 126, 127 длины 10 и глубины 9.

Оценка глубины $\lambda(n) + 2$ в теореме 2, вообще говоря, неупрощаема. Легко проверяется, что единственная цепочка для $n = 2^m - 1$ глубины $\lambda(n) + 1 = m$ имеет вид бинарной цепочки из конца §3 $1, 2, \dots, 2^i - 1, 2^i, \dots, 2^{m-1} - 1, 2^{m-1}, 2^m - 1$, и длина ее равна $2m - 2 = 2\lambda(n)$.

Список литературы

1. Agnew G. B., Beth T., Mullin R. C., Vanstone S. A., Arithmetic operations in $GF(2^m)$. *J. Crypt.* (1993) **6**, 3–13.
2. Litow B., Davida G., $O(\log n)$ parallel time finite field inversion. *Lecture Notes Computer Sci.* (1988) **319**, 74–80.
3. Von zur Gathen J., Inversion in finite fields using logarithmic depth. *J. Symb. Comput.* (1990) **9**, 175–183.
4. Кнут Д., *Искусство программирования, т. 2: Получисленные алгоритмы*. Вильямс, Москва, 2004.
5. Von zur Gathen J., Nöcker M., Exponentiation in finite fields: theory and practice. *Lecture Notes Computer Sci.* (1997) **1255**, 88–113.
6. Itoh T., Tsujii S., A fast algorithm for computing multiplicative inverses in $GF(2^n)$ using normal basis. *Inform. Comput.* (1988) **78**, 171–177.
7. Takagi N., Yoshiki J., Takagi K., A fast algorithm for multiplicative inversion in $GF(2^n)$ using normal basis. *IEEE Trans. Comput.* (2001) **50**, №5, 394–398.
8. Chang K., Kim H., Kang J., Cho H., An extension of TYT algorithm for $GF((2^n)^m)$ using precomputation. *Inform. Proc. Lett.* (2004) **92**, 231–234.
9. Yao A. C., On the evaluation of powers. *SIAM J. Comput.* (1976) **5**, 100–103.
10. Von zur Gathen J., Gerhard J., *Modern computer algebra*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
11. Лупанов О. Б., *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*. Изд-во МГУ, Москва, 1984.
12. Massey J. L., Omura J. K., *Apparatus for finite fields computation*. US Patent Application 1986, №4587627.
13. Болотов А. А., Гашков С. Б., О быстром умножении в нормальных базисах конечных полей. *Дискретная математика* (2001) **13**, №3, 3–31.
14. Gao S., von zur Gathen J., Panario D., Shoup V., Algorithm for exponentiation in finite field. *J. Symb. Comput.* (2000) **29**, 879–889.
15. Гашков С. Б., Хохлов Р. А., О глубине логических схем для операций в полях $GF(2^n)$. *Чебышевский сборник* (2003) **4**, №4(8), 59–71.
16. Pan V., Complexity of parallel matrix computations. *Theor. Comput. Sci.* (1987) **54**, 65–85.

Статья поступила 20.03.2006.