Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Жуков, Об одном классе клеточных схем, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 4, 84–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm81>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 12:05:10

Об одном классе клеточных схем

© 2006 г. Д. А. Жуков

В работе предложен класс клеточных схем, T -схем, для которого удалось связать нижнюю оценку площади с глубиной: чем меньше глубина схемы, тем больше должна быть ее площадь. Приведены примеры T -схем логарифмической глубины для задач вычисления n префиксных сумм, сумм и разности двух n -разрядных чисел. Показано, что площадь этих схем есть $O(n \log n)$ и оптимальна по порядку.

1. Введение

Клеточная схема [4, 11] имеет вид прямоугольника на плоскости, составленного из клеточных элементов. Будем называть схему правильной, если все ее входы и выходы расположены по краям. Предполагается, что все клеточные схемы в этой работе правильные. Под сложностью схемы понимается занимаемая ею площадь. Будем считать, что длина клеточной схемы измеряется по горизонтали, а ширина — по вертикали. Длину схемы S обозначим $l(S)$, а ширину — $h(S)$. Тогда площадь $A(S)$ схемы S равна $l(S)h(S)$.

Клеточный элемент имеет вид единичного квадрата. На его сторонах расположены входы и выходы, не более одного на каждой стороне. Клеточный элемент назовем функциональным, если он реализует нетождественную функцию, и коммутационным, если он реализует тождественные функции. Кроме функциональных и коммутационных элементов, имеется изолирующий клеточный элемент без входов и выходов. Предполагается, что клеточные элементы реализуют функции k -значной логики и каждая функция из P_k , существенно зависящая не более чем от двух переменных, реализуется некоторым функциональным элементом. Используемый далее базисный набор элементов изображен на рис. 1. В верхнем ряду приведены три функциональных элемента (реализующие константу c , одноместную функцию $g \in P_k$ и двуместную функцию $f \in P_k$) и изолирующий элемент. В нижнем ряду представлены коммутационные элементы. При построении схем допускаются повороты клеточных элементов на углы, кратные $\pi/2$.

Цепью в клеточной схеме назовем всякую последовательность клеточных элементов, в которой выход каждого элемента, кроме последнего, соединен с входом следующего. Длиной цепи будем называть число содержащихся в ней функциональных элементов. Цепь наибольшей длины среди цепей, соединяющих входы и выходы схемы, назовем максимальной. Глубиной клеточной схемы назовем длину ее максимальной цепи. Глубину схемы S будем обозначать $d(S)$. С. С. Кравцов [4] показал, что для любой булевой функции n аргументов можно построить реализующую ее клеточную схему площади $\lesssim (9/2)2^n$, и что для почти всех функций n аргументов площадь их реализации клеточными схемами не менее $(1/4)2^n$. Позднее А. Альбрехт [1] установил, что функция

Рис. 1. Базисные клеточные элементы

Шеннона

$$A(n) = \max_f \min_S A(S),$$

где максимум берется по всем булевым функциям f от n переменных, а минимум — по всем вычисляющим f клеточным схемам S , имеет асимптотику

$$A(n) \sim \sigma 2^n,$$

где константа σ удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{4} \leq \sigma \leq \frac{9}{2}.$$

Нижние оценки в этих неравенствах установлены мощностным методом [7]: число схем меньшей площади меньше числа всех булевых функций n аргументов.

Всякую клеточную схему можно рассматривать как укладку некоторой схемы из функциональных элементов в прямоугольную решетку. Произвольный узел решетки может либо не принадлежать схеме, либо быть функциональным элементом, либо быть вершиной пути, соединяющего какой-то вход (схемы или ее функционального элемента) с каким-то выходом (схемы или ее функционального элемента). Если базисный набор клеточных элементов содержит реализующий две тождественные функции коммутационный элемент (рис. 1, крайний справа в нижнем ряду), то через не являющийся функциональным элементом узел решетки допускается прохождение не более двух путей из укладки. Такая укладка в [5] названа 2-вложением. Если же все базисные коммутационные элементы реализуют не более одной тождественной функции, то через узел решетки может проходить не более одного пути (1-вложение [5]). Укладки схем везде ниже будут правильными 2-вложениями. Очевидно, что длина и ширина укладки равны длине и ширине схемы.

Укладкам графов в прямоугольные решетки посвящена обширная литература (см., например, обзор в монографии Дж. Ульмана [8]). Универсальные нижние оценки площади как правило используют обилие ребер графа схемы. Известны нетривиальные результаты и для разреженных графов, в частности, для деревьев.

Рассмотрим плоскую область D , у которой на границе ∂D выбраны n точек $x_1, \dots, x_n$ с попарным расстоянием, не меньшим единицы. В [13] доказано, что если $x_1, \dots, x_n$ — листья полного двоичного дерева T , лежащего на плоскости внутри D , а область D выпуклая, то сумма длин ребер дерева T не меньше чем $\Omega(n \log n)$. Заметим, что в статье используются следующие обозначения O , Ω и Θ : $f(n) = O(g(n))$, если найдутся

постоянная $c > 0$ и число n_0 такие, что для всех $n \geq n_0$ справедливо неравенство $0 \leq f(n) \leq cg(n)$; $f(n) = \Omega(g(n))$, если и только если $g(n) = O(f(n))$; $f(n) = \Theta(g(n))$, если и только если $f(n) = O(g(n))$ и $f(n) = \Omega(g(n))$; все логарифмы далее берутся по основанию 2.

Сформулированный выше результат из [13] непосредственно переносится на прямоугольные укладки и клеточные схемы. Требование выпуклости существенно: H -дерево [8] с n листьями имеет сумму длин ребер и площадь укладки одновременно равные $\Theta(n)$. В [2] приведен пример такой последовательности булевых функций $g_n = g_n(x_1, \dots, x_n)$, что площадь реализации функции g_n правильной клеточной схемой равна $\Theta(n^{3/2})$, а неправильной (то есть такой, у которой входы не обязательно лежат на границе) — $\Theta(n)$. Эти результаты показывают, что правильная и неправильная клеточные модели существенно различны.

Результат из [13] уточнен в работе [5], где доказано, что наименьший линейный размер прямоугольной решетки, куда правильно 2-вложено полное двоичное дерево с 2^n листьями, равен $\lceil (n+1)/2 \rceil$. Там же построено вложение, у которого один из линейных размеров минимален, а площадь асимптотически равна $(1/4)n2^n$ и доказана ее минимальность. Позднее С. А. Ложкин [6] установил аналогичный результат для площади 1-вложений с асимптотическим значением площади, равным $(1/3)n2^n$.

Н. А. Шкаликова [11] показала, что площадь каждой клеточной схемы, осуществляющей умножение двух n -разрядных чисел, заданных в двоичной системе счисления, не меньше $\Omega(n^2)$, и привела пример схемы площади $\Theta(n^2)$ и глубины $\Theta(n)$. В [3] приведен пример клеточной схемы для умножения с глубиной $\Theta(\log n)$ и площадью $\Theta(n^2 \log n)$. Неизвестно, можно ли избавиться от множителя $\log n$ в оценке площади схемы для умножения, сохраняя глубину логарифмической. Однако для задачи сложения в более слабой модели клеточных T -схем можно доказать его необходимость (см. ниже).

Из результатов работ [5, 6, 13] следует нижняя оценка $\Omega(n \log n)$ для площади клеточных схем, обладающих полными остовными деревьями с n листьями по краям укладки. Для неполных деревьев общего вида нижние оценки площади укладки пока неизвестны. В данной статье предлагается модель клеточных T -схем. T -схема отличается тем, что расстояние между концами любого пути в ее укладке пропорционально числу изломов пути. В этой модели получена нижняя оценка площади правильной укладки произвольного, не обязательно полного, двоичного дерева (раздел 2). Приведены примеры задач (префиксные суммы и n -разрядные сумматоры), схемы которых являются оптимальными в этой модели (раздел 3).

2. Нижние оценки

Теорема 1 ([5, 13]). Пусть S — плоская прямоугольная укладка полного двоичного n -ярусного дерева с листьями по краям укладки. Тогда для площади и линейных размеров укладки S справедливы оценки

$$A(S) = \Omega(n2^n), \quad l(S) = \Omega(n), \quad h(S) = \Omega(n).$$

Следствие 1. Для всякой клеточной схемы S с 2^n входами, реализующей существенно зависящую от 2^n аргументов функцию и имеющей минимально возможную глубину $d(S) = n$, справедливы оценки площади, длины и ширины

$$A(S) = \Omega(n2^n), \quad l(S) = \Omega(n), \quad h(S) = \Omega(n).$$

Рассмотрим теперь частный случай клеточных схем — клеточные T -схемы. Будем называть клеточный элемент X элементом верхнего (нижнего, левого, правого) направления, если на его верхней (соответственно нижней, левой или правой) границе расположен один из его входов. В противном случае будем говорить, что элемент X не является элементом верхнего (нижнего, левого, правого) направления. Элементы без входов не являются элементами никакого из четырех направлений.

Определение 1. Пусть все входы правильной клеточной схемы S расположены на ее нижней (верхней, левой, правой) границе, а выходы — на противоположной. Схему S назовем схемой трех направлений или T -схемой, если все ее клеточные элементы не являются элементами верхнего направления (либо, соответственно, нижнего, правого или левого).

Например, в T -схеме, где все клеточные элементы не являются элементами верхнего направления, никакой ориентированный путь, ведущий снизу вверх от входа к выходу, не содержит отрезков с направлением сверху вниз (но может содержать горизонтальные отрезки). Иначе говоря, информация в такой схеме не может двигаться вниз.

Теорема 2. Всякая T -схема глубины $d > n$, которая реализует существенно зависящую от 2^n аргументов функцию, имеет площадь $\Omega(n2^n / \log(d/n))$.

Доказательство. Пусть S — T -схема с указанными в формулировке теоремы параметрами. Для определенности будем считать, что S — схема не верхнего направления, то есть все входы расположены на ее нижней границе, выходы — на верхней, и среди составляющих ее клеточных элементов нет элементов со входами наверху. Площадь схемы есть произведение ее длины $l = l(S)$ и ширины $h = h(S)$, и 2^n входов расположены на горизонтальной части границы, поэтому $l = \Omega(2^n)$ и достаточно доказать, что

$$h = \Omega\left(\frac{n}{\log(d/n)}\right). \quad (1)$$

Рассмотрим прямоугольную укладку T схемы S . Без ограничения общности можно считать, что она является укладкой двоичного дерева. Если это не так, то возьмем какое-нибудь ориентированное к выходу остовное дерево схемы S , глубина которого не превышает глубины схемы, а корень является ее выходом. Ясно, что такое всегда найдется. Ему принадлежат все входы схемы, и ширина h схемы S не меньше чем ширина укладки такого дерева.

Пусть мы хотим попасть из корня дерева S в какой-либо его лист, следуя в обратном направлении по ребрам прямоугольной решетки, принадлежащим укладке T . Пусть уже пройдена часть этого пути и мы находимся в некоторой вершине $v \in T$. Если v — не функциональный элемент схемы S , то есть является промежуточной вершиной, то путь однозначно продолжается в единственную смежную вершину $v' \in T$. Смежная вершина v' также определяется единственным образом, если v — функциональный элемент, реализующий одноместную функцию. Если же v — двуместный функциональный элемент, то в v входят два ребра из некоторых вершин v' и v'' из T . Такую вершину v назовем 2-вершиной. Чтобы определить, в какую из смежных ей вершин перейти, нужна дополнительная информация.

Каждому пути γ , ведущему от выхода-корня к какому-либо входу-листу укладки T , поставим в соответствие его код $c(\gamma)$ так, чтобы по T (или S) и $c(\gamma)$ можно было однозначно найти γ . Так как глубина схемы равна d , на пути γ лежит не более d принадлежащих укладке 2-вершин. Для каждой такой вершины достаточно указать одно из двух

направлений движения, по которому идет путь γ , чтобы задать его. Занумеруем подряд 2-вершины, через которые проходит γ : $v_1, v_2, \dots, v_N$. Можно считать, что первым в этом списке стоит корень дерева — выход схемы S . Кодом $c(\gamma)$ будет набор $(c_1, c_2, \dots, c_N)$, построенный по следующему принципу. Пусть $c_0 = 0$. Добавим в укладку фиктивную вершину v_0 непосредственно над корнем v_1 и ведущее к ней из v_1 вертикальное ребро $\uparrow$. Предположим, что мы находимся в вершине $v_i \in T$, $i \in \{1, \dots, N\}$, и нам уже известно значение c_{i-1} . В вершину v_i входят два ориентированных ребра e' и e'' , одно из которых принадлежит γ , другое нет. Пусть $e' \in \gamma$, $e'' \notin \gamma$ и пусть $e \in \gamma$ — ребро, входящее в вершину v_{i-1} . Раз дерево S вложено в прямоугольную решетку и не является схемой верхнего направления, каждое из ребер e, e', e'' принадлежит одному из трех типов: $\uparrow$, $\rightarrow$, $\leftarrow$, и у ребер e', e'' — разный тип. Если тип ребра e' тот же, что и у ребра e , то положим $c_i = c_{i-1}$. Если это не так, то положим $c_i = c_{i-1} + 1 \pmod{3}$ в случае когда измеренный по часовой стрелке угол между векторами e и e' меньше, чем между e и e'' , и $c_i = c_{i-1} - 1 \pmod{3}$, когда угол между e и e'' меньше угла между e и e' :

$$c_i = \begin{cases} c_{i-1}, & \text{если } (e, e') \in \{(\uparrow, \uparrow), (\rightarrow, \rightarrow), (\leftarrow, \leftarrow)\}, \\ c_{i-1} + 1 \pmod{3}, & \text{если } (e, e', e'') \in \{(\uparrow, \rightarrow, \leftarrow), (\rightarrow, \leftarrow, \uparrow), (\leftarrow, \uparrow, \rightarrow)\}, \\ c_{i-1} - 1 \pmod{3} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, каждому пути γ с N 2-вершинами соответствует троичный код $c(\gamma)$ длины N , причем по укладке на плоскости и коду путь в укладке и вход схемы, которым он оканчивается, находятся однозначно. Более того, если $c_i \neq c_{i+1}$, то заключенный между вершинами v_i и v_{i+1} отрезок пути γ имеет хотя бы один излом, то есть хотя бы единожды на этом участке γ меняет направление. Центральным в доказательстве является следующее наблюдение: из того, что число изломов ориентированного пути равно k и путь состоит только из отрезков вида $\uparrow$, $\rightarrow$ и $\leftarrow$, следует, что расстояние по вертикали между его концами, то есть ширина пути, не меньше чем $\lfloor k/2 \rfloor$.

Пусть $k = k(\gamma)$ — число пар различных соседних чисел c_i в наборе $c(\gamma)$. Тогда путь γ содержит не менее k изломов и его ширина не меньше чем $\lfloor k/2 \rfloor$. Легко видеть, что число кодовых наборов $c(\gamma)$ длины N , у которых ровно k пар соседних разрядов (c_i, c_{i+1}) различаются на единицу, не превышает $\binom{N}{k} 2^k$. Действительно, в наборе $(c_0, c_1, \dots, c_N)$ $\binom{N}{k}$ способами можно выбрать k разрядов $i_1, \dots, i_k$ так, чтобы $c_{i_j} \neq c_{i_j+1}$. Зная c_{i_j} , значение следующего числа c_{i_j+1} можно выбрать двумя способами: оно отличается от c_{i_j} ровно на единицу. Чтобы найти количество наборов $(c_1, \dots, c_N)$, равное количеству наборов $(0, c_1, \dots, c_N)$, надо числа всех этих способов перемножить.

Общее количество путей γ от корня к листьям в укладке дерева S глубины d и ширины $\lfloor k/2 \rfloor$ не превышает количества кодовых наборов $c(\gamma)$ длины, не большей d , с не более чем k парами различных соседних разрядов. Это количество в свою очередь не превышает $\sum_{l \leq k} \sum_{N \leq d} \binom{N}{l} 2^l$.

Различных путей от корня к листьям в дереве столько же, сколько и листьев, то есть 2^n . Поэтому если у дерева глубины d с 2^n листьями ширина h его укладки в прямоугольную решетку не превосходит $\lfloor k/2 \rfloor$, то должно выполняться неравенство

$$\sum_{l \leq k} \sum_{N \leq d} \binom{N}{l} 2^l \geq 2^n. \quad (2)$$

Нас интересует наибольшее возможное k , при котором неравенство (2) будет оставаться неверным. Вначале рассмотрим крайний случай: при каких d выбор $k = O(1)$ при

$n \rightarrow \infty$ не будет противоречить неравенству (2)? При k фиксированном очевидно, что $k \ll d$; при $l \leq k$, $N \leq d$ для биномиальных коэффициентов справедливы неравенства

$$\binom{N}{l} \leq \binom{d}{l} \leq \binom{d}{k}.$$

Следовательно,

$$\sum_{l \leq k} \sum_{N \leq d} \binom{N}{l} 2^l \leq \sum_{l \leq k} d \binom{d}{l} 2^l \leq d \binom{d}{k} 2^{k+1}. \quad (3)$$

Воспользовавшись (3) и учитывая, что

$$\binom{d}{k} \leq d^k,$$

из неравенства (2) получим, что

$$d^{k+1} \geq 2^{n-k-1},$$

откуда следует, что

$$d \geq 2^{(n-k-1)/(k+1)}.$$

Мы получили, что $h = \Omega(1)$ тогда и только тогда, когда $d = 2^{\Omega(n)}$. Это частный случай утверждения (1). Поэтому в дальнейшем мы вправе считать k неограниченным с ростом n и одновременно $d = 2^{o(n)}$.

Предположим, что

$$h = o(n / \log(d/n))$$

при $n \rightarrow \infty$. Это равносильно тому, что

$$k = o(n / \log(d/n)).$$

Так как глубина схемы, реализующей существенно зависящую от всех своих 2^n аргументов функцию не может быть меньше n , получаем, что

$$d = d(n) = \Omega(n),$$

и из нашего предположения следует, что

$$k = o(n) = o(d).$$

Оценка (3) остается в силе, и из неравенства (2) вытекает, что

$$d \binom{d}{k} 2^{k+1} \geq 2^n. \quad (4)$$

Так как k и d вместе растут с ростом n , можно воспользоваться формулой Стирлинга и вытекающим из нее асимптотическим приближением биномиального коэффициента

$$\binom{d}{k} \sim \sqrt{\frac{d}{2\pi k(d-k)}} \frac{d^d}{k^k (d-k)^{d-k}}.$$

Прологарифмировав обе части неравенства (4), получим, что

$$\log d + \log \sqrt{\frac{d}{2\pi k(d-k)}} + d \log d - k \log k - (d-k) \log(d-k) + k + 1 - n + o(1) \geq 0,$$

откуда, учитывая, что

$$d \log d - k \log k - (d-k) \log(d-k) = d \log \frac{d}{d-k} + k \log \frac{d-k}{k},$$

приходим к соотношению

$$d \log \frac{d}{d-k} + k \log \frac{d-k}{k} + O(\log d) + k - n \geq 0.$$

Разделим обе части на n и получим, что для существования укладки с шириной $\lfloor k/2 \rfloor$ необходимо выполнение неравенства

$$\frac{d}{n} \log \frac{d}{d-k} + \frac{k}{n} \log \frac{d-k}{k} + O\left(\frac{\log d}{n}\right) + \frac{k}{n} - 1 \geq 0. \quad (5)$$

Рассмотрим его слагаемые по отдельности. Во-первых,

$$\frac{d}{n} \log \frac{d}{d-k} = \frac{d}{n} \log \left(1 + O\left(\frac{k}{d}\right)\right) = \frac{d}{n} \left(O\left(\frac{k}{d}\right) + o\left(\frac{k}{d}\right)\right) = O\left(\frac{k}{n}\right), \quad (6)$$

так как $k = o(d)$. Далее, раз $k = o(n/\log(d/n))$ и k не равно постоянной, его можно представить в виде $k = n/m$, где $m \rightarrow \infty$ и $m/\log(d/n) \rightarrow \infty$, и второе слагаемое из (5) можно оценить так:

$$\frac{k}{n} \log \frac{d-k}{k} \leq \frac{k}{n} \log \frac{d}{k} = \frac{1}{m} \log \frac{dm}{n} = \frac{\log \frac{d}{n}}{m} + \frac{\log m}{m} = o(1). \quad (7)$$

Наконец, в силу очевидных оценок

$$O(k/n) = O(o(n/\log(d/n))/n) = o(1/\log(d/n)) = o(1)$$

и

$$O\left(\frac{\log d}{n}\right) = O\left(\frac{\log 2^{o(n)}}{n}\right) = \frac{o(n)}{n} = o(1),$$

из неравенств (5), (6) и (7), следует, что $o(1) - 1 \geq 0$ при $n \rightarrow \infty$. Мы получили противоречие, предположив, что $h = o(n/\log(d/n))$ и взяв k наименьшим таким, что $h = \lfloor k/2 \rfloor$. Значит,

$$h = \Omega(n/\log(d/n))$$

для достаточно больших n .

Следствие 2. Каждая T -схема, которая реализует существенно зависящую от n аргументов функцию с глубиной $O(\log n)$, имеет площадь по порядку не меньшую, чем $n \log n$.

Рис. 2. Индуктивное построение префиксной схемы

3. Примеры оптимальных T -схем

3.1. Префиксные клеточные схемы

Задача вычисления префиксной суммы [12, 15] заключается в следующем. Пусть имеется ассоциативная операция $\otimes$ на некотором множестве M и набор элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ из этого множества. Требуется найти набор величин $y_1, y_2, \dots, y_n$, где

$$y_k = \bigotimes_{i=1}^k x_i, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Величина y_k называется k -й префиксной суммой последовательности $\{x_i\}$.

Определение 2. Назовем префиксной клеточную схему с n входами $x_1, x_2, \dots, x_n$ и n выходами $y_1, y_2, \dots, y_n$, если каждый функциональный элемент схемы реализует операцию $\otimes$ и схема вычисляет префиксные суммы входных значений $y_k = \bigotimes_{i=1}^k x_i$ при всех $k, 1 \leq k \leq n$.

Площадь $A(S)$, длина $l(S)$, ширина $h(S)$ и глубина $d(S)$ клеточной схемы S с функциональными элементами $\otimes$ определяются аналогично соответствующим характеристикам схемы из k -ичных функциональных элементов. С помощью стандартной техники [12] нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. Для всякого натурального числа n существует префиксная схема P_n со входами $x_1, x_2, \dots, x_n$ и выходами $y_1, y_2, \dots, y_n$, для глубины и площади которой справедливы оценки

$$\begin{aligned} d(P_n) &= \lceil \log n \rceil, \\ A(P_n) &\leq 4n \lceil \log n \rceil. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть известны схемы P_M и P_N , вычисляющие префиксные суммы наборов переменных $x_1, \dots, x_M$ и $x_{M+1}, \dots, x_{M+N}$ соответственно. Тогда из них можно построить схему P_{M+N} , находящую префиксные суммы объединения этих наборов, что иллюстрируется на рис. 2.

Нетрудно видеть, что ее глубина удовлетворяет неравенству

$$d(P_{M+N}) \leq \max(d(P_M), d(P_N)) + 1, \quad (8)$$

а длина и ширина — неравенствам

$$l(P_{M+N}) \leq l(P_M) + l(P_N), \quad (9)$$

$$h(P_{M+N}) \leq \max(h(P_M), h(P_N)) + 2. \quad (10)$$

Легко также убедиться, что существует схема P_2 с параметрами

$$d(P_2) = 1, \quad l(P_2) = 4, \quad h(P_2) = 2.$$

Пусть $n = 2^m$. Тогда, положив

$$M = N = \frac{n}{2},$$

из неравенств (8), (9) и (10) получим, что

$$d(P_{2^m}) \leq m, \quad l(P_{2^m}) \leq 2 \cdot 2^m, \quad h(P_{2^m}) \leq 2m.$$

Если же $n \neq 2^m$, то возьмем $M = 2^m$, так, чтобы $2^m < n < 2^{m+1}$. Положим $N = n - M$. Заметим, что $d(P_i) \leq d(P_j)$, $h(P_i) \leq h(P_j)$ при $i \leq j$. Тогда

$$d(P_n) \leq d(P_M) + 1 = m + 1 = \lceil \log n \rceil.$$

Неравенства (9) и (10) в свою очередь преобразуются к виду

$$l(P_n) \leq l(P_N) + 2 \cdot 2^m, \quad (11)$$

$$h(P_n) \leq h(P_M) + 2 = 2m + 2 = 2\lceil \log n \rceil. \quad (12)$$

Представив n в двоичной системе счисления, получим, что

$$n = \sum_{i=1}^l 2^{m_i},$$

где

$$m_1 = m > m_2 > \dots > m_l, \quad l \leq \lceil \log n \rceil.$$

Из (11) по индукции находим, что

$$l(P_n) \leq 2 \sum_{i=1}^l 2^{m_i} = 2n.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Легко убедиться, что построенная схема P_n имеет минимально возможную глубину и в ней нет элементов нижнего направления. Из теорем 1 и 2 следует, что у схемы P_n минимальна не только глубина, но и одновременно минимальна по порядку площадь. Точнее, всякая префиксная схема с n входами и минимальной глубиной $\lceil \log n \rceil$ имеет площадь $\Omega(n \log n)$. Про T -схемы можно сказать больше: всякая префиксная T -схема с n входами и глубиной $O(\log n)$ имеет площадь $\Omega(n \log n)$.

3.2. Клеточные k -ичные сумматоры

Пусть заданы два n -разрядных числа X и Y , записанные в позиционной системе счисления с основанием $k \geq 2$

$$X = \sum_{i=1}^n x_i k^{i-1}, \quad Y = \sum_{i=1}^n y_i k^{i-1}, \quad x_i, y_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}. \quad (13)$$

В этом разделе мы построим клеточную схему, определяющую разряды суммы

$$Z = X + Y = \sum_{i=1}^{n+1} z_i k^{i-1}.$$

В дальнейшем такую схему будем называть (клеточным) k -ичным n -разрядным сумматором. Очередной разряд z_i суммы Z можно получить из соответствующих разрядов x_i и y_i слагаемых X и Y , учитывая перенос w_i из предыдущего $(i-1)$ -го разряда в следующий i -й разряд, по формулам

$$\begin{aligned} z_i &= x_i \oplus y_i \oplus w_i, \\ w_i &= (x_{i-1} \&_k y_{i-1}) \vee w_{i-1} \& (x_{i-1} \vee_k y_{i-1}). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\oplus$ обозначает сложение по модулю k , $\&$ — пороговую функцию, равную 1, если сумма аргументов превышает $k-1$ и 0 в противном случае, $\vee$ — пороговую функцию, равную 1, если сумма аргументов превышает $k-2$, то есть

$$\begin{aligned} x \& y &= \begin{cases} 1, & \text{если } x + y \geq k, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ x \vee y &= \begin{cases} 1, & \text{если } x + y \geq k-1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Знаки $\&$ и $\vee$ обозначают традиционные конъюнкцию и дизъюнкцию (отметим, что при всяком k перенос из разряда в разряд не может превышать единицу, то есть он — булева величина). Будем считать, что $w_1 = 0$.

Н. А. Шкаликова в [11] привела пример клеточного двоичного n -разрядного сумматора площади $\Theta(n)$ и глубины $\Theta(n)$. Аналогично можно построить и k -ичный сумматор с площадью и глубиной $\Theta(n)$ для $k \geq 3$. Очевидно, что площадь таких сумматоров оптимальна по порядку. Глубина, однако, далека от минимально возможной.

Известно [9, 16], что в модели схем из функциональных элементов существуют n -разрядные сумматоры, у которых глубина и сложность оптимальны по порядку одновременно, глубина равна $\Theta(\log n)$, а сложность — $\Theta(n)$. Из нижних оценок теорем 1 и 2 вытекает, что в модели клеточных T -схем это невозможно: всякая схема глубины $O(\log n)$ имеет площадь $\Omega(n \log n)$. Иначе говоря, теореме 2 можно рассматривать как утверждение о невозможности одновременно оптимизировать и площадь, и глубину в классе клеточных T -схем.

Теорема 4. При $k \geq 3$ существует k -ичный n -разрядный клеточный сумматор Σ_n глубины

$$d(\Sigma_n) \leq \lceil \log_2(n+1) \rceil + 2.$$

Его площадь удовлетворяет неравенству

$$A(\Sigma_n) \leq 6n(\lceil \log_2(n+1) \rceil + 2)$$

и минимальна по порядку в классе T -схем логарифмической глубины.

Доказательство. Пусть для простоты $k = 3$ (при больших k все рассуждения аналогичны). Сумматор логарифмической глубины основан на хорошо известной конструкции под названием “предвычисление переноса” (см. [12, 16]). Если в формуле (14) известны перенос w_i и величина $x_i \oplus y_i$, то разряды суммы z_i для всех i можно вычислить подсхемой глубины 1, и задача сводится к нахождению быстрой схемы для w_i .

Каждая пара разрядов слагаемых x_i и y_i характеризуется числом χ_i , равным 0, 1 или 2. Паре (x_i, y_i) сопоставим $\chi_i = 0$, если $x_i + y_i \leq 1$. Такая пара разрядов не создает перенос в следующий разряд, даже если предыдущая пара дала перенос в i -й разряд (то есть $w_{i+1} = 0$ при любом w_i). Двойка сопоставляется паре, если $x_i + y_i = 2$. Такая пара при сложении передаст перенос из предыдущего в следующий разряд (то есть $w_{i+1} = 1$ тогда и только тогда, когда $w_i = 1$). Наконец, в случае $x_i + y_i \geq 3$ сопоставим паре (x_i, y_i) число $\chi_i = 1$, в этом случае перенос w_{i+1} равен единице вне зависимости от w_i . Величину χ_i назовем характеристикой i -го разряда.

Определить для разряда с номером i , чему равен перенос w_i , можно с помощью характеристик предыдущих разрядов. Предыдущие разряды создадут перенос $w_i = 1$, если первая характеристика (начиная с χ_{i-1}) среди характеристик младших разрядов $\chi_{i-1}, \dots, \chi_2, \chi_1$, отличная от 2, равна 1. Аналогично, переноса не будет ($w_i = 0$), если первая отличная от 2 характеристика младшего разряда равна 0.

Рассмотрим две функции трехзначной логики $x \odot y$ и $x \otimes y$:

$$x \odot y = \begin{cases} 0, & \text{если } x + y \leq 1, \\ 1, & \text{если } x + y \geq 3, \\ 2, & \text{если } x + y = 2, \end{cases}$$

$$x \otimes y = \begin{cases} x, & \text{если } x = 0 \text{ или } x = 1, \\ y, & \text{если } x = 2. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция $\otimes$, понимаемая как операция на множестве $\{0, 1, 2\}$, ассоциативна, то есть

$$x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$$

для произвольных x, y, z . В силу сказанного выше, $\chi_i = x_i \odot y_i$, а перенос w_i можно вычислить по формуле

$$w_{i+1} = \chi_i \otimes \chi_{i-1} \otimes \dots \otimes \chi_1 \otimes 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

(здесь мы учли, что $w_1 = 0$). Из равенства (15) заключаем, что вычисление совокупности переносов $\{w_i\}_{i=2}^{n+1}$ сводится к нахождению префиксных сумм характеристик $\chi_n, \dots, \chi_1$ по отношению к операции $\otimes$. Для этого можно применить какую-нибудь префиксную схему. Полученные на ее выходах переносы сложим с разрядами слагаемых одновременно и независимо, и найдем z_i .

Таким образом, клеточный сумматор Σ_n состоит из трех подсхем A, B, C . Подсхема A находит характеристики $\chi_i = x_i \odot y_i$ и суммы $x_i \oplus y_i$ всех пар разрядов, $1 \leq i \leq n$. Подсхема B является экземпляром схемы P_{n+1} из теоремы 3, на ее входы подаются выходы χ_i схемы A и константа 0. У схемы B есть также n вспомогательных входов, с которых величины $x_i \oplus y_i$ поступают к вспомогательным выходам, соединенным с подсхемой C . Наконец, подсхема C независимо вычисляет разряды суммы $Z = X + Y$ по формуле (14). Пример 7-разрядного сумматора Σ_7 приведен на рис. 3.

Оценим параметры схемы Σ_n . Ясно, что

$$d(A) = d(C) = 1, \quad d(B) = \lceil \log_2(n+1) \rceil.$$

Как нетрудно убедиться, схемы A, B, C можно соединить так, что

$$\begin{aligned} l(\Sigma_n) &= l(A) = l(B) = l(C) = 3(n+1), \\ h(A) &= 3, \quad h(B) = h(P_{n+1}) \leq 2\lceil \log_2(n+1) \rceil, \quad h(C) = 1. \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценки глубины

$$\begin{aligned} d(\Sigma_n) &= d(A) + d(B) + d(C) \\ &\leq \lceil \log_2(n+1) \rceil + 2, \end{aligned}$$

и площади

$$\begin{aligned} A(\Sigma_n) &= l(\Sigma_n)h(\Sigma_n) = 3(n+1)(h(A) + h(B) + h(C)) \\ &\leq 3(n+1)(2\lceil \log_2(n+1) \rceil + 4) \\ &= O(n \log n). \end{aligned}$$

Очевидно, что в полученной схеме Σ_n нет элементов нижнего направления. В классе T -схем оптимальность ее площади с точностью до постоянного множителя вытекает из следствия теоремы 2.

В случае $k = 2$ размер разряда слишком мал, чтобы учесть все три альтернативы для характеристики пары разрядов слагаемых — создавать перенос, обнулять и передавать из предыдущего разряда. Каждое из ее возможных значений 0, 1, 2 можно закодировать парой битов. Нетрудно построить двоичную клеточную T -схему размера 4×4 и глубины 2, моделирующую троичный клеточный элемент $\otimes$. Заменяя все клеточные элементы троичного сумматора Σ_n на соответствующие двоичные схемы (с очевидным изменением подсхемы A), получим двоичный сумматор Σ_n^2 . По построению

$$\begin{aligned} d(\Sigma_n^2) &= 2d(\Sigma_n), \\ A(\Sigma_n^2) &= 16A(\Sigma_n). \end{aligned}$$

Следствие 3. Существует двоичный n -разрядный клеточный сумматор глубины $2 \log_2 n + O(1)$ и площади $\Theta(n \log n)$, минимальной по порядку в классе T -схем логарифмической глубины.

Рис. 3. Тройичный 7-разрядный клеточный сумматор

В работе А. В. Чашкина [10] описан простой способ определения разности двоичных n -разрядных чисел с помощью сумматора. Его можно обобщить на k -ичный случай, когда $k \geq 3$. Пусть числа X и Y записаны в системе счисления с основанием k (см. (13)), и пусть $X \geq Y$. Обозначим через $\bar{X}$ такое число, что $X + \bar{X} = k^n - 1$. Иначе говоря,

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i k^{i-1},$$

где $\bar{x}_i$ обозначает отрицание i -го разряда числа X по Лукашевичу: $\bar{x} = k - 1 - x$.

Очевидно, что

$$X - Y = \overline{\bar{X} + Y}.$$

Следовательно, если заранее известно, что разность неотрицательна, то для ее вычисления можно использовать любой сумматор. Достаточно обратить разряды уменьшаемого числа X и разряды результата $\bar{X} + Y$.

Следствие 4. Для $k \geq 3$ существует клеточная k -ичная T -схема $\bar{\Sigma}_n$, находящая разность n -разрядных чисел X и Y при условии, что $X \geq Y$, для глубины которой справедливо равенство

$$d(\bar{\Sigma}_n) = \log_2 n + O(1).$$

В базисе из всех двоичных клеточных элементов существует схема вычитания глубины $2\log_2 n + O(1)$. Площади этих схем равны $\Theta(n \log n)$ и минимальны по порядку в классе T -схем логарифмической глубины.

В заключение автор благодарит А. В. Чашкина за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. Альбрехт А., О схемах из клеточных элементов. *Проблемы кибернетики* (1977) 33, 209–214.
2. Громкович Ю., Шустер Б., О соотношении сложностей двух видов плоских схем из функциональных элементов. *Дискретная математика* (1990) 2, №2, 121–126.
3. Жуков Д. А., Быстрые клеточные схемы для умножения. *Дискретный анализ и исследование операций* (2002) 9, №3, 40–47.
4. Кравцов С. С., О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов. *Проблемы кибернетики* (1967) 19, 285–293.
5. Ложкин С. А., Ли Да Мин, О некоторых оптимальных вложениях двоичных и троичных деревьев в плоские прямоугольные решетки. *Вестник Московского университета, сер. 15* (1995) №4, 49–55.
6. Ложкин С. А., Асимптотически оптимальные гомеоморфные вложения полных двоичных и троичных деревьев в плоские прямоугольные решетки. В сб.: *Проблемы теоретической кибернетики. Тез. докл. 13 Междунар. конф. в Казани*, часть II. Изд-во Центра прикладных исследований при мех.-мат. ф-те МГУ, Москва, 2002, с. 113.
7. Лупанов О. Б., *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*. Изд-во МГУ, Москва, 1984.

8. Ульман Дж. Д., *Вычислительные аспекты СБИС*. Радио и связь, Москва, 1990.
9. Храпченко В. М., Об асимптотической оценке времени сложения параллельного сумматора. *Проблемы кибернетики* (1967) **19**, 107–122.
10. Чашкин А. В., Быстрое сложение и умножение целых чисел. В кн: *Дискретная математика и ее приложения: сборник лекций*. II. Изд-во Центра прикладных исследований при мех.-мат. ф-те МГУ, Москва, 2001, с. 91–110.
11. Шкаликова Н. А., О реализации булевых функций схемами из клеточных элементов. *Матем. вопросы кибернетики* (1989) **2**, 177–197.
12. Akl S. G., *Parallel computation: models and methods*. Prentice-Hall, New Jersey, 1997.
13. Brent R. P., Kung H. T., On the area of binary tree layouts. *Inform. Process. Lett.* (1980) **11**, №1, 46–48.
14. Hromkovič J., Ložkin S. A., Rybko A. I., Sapozhenko A. A., Škalikova N. A., Lower bounds on the area complexity of Boolean circuits. *Theoret. Computer Sci.* (1992) **97**, №2, 285–300.
15. Ladner R. E., Fischer M. J., Parallel prefix computation. *J. ACM* (1980) **27**, 831–838.
16. Wegener I., *The complexity of Boolean functions*. Teubner, Stuttgart, 1987.

Статья поступила 22.07.2003.