Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ведерников, Г. В. Савичева, О конечных группах, близких к вполне факторизуемым, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 2, 78–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm82>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 05:18:18

О конечных группах, близких к вполне факторизуемым

© 2007 г. В. А. Ведерников, Г. В. Савичева

Подгруппа H группы G называется дополняемой в G , если в G существует подгруппа K такая, что $G = HK$ и $H \cap K = 1$. Группа называется вполне факторизуемой, если в ней дополняема каждая ее подгруппа.

Пусть $D(G)$ — подгруппа группы G , порожденная всеми подгруппами из G , не имеющими дополнений в G , $Z(G)$ — центр группы G и $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G . Если в группе G все подгруппы дополняемы, то полагаем $D(G) = 1$. Каждая циклическая подгруппа из подгруппы Фраттини $\Phi(G)$ группы G не имеет дополнения в G , поэтому $\Phi(G) \subseteq D(G)$.

В работе получено полное описание строения конечной группы G , для которой $D(G) \subseteq Z(G)\Phi(G)$.

1. Введение

Подгруппа H группы G называется дополняемой в G , если в G существует подгруппа K такая, что $G = HK$ и $H \cap K = 1$.

В 1937 году Ф. Холл в работе [1] исследовал строение конечной группы, в которой каждая подгруппа дополняема. В [2] Н. В. Черникова получила полное описание строения произвольных групп с таким свойством, которые были названы ею вполне факторизуемыми группами. В дальнейшем многими авторами были изучены как конечные, так и бесконечные группы с той или иной системой дополняемых подгрупп. Сводное изложение основных результатов в этом направлении содержится в монографии [3].

Пусть $D(G)$ — подгруппа группы G , порожденная всеми подгруппами из G , не имеющими дополнений в G . Если в группе G все подгруппы дополняемы, то полагаем $D(G) = 1$. Каждая циклическая подгруппа из подгруппы Фраттини $\Phi(G)$ группы G не имеет дополнения в G , поэтому $\Phi(G) \subseteq D(G)$. В [4] получено строение конечной группы, когда $D(G) = \Phi(G)$. Оказалось, что в этом случае $D(G) \subseteq Z(G)$, где $Z(G)$ — центр группы G .

Цель настоящей работы — дать полное описание строения конечной группы G , для которой $D(G) \subseteq Z(G)\Phi(G)$.

На подгруппу $D(G)$ можно смотреть как на некоторый аналог подгруппы Фраттини $\Phi(G)$. Поэтому естественно ожидать много общего между свойствами подгрупп $\Phi(G)$ и $D(G)$. Однако имеются и существенные различия между свойствами этих подгрупп. Так в конечной неединичной группе G подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ всегда является собственной подгруппой G , а $D(G)$ может совпадать с G . Пусть $D(G) \neq G$ и H — подгруппа группы

G , содержащая $D(G)$. Тогда каждая подгруппа G , не содержащаяся в H , дополняема в G . Поэтому, следуя работе [5], подгруппу H будем называть D -сепарирующей подгруппой группы G . Ясно, что в группе G может быть несколько D -сепарирующих подгрупп и $D(G)$ является пересечением всех D -сепарирующих подгрупп из G . Удобно считать D -сепарирующей подгруппой в G и саму группу G . Этим обеспечивается существование $D(G)$ в любой группе G , а также равносильность двух приведенных определений для $D(G)$. Отметим, что изучение групп таких, что $D(G) \neq G$, равносильно исследованию групп G , содержащих собственную D -сепарирующую подгруппу. Это без оговорок неоднократно используется в дальнейшем. Все обозначения и определения в основном стандартные, их можно найти в книгах [3, 6–8].

2. Свойства D -сепарирующих подгрупп

Лемма 1. Если $H \leq G$, то $D(H) \subseteq D(G)$.

Доказательство. Пусть H_1 — подгруппа H , не дополняемая в H . Допустим, что H_1 дополняема в G . Тогда в группе G найдется подгруппа K такая, что $G = H_1 K$ и $H_1 \cap K = 1$. Теперь по модулярному тождеству Дедекинда

$$H = H \cap (H_1 K) = H_1 (H \cap K),$$

причем $H_1 \cap (H \cap K) = H_1 \cap K = 1$, то есть H_1 дополняема в H , что невозможно. Следовательно, H_1 не дополняема в G , и значит, $H_1 \subseteq D(G)$. Так как каждая недополняемая подгруппа H содержится в $D(G)$, то и их порождение содержится в $D(G)$, то есть $D(H) \subseteq D(G)$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если $M \triangleleft G$, то $D(G/M) \subseteq D(G)M/M$. В частности, если $M \subseteq D(G)$, то $D(G/M) \subseteq D(G)/M$.

Доказательство. Если в G/M все подгруппы дополняемы, то $D(G/M) = 1$, и значит, $D(G/M) = M/M \subseteq D(G)M/M$. Пусть L/M — недополняемая подгруппа группы G/M . Допустим, что L дополняема в G . Тогда в G существует подгруппа K такая, что $G = LK$ и $L \cap K = 1$. Отсюда следует, что $G/M = (L/M)(KM/M)$, причем $(L/M) \cap (KM/M) = (L \cap KM)/M = M(L \cap K)/M = M/M = 1$, то есть L/M дополняема в G/M , что невозможно. Следовательно, L не дополняема в G , и значит, $L \subseteq D(G)$. Поэтому $L/M \subseteq D(G)M/M$, а значит, $D(G/M) \subseteq D(G)M/M$. Если $M \subseteq D(G)$, то $D(G/M) \subseteq D(G)M/M = D(G)/M$. Лемма доказана.

Лемма 3. Если H — D -сепарирующая подгруппа группы G и K — подгруппа G , то $H \cap K$ является D -сепарирующей подгруппой группы K . В частности, если $H \subseteq K$, то H является D -сепарирующей подгруппой K .

Доказательство. Пусть K_1 подгруппа K , не содержащаяся в $H \cap K$. Тогда $K_1 \not\subseteq H$, и значит, K_1 дополняема в G . Следовательно, в G существует подгруппа L такая, что $G = K_1 L$ и $K_1 \cap L = 1$. Тогда по модулярному тождеству Дедекинда $K = K \cap (K_1 L) = K_1 (K \cap L)$ и $K_1 \cap (K \cap L) = (K_1 \cap K) \cap L = K_1 \cap L = 1$, то есть K_1 дополняема в K , и значит, $H \cap K$ является D -сепарирующей подгруппой группы K . Лемма доказана.

Лемма 4. Если H — D -сепарирующая подгруппа группы G и $M \triangleleft G$, то HM/M является D -сепарирующей подгруппой группы G/M .

Доказательство. Пусть K/M — подгруппа группы G/M , не содержащаяся в HM/M . Тогда K не содержится в HM , и значит, $K \not\subseteq H$. Следовательно, K дополняема в G , то есть в G существует подгруппа L такая, что $G = KL$ и $K \cap L = 1$. Тогда $G/M = (K/M)(LM/M)$ и $(K/M) \cap (LM/M) = (K \cap LM)/M = M(K \cap L)/M = M/M = 1$, то есть K/M дополняема в G/M , и значит, HM/M является D -сепарирующей подгруппой группы G/M . Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть группа $G = AB$, где A и B — подгруппы группы G . Если $B \triangleleft G$ и $\Phi(A) \not\subseteq B$, то $D(A)B \subseteq D(G)$.

Доказательство. Пусть $a \in \Phi(A) \setminus B$ и $T = \langle a \rangle B$. Допустим, что T дополняема в G . Тогда в G существует подгруппа H такая, что $G = HT$, $H \cap T = 1$. Далее, $G = \langle a \rangle R$, где $R = HB$. Так как $\langle a \rangle \not\subseteq B$, то $B \subset T$. Допустим, что $R = G$. Тогда найдутся $h \in H$ и $b \in B$ такие, что $a = hb$. Отсюда, $h = ab^{-1} \in T$. Так как $H \cap T = 1$, то $h = 1$, и значит, $a = b$. Получили противоречие. Следовательно, $R \subset G$, и значит, $\langle a \rangle \not\subseteq R$. Тогда $A = \langle a \rangle(R \cap A)$ и $R \cap A \neq A$. Так как $a \in \Phi(A)$, подгруппа A порождается подгруппой $R \cap A$, и значит, $R \cap A = A$. Получили противоречие. Следовательно, T не дополняема в G , и значит, $T \subseteq D(G)$. По лемме 1 $D(A) \subseteq D(G)$. Тогда $D(A)B \subseteq D(G)$. Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть группа $G = AB$, где A и B — подгруппы группы G . Если $B \triangleleft G$ и $B \not\subseteq D(G)$, то $\Phi(A) \subset B$.

Лемма 6. Пусть G — конечная группа, $M \triangleleft G$ и H — минимальное добавление к M в G . Если $H \triangleleft G$, то $\Phi(H) = \Phi(G) \cap H$.

Доказательство. Так как $H \triangleleft G$, согласно пункту 3.3 (b) леммы III из [8] справедливо включение $\Phi(H) \subseteq \Phi(G)$, и значит, $\Phi(H) \subseteq D = H \cap \Phi(G)$. Допустим, что $D \not\subseteq \Phi(H)$. Пусть $d \in D \setminus \Phi(H)$. Тогда $N = \langle d^H \rangle \triangleleft H$ и $N \subseteq D$. Так как $N \not\subseteq \Phi(H)$, существует максимальная подгруппа H_1 в H , не содержащая N . Тогда $H = H_1 N$ и $G = MH = M(H_1 N) = (MH_1)N = MH_1$, что противоречит тому, что H — минимальное добавление к M в G . Следовательно, $D \subseteq \Phi(H)$. Из включений $\Phi(H) \subseteq D$ и $D \subseteq \Phi(H)$ следует, что $\Phi(H) = D$. Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть группа $G = AB$, где A, B — подгруппы группы G и $A \cap B = 1$. Если $B \triangleleft G$ и $D(A) \neq 1$, то $D(A)B \subseteq D(G)$.

Доказательство. Пусть $C \leq A$ и C не дополняема в A . Рассмотрим подгруппу $T = CB$. Допустим, что T дополняема в G . Тогда $G = TH$, $H \leq G$, $T \cap H = 1$. Следовательно, $G = (CB)H = C(BH)$. Пусть $R = BH$. Допустим, что $C \cap R \neq 1$, и пусть $x \in C \cap R$, $x \neq 1$. Тогда найдутся $h \in H$, $b \in B$ такие, что $x = hb$, и значит, $h = xb^{-1} \in CB = T$. Так как $H \cap T = 1$, справедливо равенство $xb^{-1} = 1$, и значит, $x = b$. Тогда $x \in C \cap B$, и так как $C \cap B \subseteq A \cap B = 1$, справедливо равенство $x = 1$. Получили противоречие. Следовательно, $C \cap R = 1$. Тогда $A = C(R \cap A)$ и $C \cap (R \cap A) = 1$, то есть C дополняема в A . Получаем противоречие. Следовательно, T не дополняема в G , тогда $T \subseteq D(G)$. Поэтому $C \subseteq D(G)$ и $B \subseteq D(G)$. Так как C — произвольная недополняемая подгруппа в A , справедливо включение $D(A) \subseteq D(G)$, и значит, $D(A)B \subseteq D(G)$. Лемма доказана.

Следствие 2. Пусть группа $G = A \times B$, где A и B — подгруппы группы G . Если $D(G) \neq G$ и $D(A) \neq 1$, то $D(B) = 1$.

Доказательство. По лемме 7 $D(A)B \subseteq D(G)$. Допустим, что $D(B) \neq 1$, тогда по лемме 7 $D(B)A \subseteq D(G)$. Из включений $B \subseteq D(G)$ и $A \subseteq D(G)$ следует, что $G = AB \subseteq D(G)$, и значит, $D(G) = G$. Получили противоречие. Следовательно, $D(B) = 1$. Следствие доказано.

Следствие 3. Пусть p -группа $P = AB$, где A и B — подгруппы группы P и $A \cap B = 1$. Если $B \triangleleft P$ и $B \not\subseteq D(P)$, то A является элементарной абелевой p -группой.

3. Основные результаты

Теорема 1. Пусть P — конечная неабелева p -группа. Тогда включение $D(P) \subseteq Z(P)\Phi(P)$ имеет место тогда и только тогда, когда $P = Q \times A$, где Q — неабелева p -группа порядка p^3 экспоненты p при $p \geq 3$ или $Q = D_8$ — группа диэдра при $p = 2$, A — конечная элементарная абелева p -группа или $A = 1$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть P — конечная неабелева p -группа и $D(P) \subseteq Z(P)\Phi(P)$. Покажем, что $P = Q \times A$, где Q — неабелева p -группа порядка p^3 экспоненты p при $p \geq 3$ или $Q = D_8$ — группа диэдра при $p = 2$, A — элементарная абелева p -группа или $A = 1$. Допустим, что P — контрпример минимального порядка. Предположим, что $P = Z(P)\Phi(P)$. Тогда $P = Z(P)$ — абелева группа. Получаем противоречие. Следовательно, $Z(P)\Phi(P) \neq P$ и $D(P) \neq P$. Допустим, что $Z(P) \not\subseteq \Phi(P)$. Тогда существует $x \in Z(P) \setminus \Phi(P)$, и пусть x — элемент наименьшего порядка с таким свойством. Следовательно, $x^p \in \Phi(P)$. Так как $x \notin \Phi(P)$, существует максимальная подгруппа M , не содержащая x , и значит, $P = \langle x \rangle M$. Пусть H — минимальное добавление к $\langle x \rangle$ в P . Тогда $P = \langle x \rangle H$ и $|H| < |P|$. Так как $x \in Z(P)$, то $\langle x \rangle \triangleleft P$ и $H \triangleleft P$. По лемме 6 $\Phi(H) = \Phi(P) \cap H$. Так как P неабелева группа, группа H также неабелева. По лемме 1 $D(H) \leq D(P) \subseteq Z(P)\Phi(P)$ и $D(H) \subseteq H \cap D(P) \subseteq H \cap (Z(P)\Phi(P)) = H_1$. Пусть $H_2 = Z(H)\Phi(H)$. Так как H неабелева, справедливо соотношение $H_2 < H$. Далее, по модулярному тождеству $Z(P) = \langle x \rangle (H \cap Z(P))$, тогда

$$K = Z(P)\Phi(P) = (Z(P) \cap H)(\langle x \rangle \Phi(P)),$$

$$H_1 = (Z(P) \cap H)(H \cap \langle x \rangle \Phi(P)).$$

Пусть $D_1 = H \cap (\langle x \rangle \Phi(P))$. Тогда $\Phi(H) \subseteq D_1$. Допустим, что $\Phi(H) \subset D_1$. Пусть $d_1 \in D_1 \setminus \Phi(H)$ и $N_1 = \langle (d_1)^H \rangle$. Так как $D_1 \triangleleft H$, справедливы соотношения $N_1 \subseteq D_1$, $N_1 \triangleleft H$, $N_1 \not\subseteq \Phi(H)$. Следовательно, N_1 добавляема в H . Тогда $H = N_1 H_3$ и $H_3 < H$. Следовательно,

$$\begin{aligned} P = \langle x \rangle H &= \langle x \rangle (N_1 H_3) = \langle x \rangle D_1 H_3 = \langle x \rangle (\langle x \rangle \Phi(P)) H_3 \\ &= (\langle x \rangle \Phi(P)) H_3 = \Phi(P) (\langle x \rangle H_3) = \langle x \rangle H_3. \end{aligned}$$

Это противоречит минимальности добавления H к $\langle x \rangle$ в P . Следовательно, $\Phi(H) = D_1$. Поэтому

$$H_1 = (Z(P) \cap H)\Phi(H) \subseteq Z(H)\Phi(H),$$

и значит, $D(H) \subseteq Z(H)\Phi(H)$. Так как $|H| < |P|$, по индукции $H = Q_1 \times A_1$, где Q_1 — неабелева p -группа порядка p^3 и $\exp Q_1 = p$ при $p > 2$ или $Q_1 = D_8$ при $p = 2$, A_1 — элементарная абелева p -группа или $A_1 = 1$.

Допустим, что $\langle x \rangle \cap H = 1$. Тогда $P = \langle x \rangle \times H$. Так как $\Phi(H) \not\subseteq \langle x \rangle$, по лемме 5 $D(H)\langle x \rangle \subseteq D(P)$. Предположим, что $|x| > p$. Тогда $\Phi(\langle x \rangle) \not\subseteq H$ и по лемме 5

$HD(\langle x \rangle) \subseteq D(P)$. Из включений $\langle x \rangle \subseteq D(P)$ и $H \subseteq D(P)$ следует, что $D(P) = P$. Получили противоречие. Следовательно, $|x| = p$ и $P = \langle x \rangle \times H = Q_1 \times A$, где $A = \langle x \rangle \times A_1$ — элементарная абелева p -группа. Получаем противоречие. Таким образом, $\langle x \rangle \cap H \neq 1$ и $|x| > p$.

Допустим, что $\langle x \rangle$ дополняема в P . Тогда существует подгруппа T группы P такая, что $P = \langle x \rangle T$ и $\langle x \rangle \cap T = 1$. Из включения $x \in Z(P)$ следует, что $P = \langle x \rangle \times T$ и, рассматривая вместо подгруппы H подгруппу T , как и выше, приходим к противоречию. Поэтому $\langle x \rangle$ не дополняема в P , и значит, $\langle x \rangle \subseteq D(P)$. Допустим, что $x^p \notin H$. Тогда $\Phi(\langle x \rangle) \not\subseteq H$ и по лемме 5 $D(\langle x \rangle)H \subseteq D(P)$. Из включений $\langle x \rangle \subseteq D(P)$ и $H \subseteq D(P)$ следует, что $D(P) = P$. Получаем противоречие.

Следовательно, $P = \langle x \rangle H$, $x^p \in H$, и значит, $x^p \in Z(H) = Z(Q_1) \times A_1$. Так как $Z(H)$ — элементарная абелева группа, справедливо равенство $|x^p| = p$, и значит, $|x| = p^2$. Поскольку $Z(H)$ не дополняема в H , группа $Z(H)$ не дополняема в P , и значит, $Z(H) \subseteq D(P)$.

Допустим, что $x^p \notin Q_1$. Пусть $L = \langle x^p \rangle \times Q_1$. Предположим, что L дополняема в P , тогда $P = LR$ и $L \cap R = 1$. Так как $N_P(Q_1) \subseteq \langle H, \langle x \rangle \rangle = P$, справедливо соотношение $Q_1 \triangleleft P$, и значит, $P = \langle x^p \rangle (Q_1 R)$, $|P| = |L||R| = |\langle x^p \rangle| |Q_1| |R|$. Из включения $\langle x^p \rangle \subseteq \Phi(P)$ следует справедливость равенств $P = Q_1 R$ и $|P| = |Q_1| |R|$, что невозможно.

Следовательно, $x^p \in Q_1$, и значит, $\langle x^p \rangle = Z(Q_1) = \Phi(Q_1)$. Из соотношений $\langle x \rangle \subseteq D(P)$, $Z(H) = Z(Q_1) \times A_1 \subseteq D(P)$ и $D(P) \neq P$ следует, что $Q_1 \not\subseteq D(P)$. Тогда Q_1 дополняема в P . Следовательно, $P = Q_1 U$, где $U \leq P$ и $Q_1 \cap U = 1$. Пусть $N = \langle x \rangle Q_1$, тогда $N = Q_1(N \cap U)$, $Q_1 \cap (N \cap U) = (Q_1 \cap U) \cap N = 1$, $|N| = p^4$ и $|N \cap U| = p$.

Допустим, что $p > 2$, тогда $\exp Q_1 = p$. Так как $x \in N$, существуют $q \in Q_1$ и $h \in N \cap U$ такие, что $x = qh$, и значит, $q = xh^{-1}$. Так как $|N \cap U| = p$ и $\exp Q_1 = p$, справедливо равенство $|q| = |h^{-1}| = p$, поэтому $1 = q^p = (xh^{-1})^p = x^p h^{-p} = x^p$, и значит, $|x| = p$. Получили противоречие.

Следовательно, $p = 2$ и $Q_1 = D_8$. Пусть $D_8 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, a^b = a^{-1} \rangle$. Тогда $\{1, a^2\} = \langle x \rangle \cap D_8$ и $x^2 = a^2$. Группа $N = \langle x \rangle D_8$ содержит подгруппу кватернионов K_8 , которая порождается элементами a, xb . Так как $D(K_8) = K_8$ и $N = \langle x \rangle K_8$, справедливо равенство $D(N) = N$. Из включения $D(N) \subseteq D(P)$ следует, что $Q_1 \subseteq D(P)$. Получили противоречие.

Следовательно, $Z(P) \subseteq \Phi(P)$. Тогда $D(P) = \Phi(P)$ и по теореме из [4] P является группой из заключения теоремы.

Докажем достаточность. Пусть $P = Q \times A$, где $|Q| = p^3$, Q — неабелева группа экспоненты p при $p > 2$ или Q — группа диэдра при $p=2$, A — элементарная абелева p -группа или $A = 1$. Группа Q содержит по крайней мере две различные элементарные абелевы p -подгруппы B_1 и B_2 , содержащие $Z(Q)$. Поэтому $M_1 = B_1 A$ и $M_2 = B_2 A$ — две различные максимальные элементарные абелевы p -подгруппы группы P . В самом деле, так как $Q \cap M_1 = Q \cap (B_1 A) = B_1(Q \cap A) = B_1 \neq B_2 = Q \cap M_2$, справедливо равенство $M_1 \neq M_2$.

Покажем, что M_1 и M_2 являются D -сепарирующими подгруппами группы P . Пусть T — подгруппа группы P , не содержащаяся в M_1 . Тогда $P = TM_1$. Пусть $U = T \cap M_1$. Так как M_1 — элементарная абелева p -группа, существует подгруппа V группы M_1 такая, что $M_1 = UV$ и $U \cap V = 1$. Тогда $P = TM_1 = T(UV) = TV$. Так как $T \cap V \subseteq T \cap M_1 \subseteq U$, справедливо включение $T \cap V \subseteq U \cap V = 1$. Следовательно, T дополняема в P и M_1 является D -сепарирующей подгруппой группы P . Аналогично, можно показать, что M_2

является D -сепарирующей подгруппой группы P .

Тогда $D(P) \subseteq M_1 \cap M_2 = (Q \cap M_1 \cap M_2)A = (B_1 \cap B_2)A = Z(Q)A$. Допустим, что $Z(Q)A$ дополняема в P . Тогда в P найдется подгруппа X такая, что $P = (Z(Q)A)X$ и $(Z(Q)A) \cap X = 1$, и значит, $P = Z(Q)(AX)$. Так как $|P| = (|Z(Q)||A|)|X| = |Z(Q)|(|A||X|) = |Z(Q)|(|AX|)$, справедливо равенство $Z(Q) \cap (AX) = 1$, то есть $Z(Q)$ дополняема в P . Тогда по модулярному тождеству Дедекинда $Z(Q) = \Phi(Q)$ дополняема в Q , что невозможно. Следовательно, $Z(Q)A$ не дополняема в P , и значит, $Z(Q)A \subseteq D(P)$. Из включений $Z(Q)A \subseteq D(P)$ и $D(P) \subseteq Z(Q)A$ следует, что $D(P) = Z(Q)A \subseteq Z(P) \subseteq Z(P)\Phi(P)$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть G — конечная группа. Тогда включение $D(G) \subseteq \Phi(G)Z(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда G является группой одного из следующих типов:

- (1) G — конечная абелева группа;
- (2) $G = P \times A$, где P — неабелева p -группа порядка p^3 , причем $\exp P = p$ при $p > 2$ и P — группа диэдра при $p = 2$, $A = 1$ или A — конечная абелева группа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами;
- (3) G — конечная нильпотентная вполне факторизуемая группа.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $D(G) \subseteq \Phi(G)Z(G)$ и G — неабелева группа. Если G — p -группа, то по теореме 1 она является группой типа 2, причем либо $A = 1$, либо A — элементарная абелева p -группа.

Пусть G — нильпотентная непримарная группа, то есть $G = G_p \times G_{p'}$, $G_{p'} \neq 1$ и G_p — неабелева группа. Введем обозначения $\Phi = \Phi(G)$ и $Z = Z(G)$. Тогда по лемме 1 $D(G_p) \subseteq D(G) \subseteq \Phi Z$. Так как $\Phi(G_p) = G_p \cap \Phi$ и $Z(G_p) = G_p \cap Z$, то $D(G_p) \subseteq G_p \cap D(G) \subseteq G_p \cap (\Phi Z) = G_p \cap (\Phi Z)_p = G_p \cap (\Phi_p Z_p) = \Phi_p Z_p = \Phi(G_p)Z(G_p)$. По индукции $G_p = Q \times A$, где Q — группа порядка p^3 , причем $\exp Q = p$ при $p > 2$ и Q — группа диэдра при $p = 2$. Так как $D(G_p) \neq 1$, по лемме 7 $D(G_p)G_{p'} \subseteq D(G)$. Допустим, что $D(G_{p'}) \neq 1$. Тогда по лемме 7 $D(G_{p'})G_p \subseteq D(G)$, и значит, $D(G) = G$. Получили противоречие. Следовательно, $D(G_{p'}) = 1$ и $G_{p'}$ — прямое произведение элементарных абелевых силовских подгрупп. Тогда G — группа типа 2.

Пусть G — нильпотентная группа. Если $Z(G) \subseteq \Phi(G)$, то $D(G) \subseteq Z(G)\Phi(G) = \Phi(G)$ и по теореме из [4] G — группа типа 3. Пусть $Z = Z(G) \not\subseteq \Phi(G)$, и пусть U — минимальное добавление к Z в G . Тогда по лемме 6 $\Phi(U) = \Phi(G) \cap U$ и по лемме 11.1 из [6] $U \cap Z \subseteq \Phi(U)$. Из равенства $G = UZ$ следует, что $U \triangleleft G$ и $Z \triangleleft G$. Так как G не нильпотентна, по лемме 4.4 из [6] $G/\Phi(G)$ не является нильпотентной группой. Из соотношений $G/(Z(G)\Phi(G)) \cong (G/\Phi(G))/(Z(G)\Phi(G)/\Phi(G))$, $Z(G)\Phi(G)/\Phi(G) \subseteq Z(G/\Phi(G))$ следует, что $G/(Z(G)\Phi(G))$, и значит, $G/D(G)$ не являются нильпотентными группами.

Пусть $V = U \cap Z$. Тогда $V \subseteq \Phi(G) \subseteq D(G)$. Допустим, что $V \neq 1$ и P — силовская p -подгруппа из V . Так как $G/D(G)$ не является нильпотентной группой, существует $q \in \pi(G/D(G))$, $q \neq p$. Пусть $a \in (G \setminus D(G))$ и a — q -элемент. Тогда $\langle a \rangle P \not\subseteq D(G)$, и значит, $\langle a \rangle P$ дополняема в G . Пусть $G = (\langle a \rangle P)K$ и $(\langle a \rangle P) \cap K = 1$. Тогда $P \cap K_p = 1$ и $G_p = PK_p$. Так как $P \triangleleft G$ и P абелева и дополняема в G_p , по теореме 11.3 из [6] P дополняема в G , что невозможно, так как $P \subseteq \Phi(G)$. Значит, $V = 1$. Тогда $G = U \times Z$ и $\Phi(G) = \Phi(U) \times \Phi(Z)$. По лемме 1, $D(U) \subseteq D(G) \subseteq Z(G)\Phi(G) = Z\Phi(U)\Phi(Z) = Z\Phi(U)$, и значит, $D(U) \subseteq U \cap Z\Phi(U) = (U \cap Z)\Phi(U) \subseteq Z(U)\Phi(U)$. Так как U — нильпотентная группа, по индукции U — группа типа 3.

Покажем, что G — вполне факторизуемая группа. Допустим, что $\Phi(Z) \neq 1$. Тогда $D(Z) \neq 1$ и по лемме 7 $UD(Z) \subseteq D(G) \subseteq Z\Phi$. Так как $Z\Phi$ — нильпотентная группа, U также является нильпотентной группой. Получили противоречие. Следовательно, $\Phi(Z) = 1$ и Z является абелевой группой с элементарными абелевыми силовскими подгруппами, и значит, Z — вполне факторизуемая группа. Так как $G = U \times Z$ — прямое произведение вполне факторизуемых групп, из теоремы 7.2 в [5] следует, что группа G вполне факторизуема, то есть G — группа типа 3.

Докажем достаточность. Если G — конечная абелева группа, то $D(G) \subseteq G \subseteq \Phi(G)Z(G)$. Пусть G — группа типа 2. Тогда, как и при доказательстве достаточности в теореме 1, рассмотрим в G максимальные подгруппы $M_1 = B_1A$ и $M_2 = B_2A$, только теперь M_1 и M_2 будут абелевыми с элементарными абелевыми силовскими подгруппами. Аналогично, как и при доказательстве теоремы 1, нетрудно показать, что M_1 и M_2 являются сепарирующими подгруппами группы G и $D(G) \subseteq \Phi(G)Z(G)$. Наконец, если G — вполне факторизуемая группа, то $D(G) = 1 \subseteq \Phi(G)Z(G)$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Hall P., Complemented groups. *J. London Math. Soc.* (1937) **12**, №47, 201–204.
2. Черникова Н. В., Группы с дополняемыми подгруппами. *Матем. сб.* (1956) **39(81)**, 273–292.
3. Черников С. Н., *Группы с заданными свойствами системы подгрупп*. Наука, Москва, 1980.
4. Довженко С. А., К теореме Н. В. Черниковой о вполне факторизуемых группах. *Укр. матем. ж.* (1999) **51**, №6, 854–855.
5. Черников С. Н., Группы, имеющие сепарирующие подгруппы. В кн.: *Группы с заданными свойствами подгрупп*. Ин-т математики АН УССР, Киев, 1973, с. 6–14.
6. Шеметков Л. А., *Формации конечных групп*. Наука, Москва, 1978.
7. Холл М., *Теория групп*. ИЛ, Москва, 1962.
8. Huppert B., *Endliche Gruppen*. I. Springer, Berlin, 1967.

Статья поступила 24.10.2005.