Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Севастьянов, Сходимость по распределению случайных отображений конечных множеств к ветвящимся процессам, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 1, 18–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm84>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 16:09:47

УДК 519.2

Сходимость по распределению случайных отображений конечных множеств к ветвящимся процессам

© 2005 г. Б. А. Севастьянов

Счетное множество

$$X = \bigcup_{t=0}^{\infty} X(t)$$

разбивается на попарно непересекающиеся конечные слои $X(t)$, мощность множества $|X(t)| < \infty$, $t = 0, 1, 2, \dots$. Каждый слой

$$X(t) = \bigcup_{i=1}^r X_i(t)$$

разбит на r непересекающихся множеств $X_i(t)$, $N_i(t) = |X_i(t)| < \infty$ и $N_i(t) \sim N\theta_i(t)$ при $N \rightarrow \infty$. Положим $X' = X \setminus X(0)$.

Рассматриваются случайные отображения $y = f(x)$ множества X' в множество X . Предполагается, что при любых попарно неравных x_i , $i = 1, \dots, k$, $y_i = f(x_i)$, $i = 1, \dots, k$, независимы, и $f(X(t)) \subseteq X(t-1)$, $t = 1, 2, \dots$. Пусть $Y_i(0) \subseteq X_i(0)$ — некоторые фиксированные подмножества и

$$Y_i(t) = f^{-1}(Y(t-1)) \cap X_i(t), \quad t = 1, 2, \dots,$$

— последовательность прообразов $Y_i(0)$ в этом случайном отображении. Показано, что $\mu_i(t, N) = |Y_i(t)|$, $i = 1, \dots, r$, сходятся по распределению к неоднородному по времени ветвящемуся процессу с r типами частиц, если $N \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 02-01-00266, и программы Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ, грант НШ-1758.2003.1

Пусть

$$X = \bigcup_{t=0}^{\infty} X(t)$$

— разбиение счетного множества X на сумму конечных непересекающихся множеств $X(t)$. Множество $X(t)$ будем называть t -слоем, а его мощность будем обозначать $N(t) = |X(t)|$, $0 < N(t) < \infty$. Пусть каждый t -слой

$$X(t) = \bigcup_{i=1}^r X_i(t)$$

также представим в виде разбиения на r множеств $X_i(t)$ мощности $N_i(t) = |X_i(t)| > 0$, $1 \leq i \leq r$, $N(t) = \sum_{i=1}^r N_i(t)$.

Далее будем полагать, что мощности $N_i(t)$ при $N \rightarrow \infty$ представимы в виде

$$N_i(t) = N\theta_i(t)(1 + o(1)),$$

где $0 < \theta_i(t) < \infty$ при всех i , $1 \leq i \leq r$ и $t \geq 0$. В этом случае

$$N(t) = N\theta(t)(1 + o(1)), \quad \theta(t) = \sum_{i=1}^r \theta_i(t).$$

Положим

$$X' = X \setminus X(0).$$

Обозначим f случайное отображение $y = f(x)$ множества X' в X , которое удовлетворяет следующим условиям А, В, С.

Условие А. При любом $k \geq 2$ и любых попарно неравных элементах $x_i \in X'$, $i = 1, 2, \dots, k$, элементы $y_i = f(x_i) \in X$, $i = 1, \dots, k$, независимы.

Условие В. При любом $t \geq 1$ и любых $1 \leq j \leq r$

$$f(X_j(t)) \subseteq X(t-1).$$

Введем неотрицательные числа $g_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, r$, $t \geq 0$, которые при всех $t \geq 0$, $1 \leq i \leq r$, удовлетворяют условию $\sum_{j=1}^r g_{ij} > 0$.

Условие С. Для любых $x \in X_i(t)$, $y \in X_j(t-1)$, $t \geq 1$, $1 \leq i, j \leq r$,

$$\mathbf{P}\{f(x) = y\} = \frac{g_{ij}(t)}{\sum_{j=1}^r g_{ij}(t)N_j(t-1)}, \quad (1)$$

все остальные вероятности $\mathbf{P}\{f(x) = y\} = 0$.

Обозначим $p_{ij}(t, N)$ вероятности, определенные формулой (1).

Пусть $Y_i(0) \subseteq X_i(0)$, $i = 1, \dots, r$, некоторые фиксированные подмножества $X_i(0)$, имеющие мощности $\mu_i(0, N) = |Y_i(0)|$. Введем случайные подмножества

$$Y_j(t) = f^{-1}(Y(t-1)) \cap X_j(t), \quad 1 \leq j \leq r, \quad t \geq 1.$$

Мощности множеств

$$\mu_j(t, N) = |Y_j(t)|$$

являются случайными величинами. Обозначим вектор

$$\mu(t, N) = (\mu_1(t, N), \dots, \mu_r(t, N)).$$

Лемма 1. Для любого $x \in X_i(t)$ и любого вектора с неотрицательными целочисленными компонентами $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_r)$

$$\mathbf{P}\{f(x) \in Y(t-1) \mid \mu(t-1, N) = \mathbf{k}\} = \sum_{j=1}^r k_j p_{ij}(t, N). \quad (2)$$

Доказательство. Из условия С следует, что для любого $x \in X_i(t)$ правую часть (2) можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^r k_j p_{ij}(t, N) = \sum_{j=1}^r \sum_{y \in Y_j(t-1)} \mathbf{P}\{f(x) = y \mid \mu(t-1, N) = \mathbf{k}\}.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Теорема 1. Условная вероятность

$$\mathbf{P}\{\mu_i(t, N) = l_i \mid \mu(t-1, N) = \mathbf{k}\}$$

представляет собой биномиальную вероятность

$$\frac{N_i(t)!}{l_i! (N_i(t) - l_i)!} \left(\sum_{j=1}^r k_j p_{ij}(t, N) \right)^{l_i} \left(1 - \sum_{j=1}^r k_j p_{ij}(t, N) \right)^{N_i(t) - l_i}. \quad (3)$$

Случайные величины $\mu_i(t, N)$, $i = 1, 2, \dots, r$, при условии $\mu(t-1, N) = \mathbf{k}$ независимы.

Доказательство. Рассмотрим событие $S = \{\mu(t-1, N) = \mathbf{k}\}$ и введем индикаторы

$$\xi_i(x) = I\{f(x) \in Y(t-1)\}, \quad x \in X_i(t).$$

По условиям А, В и С случайные величины $\xi_i(x)$ независимы, одинаково распределены и при условии S имеют распределение (2). Формула (3) следует из представления случайной величины $\mu_i(t, N)$ в виде суммы

$$\mu_i(t, N) = \sum_{x \in X_i(t)} \xi_i(x). \quad (4)$$

Независимость случайных величин $\mu_i(t, N)$, $i = 1, 2, \dots, r$, при условии S также следует из представления (4), так как $X_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$, — разбиение $X(t)$.

Теорема 2. Для любых целочисленных векторов $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$, $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_r)$ с неотрицательными компонентами имеют место следующие предельные соотношения:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\mu(t, N) = \mathbf{l} \mid \mu(t, N) = \mathbf{k}\} = \prod_{i=1}^r \frac{a_i(t, \mathbf{k})^{l_i}}{l_i!} e^{-a_i(t, \mathbf{k})}, \quad (5)$$

где

$$a_i(t, \mathbf{k}) = \sum_{j=1}^r k_j a_{ij}(t), \quad a_{ij}(t) = \frac{g_{ij}(t) \theta_i(t)}{\sum_{j=1}^r g_{ij}(t) \theta_j(t-1)}, \quad 1 \leq i, j \leq r. \quad (6)$$

Доказательство. Согласно теореме 1 случайные величины $\mu_i(t, N)$ независимы и имеют при условии S биномиальные распределения (3). Поскольку при $N \rightarrow \infty$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N_i(t) p_{ij}(t, N) = \frac{g_{ij}(t) \theta_i(t)}{\sum_{j=1}^r g_{ij}(t) \theta_j(t-1)},$$

биномиальное распределение (3) сходится к распределению Пуассона с параметром $a_i(t, \mathbf{k})$, который определен формулами (6). Отсюда следует утверждение теоремы.

Замечание 1. Из свойства А следует, что случайные последовательности $\mu(t, N)$ и $\mu(t)$, $t = 0, 1, \dots$, являются цепями Маркова. Утверждение о сходимости по распределению в теореме 2 можно записать в виде

$$\mathbf{P}\{\mu(t, N) = \mathbf{l} \mid \mu(t-1, N) = \mathbf{k}\} \rightarrow \mathbf{P}\{\mu(t) = \mathbf{l} \mid \mu(t-1) = \mathbf{k}\}, \quad (7)$$

где условное распределение $\{\mu(t) = \mathbf{l}\}$ при условии $\{\mu(t-1) = \mathbf{k}\}$, определяется правой частью равенства (6). Многомерная производящая функция предельного распределения (7) представима в виде

$$\mathbf{M} \left\{ \prod_{j=1}^r s_j^{\mu_j(t)} \mid \mu(t-1) = \mathbf{k} \right\} = \prod_{j=1}^r h_j(t, \mathbf{s})^{k_j}, \quad (8)$$

где

$$h_j(t, \mathbf{s}) = e^{\sum_{i=1}^r a_{ij}(t)(s_i-1)}, \quad j = 1, \dots, r, \quad \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r). \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) и замечания 1 следует, что векторная производящая функция $\mathbf{h}(t, \mathbf{s})$ задает распределение вероятностей чисел потомков неоднородного во времени ветвящегося процесса с r типами частиц.

Если $\theta_i, g_{ij}, i, j = 1, \dots, r$, не зависят от t , то в формуле (6) коэффициенты a_{ij} также не зависят от t . В этом случае

$$a_{ij} = \mathbf{M}\{\mu_i(t) \mid \mu_j(t-1) = 1, \mu_k(t-1) = 0, k \neq j\}$$

и матрица $A = \|a_{ij}\|$ определяет критичность ветвящегося процесса $\mu(t)$. Пусть R — перронов корень матрицы A . Если $R < 1$, $R > 1$ или $R = 1$, то ветвящийся процесс $\mu(t)$ будет, соответственно, докритическим, надкритическим или критическим.

В [1] была исследована аналогичная задача при $r = 1$. О связи случайных отображений и ветвящихся процессов см. также в [2, 3].

Список литературы

1. Севастьянов Б. А., Некоторые классы случайных отображений конечных множеств и неоднородные ветвящиеся процессы. *Дискретная математика* (2004) **16**, №1, 9–13.
2. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
3. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Наука, Москва, 2000.

Статья поступила 06.12.2004.