Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Афанасьев, Об условном принципе инвариантности для критического ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 1, 35–49

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm86>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 14:03:13

УДК 519.2

Об условном принципе инвариантности для критического ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона

© 2005 г. В. И. Афанасьев

Для критического ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона устанавливается такой принцип инвариантности, который позволяет изучать этот процесс сразу в двух временных шкалах: абсолютной и относительной (относительно времени жизни этого процесса). Устанавливается связь между предельным процессом и локальным временем броуновской экскурсии.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 02–01–00266, и программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ-1758.2003.1

1. Пусть $Z_n, n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, означает число частиц в n -м поколении критического ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона, причем $Z_0 = 1$. Предположим, что дисперсия числа непосредственных потомков одной частицы конечна и положительна, то есть

$$DZ_1 = 4\lambda \in (0, \infty). \quad (1)$$

Рассмотрим случайный процесс

$$Y_n(t) = \frac{Z_{[nt]}}{\lambda n}, \quad t \in [0, \infty).$$

Изучению сходимости по распределению процесса $\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid Z_n > 0\}$ при $n \rightarrow \infty$ посвящено много работ. Утверждение о сходимости одномерного распределения при $t = 1$ составляет содержание классической теоремы Яглома. Сходимость конечномерных распределений процесса $\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid Z_n > 0\}$ при условии (1) установлена в работе Ламперти и Нея [1], причем там указано, что предельный процесс $\{Y^+(t), t \in [0, 1]\}$ является диффузионным и описана его переходная функция (ее вид не зависит от исходного процесса $\{Z_n\}$). В работе Дарретта [2] показано, что при условии (1) и $n \rightarrow \infty$

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid Z_n > 0\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{Y^+(t), t \in [0, 1]\}, \quad (2)$$

где знак $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, 1]$ с топологией Скорохода.

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы установить сходимость процесса $\{Y_n(t), t \in [0, \infty) \mid Z_n > 0\}$ по распределению в пространстве $D[0, \infty)$ с топологией

Скорохода и описать распределение предельного процесса $\{Y^+(t), t \in [0, \infty)\}$ через броуновскую экскурсию $\{W_0^+(t), t \in [0, 1]\}$.

Пусть $l_0^+(t)$ — локальное время на уровне t броуновской экскурсии $\{W_0^+(t), t \in [0, 1]\}$, то есть

$$l_0^+(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 I_{[t, t+\varepsilon]}(W_0^+(s)) ds, \quad t \in [0, \infty),$$

где $I_{[t, t+\varepsilon]}(\cdot)$ — индикатор множества $[t, t + \varepsilon]$. Обозначим h_0^+ максимум броуновской экскурсии, то есть

$$h_0^+ = \sup_{t \in [0, 1]} W_0^+(t).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Если выполнено условие (1), то при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{Z_{[nt]}}{\lambda n}, t \in [0, \infty) \mid Z_n > 0 \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{Y^+(t), t \in [0, \infty)\}, \quad (3)$$

где знак $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ означает сходимость в пространстве $D[0, \infty)$ с топологией Скорохода, а распределение процесса $\{Y^+(t)\}$ задается формулой

$$\mathbf{P}(\{Y^+(t)\} \in A) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \mathbf{P}\left(\frac{\{l_0^+(tu)\}}{u} \in A, h_0^+ > u\right) du \quad (4)$$

для любого борелевского множества A пространства $D[0, \infty)$.

Пусть T — момент вырождения процесса Гальтона–Ватсона, то есть

$$T = \inf\{n > 0: Z_n = 0\}.$$

Наряду с процессом $\{Y_n(t)\}$, рассмотрим процесс

$$\tilde{Y}_n(t) = \frac{Z_{[tT]}}{\lambda n}, \quad t \in [0, \infty).$$

Процесс $\{\tilde{Y}_n(t)\}$ позволяет изучать процесс Гальтона–Ватсона в относительной временной шкале (относительно его времени жизни T). Справедлив следующий обобщенный условный принцип инвариантности для процесса Гальтона–Ватсона.

Теорема 2. Если выполнено условие (1), то при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{Z_{[nt]}}{\lambda n}, \frac{Z_{[tT]}}{\lambda n}, t \in [0, \infty) \mid Z_n > 0 \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{Y^+(t), Y_0^+(t), t \in [0, \infty)\},$$

причем распределение двумерного процесса $\{Y^+(t), Y_0^+(t)\}$ задается формулой

$$\mathbf{P}(\{Y^+(t)\} \in A, \{Y_0^+(t)\} \in B) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \mathbf{P}\left(\frac{\{l_0^+(tu)\}}{u} \in A, \frac{\{l_0^+(th_0^+)\}}{u} \in B, h_0^+ > u\right) du$$

для любых борелевских множеств A и B пространства $D[0, \infty)$.

2. Для доказательства теоремы 1, наряду с результатом Дарретта (2), нам потребуется следующий результат Линдвалла [3, 4]: если выполнено условие (1), то при $x \in (0, \infty)$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{Y_n(t), t \in [0, \infty) \mid Z_0 = [\lambda nx]\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{Y(t), t \in [0, \infty) \mid Y(0) = x\}, \quad (5)$$

здесь $\{Y(t)\}$ — диффузионный процесс с известной переходной функцией (ее вид не зависит от исходного процесса $\{Z_n\}$). Покажем, что при конечном положительном a сходимость конечномерных распределений процесса $\{Y_n(t), t \in [0, \infty) \mid Z_0 = [\lambda nx]\}$ равномерна по $x \in (0, a]$. Ограничимся рассмотрением сходимости одномерных распределений $\mathbf{P}(Y_n(t) \leq y \mid Z_0 = [\lambda nx])$, где $t \in (0, \infty)$, $y \in [0, \infty)$. Известно, что если выполнено условие (1) и $n \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}(Z_n > 0) \sim (2\lambda n)^{-1}. \quad (6)$$

Рассмотрим те частицы из нулевого поколения, которые имеют потомков в $[nt]$ -м поколении. Пусть μ_n — их число, а $\xi_i^{(n)}$ — число потомков в $[nt]$ -м поколении i -й такой частицы, $i = 1, 2, \dots, \mu_n$. Так как частицы из нулевого поколения функционируют независимо, то в силу (6) при $n \rightarrow \infty$

$$\mu_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu, \quad (7)$$

где μ имеет распределение Пуассона со средним $x/(2t)$. Более того, хорошо известно (см., например, [5, §20]), что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{P}(\mu_n = k) - \mathbf{P}(\mu = k)| \leq c[\lambda nx]/(\lambda nt)^2 \leq c[\lambda na]/(\lambda nt)^2, \quad (8)$$

где c — положительная постоянная, $x \in (0, a]$. В силу соотношения (2), при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\xi_i^{(n)}}{\lambda n} \xrightarrow{\mathcal{D}} tY^+(1), \quad (9)$$

причем распределение $Y^+(1)$ абсолютно непрерывно. Учитывая независимость $\mu_n, \xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots$, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_n(t) \leq y \mid Z_0 = [\lambda nx]) &= \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{\mu_n} \xi_i^{(n)} / (\lambda n) \leq y\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^k \xi_i^{(n)} / (\lambda n) \leq y\right) \mathbf{P}(\mu_n = k). \end{aligned}$$

В последнем выражении первый множитель не зависит от x и стремится в силу (9) к $\mathbf{P}\left(t \sum_{i=1}^k Y_i^+(1) \leq y\right)$, где $Y_1^+(1), Y_2^+(1), \dots$ — независимые случайные величины, распределенные как $Y^+(1)$. Второй же множитель зависит от x и стремится в силу (7) к $\mathbf{P}(\mu = k)$. Следовательно, все это выражение, в силу (8) и неравенства

$$\mathbf{P}(\mu = k) \leq a^k (2t)^{-k} / k!,$$

справедливого при $x \in (0, a]$, стремится при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in (0, a]$ к

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P} \left(t \sum_{i=1}^k Y_i^+(1) \leq y \right) \mathbf{P}(\mu = k),$$

что и требовалось доказать.

Введем модуль непрерывности $w''_{\{x(t)\}}(\delta, u, v)$, $\delta \in (0, \infty)$, $u, v \in [0, \infty)$, $u < v$, для функции $x(t)$, $t \in [0, \infty)$, принадлежащей $D[0, \infty)$:

$$w''_{\{x(t)\}}(\delta, u, v) = \sup \min\{|x(t) - x(t_1)|, |x(t_2) - x(t)|\},$$

где верхняя грань берется по всем t_1 , t и t_2 , принадлежащим $[u, v]$ и удовлетворяющим неравенствам $t_1 \leq t \leq t_2$, $t_2 - t_1 \leq \delta$. Чтобы установить соотношение (5), помимо сходимости конечномерных распределений достаточно в силу теоремы 15.4 из [6] показать, что для произвольных положительных ε и v

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w''_{\{Y_n(t)\}}(\delta, 0, v) \geq \varepsilon \mid Z_0 = [\lambda n x]) = 0.$$

Покажем, что при любом конечном положительном a это соотношение выполняется равномерно по $x \in (0, a]$, то есть

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (0, a]} \mathbf{P}(w''_{\{Y_n(t)\}}(\delta, 0, v) \geq \varepsilon \mid Z_0 = [\lambda n x]) = 0. \quad (10)$$

В работе Линдвалла [3] показано, что при фиксированных положительных v и a и всех t , t_1 , t_2 , x таких, что $0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq v$, $x \in (0, a]$

$$\mathbf{M}\{|Y_n(t) - Y_n(t_1)|^\gamma | Y_n(t_2) - Y_n(t)|^\gamma \mid Z_0 = [\lambda n x]\} \leq K_1(t_2 - t_1)^\gamma,$$

где $\gamma = 4/3$, K_1 — положительная постоянная. Отсюда вытекает (см. доказательство теоремы 15.6 в [6]), что при фиксированных положительных v и a и всех $\varepsilon, \delta \in (0, \infty)$, $x \in (0, a]$

$$\mathbf{P}(w''_{\{Y_n(t)\}}(\delta, 0, v) \geq \varepsilon \mid Z_0 = [\lambda n x]) \leq K_2 \varepsilon^{-2\gamma} \delta^{\gamma-1},$$

где K_2 — положительная постоянная. Из этого неравенства, учитывая, что $\gamma > 1$, получаем (10).

Предельный процесс $\{Y^+(t), t \in [0, \infty)\}$ в теореме 1 описан при $t \in [0, 1]$ в упомянутой работе [1] Ламперти и Нея. Будем считать, что при $t \geq 1$ этот процесс представляет собой диффузионный процесс из правой части соотношения (5), выходящий из начального состояния $Y^+(1)$. Установим справедливость соотношения (3) именно для этого процесса $\{Y^+(t), t \in [0, \infty)\}$, распределение которого, очевидно, не зависит от исходного процесса $\{Z_n\}$.

Установим сначала сходимость конечномерных распределений. Пусть

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq 1 < t_{k+1} < \dots < t_l < \infty, \quad k < l, \quad k, l \in \mathbf{N}.$$

Очевидно, что при $x_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, l$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, l \mid Z_n > 0) \\ = \int_{0+}^{\infty} \mathbf{P}(Y_n(t_i - 1) \leq x_i, i = k+1, \dots, l \mid Z_0 = [\lambda n x]) \\ \times d_x \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; Z_n/(\lambda n) \leq x \mid Z_n > 0), \end{aligned}$$

где вероятность, стоящая под знаком дифференциала, сходится при $n \rightarrow \infty$ в силу соотношения (1) к $\mathbf{P}(Y^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; Y^+(1) \leq x)$. Вероятность, стоящая после знака интеграла, сходится при $n \rightarrow \infty$ к $\mathbf{P}(Y(t_i - 1) \leq x_i, i = k + 1, \dots, l \mid Y(0) = x)$, как указано в начале раздела 2, причем эта сходимость равномерна по $x \in (0, a]$, где a — произвольное фиксированное положительное число. В силу сказанного,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, l \mid Z_n > 0) \\ = \int_{0+}^{\infty} \mathbf{P}(Y(t_i - 1) \leq x_i, i = k + 1, \dots, l \mid Y(0) = x) \\ \times d_x \mathbf{P}(Y^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; Y^+(1) \leq x) \\ = \mathbf{P}(Y^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, l), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теперь покажем, что для произвольных $\varepsilon \in (0, \infty)$ и $v \in (1, \infty)$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{P}}(w''_{\{Y_n(t)\}}(\delta, 0, v) \geq \varepsilon \mid Z_n > 0) = 0. \quad (11)$$

Нетрудно заметить, что

$$w''_{\{Y_n(t)\}}(\delta, 0, v) \leq \max(w''_{\{Y_n(t)\}}(\delta, 0, 1), w''_{\{Y_n(t)\}}(\delta, 1, v)).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(w''_{\{Y_n(t)\}}(\delta, 0, v) \geq \varepsilon \mid Z_n > 0) \\ \leq \mathbf{P}(w''_{\{Y_n(t)\}}(\delta, 0, 1) \geq \varepsilon \mid Z_n > 0) + \mathbf{P}(w''_{\{Y_n(t)\}}(\delta, 1, v) \geq \varepsilon \mid Z_n > 0). \end{aligned} \quad (12)$$

Из соотношения (2), в силу теоремы 15.3 из [6], следует, что

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{P}}(w''_{\{Y_n(t)\}}(\delta, 0, 1) \geq \varepsilon \mid Z_n > 0) = 0. \quad (13)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(w''_{\{Y_n(t)\}}(\delta, 1, v) \geq \varepsilon \mid Z_n > 0) \\ = \int_{0+}^{\infty} \mathbf{P}(w''_{\{Y_n(t)\}}(\delta, 0, v - 1) \geq \varepsilon \mid Z_0 = [\lambda n x]) d_x \mathbf{P}(Z_n/(\lambda n) \leq x \mid Z_n > 0). \end{aligned}$$

Следовательно, для произвольного положительного a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(w''_{\{Y_n(t)\}}(\delta, 1, v) \geq \varepsilon \mid Z_n > 0) &= I_1(a) + I_2(a), \\ I_1(a) &= \int_{0+}^a \mathbf{P}(w''_{\{Y_n(t)\}}(\delta, 0, v - 1) \geq \varepsilon \mid Z_0 = [\lambda n x]) d_x \mathbf{P}(Z_n/(\lambda n) \leq x \mid Z_n > 0), \end{aligned} \quad (14)$$

а в $I_2(a)$ интегрирование ведется от a до ∞ . Ясно, что

$$I_2(a) \leq \mathbf{P}(Z_n/(\lambda n) > a \mid Z_n > 0),$$

и поэтому, в силу соотношения (2),

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} I_2(a) = 0. \quad (15)$$

Рассмотрим $I_1(a)$. Нетрудно видеть, что

$$I_1(a) \leq \sup_{x \in (0, a]} \mathbf{P}(w''_{\{Y_n(t)\}}(\delta, 0, v - 1) \geq \varepsilon \mid Z_0 = [\lambda nx]),$$

откуда, в силу соотношения (10),

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I_1(a) = 0. \quad (16)$$

Из соотношений (14)–(16) находим, что

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w''_{\{Y_n(t)\}}(\delta, 1, v) \geq \varepsilon \mid Z_n > 0) = 0. \quad (17)$$

Из соотношений (12), (13) и (17) приходим к (11).

Из доказанной выше сходимости конечномерных распределений, соотношения (11) и непрерывности траекторий процесса $\{Y^+(t), t \in [0, \infty)\}$, которая следует из непрерывности траекторий процессов $\{Y^+(t), t \in [0, 1]\}$ и $\{Y(t)\}$, получаем, в силу теоремы 15.4 из [6], требуемое соотношение (3).

3. Для завершения доказательства теоремы 1 осталось показать, что предельный процесс в соотношении (3) имеет указанное в (4) распределение. Это достаточно установить для одного простого частного случая процесса Гальтона–Ватсона. С этой целью мы рассмотрим критический ветвящийся процесс $\{Z_n^*\}$, тесно связанный с остановленным простым случайным блужданием. Введем простое случайное блуждание

$$S_0 = 0, \quad S_k = \sum_{i=1}^k X_i, \quad k \in \mathbf{N},$$

где $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения 1 и -1 с одинаковыми вероятностями $1/2$. Это блуждание с нулевым сносом, то есть $\mathbf{M}X_1 = 0$, $\mathbf{D}X_1 = 1$. Пусть $\mathcal{T}$ — момент первого достижения этим блужданием полуоси $(-\infty, 0]$, то есть

$$\mathcal{T} = \inf\{k > 0 : S_k \leq 0\}.$$

При $\mathcal{T} > 0$ введем остановленное простое случайное блуждание

$$\tilde{S}_k = \begin{cases} S_k, & k \leq \mathcal{T}, \\ 0, & k > \mathcal{T}. \end{cases}$$

Не вводя дополнительных обозначений, будем предполагать в дальнейшем, что случайная последовательность $\{\tilde{S}_k\}$ рассматривается при условии $\{\mathcal{T} > 0\}$. Обозначим Z_n^* число переходов блуждания $\{\tilde{S}_k, k \in \mathbf{N}_0\}$ из состояния n в состояние $n + 1$. Нетрудно понять, что $\{Z_n^*\}$ является критическим ветвящимся процессом Гальтона–Ватсона, причем

$$\mathbf{P}(Z_1^* = m) = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}, \quad m \in \mathbf{N}_0. \quad (18)$$

Обозначим через ν_n локальное время на уровне n остановленного простого случайного блуждания, то есть

$$\nu_n = |\{k : \tilde{S}_k = n\}|, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \nu_0 = 2.$$

Число попаданий из состояния n в состояние $(n + 1)$ совпадает с числом попаданий из состояния $(n + 1)$ в n для $\{\tilde{S}_k\}$, поэтому

$$\nu_n = Z_{n-1}^* + Z_n^*, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Очевидно, время жизни T^* ветвящегося процесса $\{Z_n^*\}$ совпадает с максимумом H остановленного простого случайного блуждания,

$$H = \max_{k \in \mathbb{N}_0} \tilde{S}_k.$$

В силу соотношения (19), предельные теоремы для случайной последовательности $\{Z_k^*, k \in \mathbb{N}_0 \mid T^* > n\}$ сводятся к предельным теоремам для случайной последовательности $\{\nu_k/2, k \in \mathbb{N}_0 \mid H > n\}$.

Для произвольных центрально решетчатых случайных блужданий с нулевым сносом, шаг которых X_1 удовлетворяет двустороннему условию Крамера, в [7] установлено, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\tilde{S}_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0, 1] \mid \mathcal{T} = n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_0^+(t), t \in [0, 1]\},$$

где, напоминаем, $\{W_0^+(t)\}$ — броуновская экскурсия, $\sigma^2 = \mathbf{D}X_1$. Это наводит на мысль о том, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\nu_{[a\sqrt{n}t]}}{b\sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} = n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{l_0^+(t), t \in [0, \infty)\},$$

где $\{l_0^+(t)\}$ — локальное время броуновской экскурсии $\{W_0^+(t)\}$, a, b — положительные постоянные. Для произвольных центрально решетчатых случайных блужданий с нулевым сносом это соотношение пока не доказано, но для простого случайного блуждания оно следует из результата Дрмоты и Гиттенбергера [8] для случайных деревьев. В [8] показано, что если критический ветвящийся процесс $\{Z_n\}$ с конечной положительной дисперсией $\mathbf{D}Z_1 = 4\lambda$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}(Z_1 = k) = \frac{\tau^k \varphi_k}{\varphi(\tau)}, \quad (20)$$

где $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k$, а число τ находится внутри интервала сходимости $\varphi(t)$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{Z_{[\sqrt{n}t]}}{\sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \mid \sum_{i=0}^{\infty} Z_i = n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{\sqrt{\lambda} l_0^+(\sqrt{\lambda}t), t \in [0, \infty)\}. \quad (21)$$

В силу соотношения (18), ветвящийся процесс $\{Z_n^*\}$ удовлетворяет условию (20), причем $\mathbf{D}Z_1^* = 2$, поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{Z_{[\sqrt{n}t]}^*}{\sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \mid \sum_{i=0}^{\infty} Z_i^* = n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} l_0^+ \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right), t \in [0, \infty) \right\}.$$

Отсюда, учитывая (19) и равенство $2 \sum_{i=0}^{\infty} Z_i^* = \mathcal{T}$, получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\nu_{[\sqrt{n}t]}}{2\sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} = 2n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} l_0^+ \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right), t \in [0, \infty) \right\}.$$

Осуществляя очевидную замену переменных, находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{v_{[\sqrt{n}t]}}{\sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} = n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{l_0^+(t), t \in [0, \infty)\}. \quad (22)$$

Известно (см., например, [8]), что одномерные распределения локального времени броуновской экскурсии имеют атом в нуле и абсолютно непрерывны на $(0, \infty)$. Таким образом, конечномерные функции распределения в (21) и (22) сходятся при любых положительных значениях аргументов. Методом, использованным в [8], можно показать, что сходимость конечномерных функций распределения в (21) и, следовательно, в (22) имеет место при любых значениях аргументов. Но это означает, что при $k \in \mathbf{N}$, $t_i \in [0, \infty)$, $x_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, k$, и $y \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{v_{[\sqrt{n}t_i]}}{\sqrt{n}} \leq x_i, i = 1, \dots, k; \frac{v_{[\sqrt{n}y]}}{\sqrt{n}} = 0 \mid \mathcal{T} = n \right) \\ = \mathbf{P}(l_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; l_0^+(y) = 0). \end{aligned} \quad (23)$$

Случайное событие $\{v_{[\sqrt{n}y]} = 0\}$ совпадает с событием $\{H < [\sqrt{n}y]\}$. Известно (см., например, [9]), что почти все траектории броуновской экскурсии и его локального времени непрерывны и при этом

$$\int_0^1 I_B(W_0^+(s)) ds = \int_B l_0^+(s) ds,$$

где B — произвольное борелевское множество, $I_B(\cdot)$ — его индикатор. Отсюда следует, что случайное событие $\{l_0^+(y) = 0\}$ совпадает с событием $\{h_0^+ < y\}$, где, напомним, h_0^+ — максимум броуновской экскурсии. Таким образом, соотношение (23) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{v_{[\sqrt{n}t_i]}}{\sqrt{n}}, i = 1, \dots, k; H < [\sqrt{n}y] \mid \mathcal{T} = n \right) \\ = \mathbf{P}(l_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; h_0^+ < y). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая абсолютную непрерывность распределения h_0^+ (см. [10]), получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{v_{[\sqrt{n}t_i]}}{\sqrt{n}} \leq x_i, i = 1, \dots, k; \frac{H}{\sqrt{n}} < y \mid \mathcal{T} = n \right) \\ = \mathbf{P}(l_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; h_0^+ < y). \end{aligned}$$

Из этого факта и соотношения (22) вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. При $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{v_{[\sqrt{n}t]}}{\sqrt{n}}, \frac{H}{\sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} = n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{l_0^+(t), h_0^+, t \in [0, \infty)\}.$$

Здесь на $H/\sqrt{n}$ и h_0^+ можно смотреть, как на случайные процессы с постоянными траекториями. Подчеркнем, что в доказанной лемме (как и в последующих леммах 2–5) речь идет о простом случайном блуждании.

Лемма 2. При $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{v_{[\sqrt{\mathcal{T}}t]}}{\sqrt{\mathcal{T}}}, \frac{H}{\sqrt{\mathcal{T}}}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{l_0^+(t), h_0^+, t \in [0, \infty)\}.$$

Доказательство. Очевидно, что при $k \in \mathbf{N}$, $t_i \in [0, \infty)$, $x_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, k$, и $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\frac{v_{[\sqrt{\mathcal{T}}t_i]}}{\sqrt{\mathcal{T}}} \leq x_i, i = 1, \dots, k; \frac{H}{\sqrt{\mathcal{T}}} \leq x \mid \mathcal{T} > n \right) \\ &= \frac{1}{\mathbf{P}(\mathcal{T} > n)} \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{P} \left(\frac{v_{[\sqrt{\mathcal{T}}t_i]}}{\sqrt{\mathcal{T}}} \leq x_i, i = 1, \dots, k; \frac{H}{\sqrt{\mathcal{T}}} \leq x \mid \mathcal{T} = n+l \right) \mathbf{P}(\mathcal{T} = n+l). \end{aligned} \quad (24)$$

В силу леммы 1, для произвольного $\varepsilon \in (0, \infty)$ существует такое $N \in \mathbf{N}$, что при всех натуральных n, l таких, что $n \geq N$, $l \geq 1$, справедливо неравенство

$$\left| \mathbf{P} \left(\frac{v_{[\sqrt{\mathcal{T}}t_i]}}{\sqrt{\mathcal{T}}} \leq x_i, i = 1, \dots, k; \frac{H}{\sqrt{\mathcal{T}}} \leq x \mid \mathcal{T} = n+l \right) - \mathbf{P}(l_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; h_0^+ \leq x) \right| \leq \varepsilon.$$

Отсюда видно, что правая часть (24) отличается от $\mathbf{P}(l_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; h_0^+ \leq x)$ при $n \geq N$ не более, чем на ε . Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{v_{[\sqrt{\mathcal{T}}t_i]}}{\sqrt{\mathcal{T}}} \leq x_i, i = 1, \dots, k; \frac{H}{\sqrt{\mathcal{T}}} \leq x \mid \mathcal{T} > n \right) \\ = \mathbf{P}(l_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; h_0^+ \leq x). \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что для произвольных $\varepsilon, v \in (0, \infty)$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w''_{[v|\sqrt{\mathcal{T}}t]/\sqrt{\mathcal{T}}}(\delta, 0, v) \geq \varepsilon \mid \mathcal{T} > n) = 0.$$

Снова применяя теорему 15.4 из [6], получаем утверждение леммы 2.

Лемма 3. При $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{v_{[\sqrt{\mathcal{T}}t]}}{\sqrt{\mathcal{T}}}, \frac{H}{\sqrt{\mathcal{T}}}, t \sqrt{\frac{n}{\mathcal{T}}}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{l_0^+(t), h_0^+, t\alpha, t \in [0, \infty)\}, \quad (25)$$

где α — равномерно распределенная на $(0, 1)$ случайная величина, не зависящая от процесса $\{l_0^+(t), h_0^+, t \in [0, \infty)\}$.

Доказательство. Поскольку третья компонента трехмерного случайного процесса в левой части (25) линейно зависит от t , то, в силу леммы 2, достаточно показать, что сходятся его конечномерные распределения, а для этого, в свою очередь, достаточно показать, что при $k \in \mathbf{N}$, $t_i \in [0, \infty)$, $x_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, k$; $x \in \mathbf{R}$ и $y \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{v_{[\sqrt{\mathcal{T}}t_i]}}{\sqrt{\mathcal{T}}} \leq x_i, i = 1, \dots, k; \frac{H}{\sqrt{\mathcal{T}}} \leq x, \sqrt{\frac{n}{\mathcal{T}}} < y \mid \mathcal{T} > n \right) \\ = y \mathbf{P}(l_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; h_0^+ \leq x). \end{aligned} \quad (26)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\frac{v_{[\sqrt{\mathcal{T}t_i}]}{\sqrt{\mathcal{T}}} \leq x_i, i = 1, \dots, k; \frac{H}{\sqrt{\mathcal{T}}} \leq x, \sqrt{\frac{n}{\mathcal{T}}} < y \mid \mathcal{T} > n \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\frac{v_{[\sqrt{\mathcal{T}t_i}]}{\sqrt{\mathcal{T}}} \leq x_i, i = 1, \dots, k; \frac{H}{\sqrt{\mathcal{T}}} \leq x, \mathcal{T} > \frac{n}{y^2} \mid \mathcal{T} > n \right) \\ &= \frac{\mathbf{P}(\mathcal{T} > n/y^2)}{\mathbf{P}(\mathcal{T} > n)} \mathbf{P} \left(\frac{v_{[\sqrt{\mathcal{T}t_i}]}{\sqrt{\mathcal{T}}} \leq x_i, i = 1, \dots, k; \frac{H}{\sqrt{\mathcal{T}}} \leq x \mid \mathcal{T} > \frac{n}{y^2} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Известно (см. §7 гл. 12 в [11]), что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\mathcal{T} > n) \sim \frac{c_1}{\sqrt{n}}, \quad (28)$$

где c_1 — положительная постоянная. Из леммы 2, соотношений (27) и (28) получаем требуемое соотношение (26). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. При $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{v_{[\sqrt{nt}]}{\sqrt{n}}, \frac{H}{\sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left\{ \frac{l_0^+(t\alpha)}{\alpha}, \frac{h_0^+}{\alpha}, t \in [0, \infty) \right\},$$

где α — случайная величина, описанная в лемме 3.

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned} U_n &= \left\{ \frac{v_{[\sqrt{\mathcal{T}t}]}{\sqrt{\mathcal{T}}}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} > n \right\}, & V_n &= \left\{ \frac{H}{\sqrt{\mathcal{T}}}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} > n \right\}, \\ \Phi_n &= \left\{ t \sqrt{\frac{n}{\mathcal{T}}}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} > n \right\}, & W_n &= \left\{ \frac{v_{[\sqrt{nt}]}{\sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} > n \right\}, \\ Q_n &= \left\{ \frac{H}{\sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} > n \right\}. \end{aligned}$$

Пусть $D_0[0, \infty)$ — подмножество всех неубывающих неотрицательных функций из $D[0, \infty)$. Ясно, что U_n, V_n и Φ_n — случайные элементы $D[0, \infty)$, $D[0, \infty)$ и $D_0[0, \infty)$ соответственно, а (U_n, V_n, Φ_n) — случайный элемент $D[0, \infty) \times D[0, \infty) \times D_0[0, \infty)$ с топологией произведения. В силу леммы 3,

$$(U_n, V_n, \Phi_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (U, V, \Phi), \quad (29)$$

где

$$U = \{l_0^+(t), t \in [0, \infty)\}, \quad V = \{h_0^+, t \in [0, \infty)\}, \quad \Phi = \{t\alpha, t \in [0, \infty)\}.$$

Очевидно, что

$$\mathbf{P}(U, V, \Phi \in \mathbf{C}[0, \infty)) = 1.$$

Рассмотрим отображение $D[0, \infty) \times D[0, \infty) \times D_0[0, \infty)$ в $D[0, \infty) \times D[0, \infty)$

$$\tilde{\Psi}(u, v, \varphi) = \left\{ \frac{u(\varphi(t))}{\varphi(1)}, \frac{v(t)}{\varphi(1)}, t \in [0, \infty) \right\},$$

где $u, v \in D[0, \infty)$, $\varphi \in D_0[0, \infty)$. Покажем, что если $u, v, \varphi \in C[0, \infty)$, то оно является непрерывным. Для этого достаточно показать, что отображение $D[0, \infty) \times D_0[0, \infty)$ в $D[0, \infty)$

$$\Psi(u, \varphi) = \{u(\varphi(t)), t \in [0, \infty)\}, u \in D[0, \infty), \varphi \in D_0[0, \infty),$$

является непрерывным, если $u, \varphi \in C[0, \infty)$. Если u_n сходится к u , а φ_n к φ при $n \rightarrow \infty$ в топологии Скорохода и $u, \varphi \in C[0, \infty)$, то обе эти сходимости равномерны на любом конечном отрезке $[0, b]$, $b \in (0, \infty)$. Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, b]} |\Psi(u_n, \varphi_n) - \Psi(u, \varphi)| &\leq \sup_{t \in [0, b]} |u_n(\varphi_n(t)) - u(\varphi_n(t))| + \sup_{t \in [0, b]} |u(\varphi_n(t)) - u(\varphi(t))| \\ &\leq \sup_{t \in [0, a]} |u_n(t) - u(t)| + \sup_{t \in [0, b]} |u(\varphi_n(t)) - u(\varphi(t))|, \end{aligned}$$

где $a = \sup_n \varphi_n(t)$. Отсюда вытекает равномерная сходимость $\Psi(u_n, \varphi_n)$ к $\Psi(u, \varphi)$ на отрезке $[0, b]$, поскольку функция $u(t)$ равномерно непрерывна на $[0, a]$. Из равномерной сходимости на любом конечном отрезке $[0, b]$ следует сходимость в топологии Скорохода. Итак, отображение Ψ и, следовательно, $\tilde{\Psi}$ являются непрерывными. Осталось заметить, что (W_n, Q_n) — случайный элемент $D[0, \infty) \times D[0, \infty)$ и

$$(W_n, Q_n) = \tilde{\Psi}(U_n, V_n, \Phi_n).$$

Поэтому из соотношения (29) вытекает, что при $n \rightarrow \infty$

$$(W_n, Q_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{\Psi}(U, V, \Phi) = \left\{ \frac{l_0^+(t\alpha)}{\alpha}, \frac{h_0^+}{\alpha}, t \in [0, \infty) \right\}.$$

Лемма 4 доказана.

Следствие 1. При $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{v_{[nt]}}{n}, \frac{H}{n}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} > n^2 \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left\{ \frac{l_0^+(\alpha t)}{\alpha}, \frac{h_0^+}{\alpha}, t \in [0, \infty) \right\}.$$

Лемма 5. При $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{v_{[nt]}}{n}, t \in [0, \infty) \mid H > n \right\} \Rightarrow \{Y^+(t), t \in [0, \infty)\},$$

где знак $\Rightarrow$ означает сходимость конечномерных распределений, а $\{Y^+(t)\}$ — процесс, распределение которого задается соотношением (4).

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \infty$, $x_1, \dots, x_k \in (0, \infty)$. Для произвольного положительного ε справедливо представление

$$\mathbf{P} \left(\frac{v_{[nt_i]}}{n} > x_i, i = 1, \dots, k; H > n \right) = I_1(n, \varepsilon) + I_2(n, \varepsilon), \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(n, \varepsilon) &= \mathbf{P} \left(\frac{v_{[nt_i]}}{n} > x_i, i = 1, \dots, k; H > n, \mathcal{T} > \varepsilon n^2 \right), \\ I_2(n, \varepsilon) &= \mathbf{P} \left(\frac{v_{[nt_i]}}{n} > x_i, i = 1, \dots, k; H > n, \mathcal{T} \leq \varepsilon n^2 \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$I_2(n, \varepsilon) \leq \mathbf{P}(H > n, \mathcal{T} \leq \varepsilon n^2).$$

В [12] показано, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \mathbf{P}(H > n, \mathcal{T} \leq \varepsilon n^2) = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n I_2(n, \varepsilon) = 0. \quad (31)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n I_1(n, \varepsilon) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbf{P}(\mathcal{T} > \varepsilon n^2) \\ &\times \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\nu[n t_i]}{n} > x_i, i = 1, \dots, k; H > n \mid \mathcal{T} > \varepsilon n^2\right), \end{aligned} \quad (32)$$

если последние два предела существуют. В силу соотношения (28),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbf{P}(\mathcal{T} > \varepsilon n^2) = c_1 / \sqrt{\varepsilon}. \quad (33)$$

По следствию 1, учитывая, что одномерные распределения локального времени броуновской экскурсии абсолютно непрерывны на $(0, \infty)$, а траектории этого процесса непрерывны п. н., получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\nu[n t_i]}{n} > x_i, i = 1, \dots, k; H > n \mid \mathcal{T} > \varepsilon n^2\right) \\ = \mathbf{P}\left(\frac{l_0^+(t_i \alpha / \sqrt{\varepsilon})}{\alpha} > \frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}, i = 1, \dots, k; \frac{h_0^+}{\alpha} > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right). \end{aligned} \quad (34)$$

Случайная величина α равномерно распределена на интервале $(0, 1)$ и не зависит от процесса $\{l_0^+(t), h_0^+, t \in [0, \infty)\}$, поэтому

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left(\frac{l_0^+(t_i \alpha / \sqrt{\varepsilon})}{\alpha} > \frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}, i = 1, \dots, k; \frac{h_0^+}{\alpha} > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\ &= \int_0^1 \mathbf{P}\left(\frac{l_0^+(t_i z / \sqrt{\varepsilon})}{z} > \frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}, i = 1, \dots, k; h_0^+ > z / \sqrt{\varepsilon}\right) dz \\ &= \sqrt{\varepsilon} \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{P}\left(\frac{l_0^+(t_i u)}{u} > x_i, i = 1, \dots, k; h_0^+ > u\right) du. \end{aligned} \quad (35)$$

Из соотношений (34) и (35) находим, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\nu[n t_i]}{n} > x_i, i = 1, \dots, k; H > n \mid \mathcal{T} > \varepsilon n^2\right) \\ = \sqrt{\varepsilon} \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{P}\left(\frac{l_0^+(t_i u)}{u} > x_i, i = 1, \dots, k; h_0^+ > u\right) du. \end{aligned} \quad (36)$$

Из соотношений (32), (33) и (36) видно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n I_1(n, \varepsilon) = c_1 \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{P} \left(\frac{l_0^+(t_i u)}{u} > x_i, i = 1, \dots, k; h_0^+ > u \right) du,$$

и, значит,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} n I_1(n, \varepsilon) = c_1 \int_0^{\infty} \mathbf{P} \left(\frac{l_0^+(t_i u)}{u} > x_i, i = 1, \dots, k; h_0^+ > u \right) du. \quad (37)$$

Из соотношений (30), (31) и (37) вытекает, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbf{P} \left(\frac{v_{[nt_i]}}{n} > x_i, i = 1, \dots, k; H > n \right) \\ = c_1 \int_0^{\infty} \mathbf{P} \left(\frac{l_0^+(t_i u)}{u} > x_i, i = 1, \dots, k; h_0^+ > u \right) du. \end{aligned} \quad (38)$$

В [12] показано, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbf{P}(H > n) = c_1 \mathbf{M} \sup_{t \in [0, 1]} W_0^+(t) = c_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (39)$$

Из соотношений (38), (39) получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{v_{[nt_i]}}{n} > x_i, i = 1, \dots, k \mid H > n \right) \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \mathbf{P} \left(\frac{l_0(t_i u)}{u} > x_i, i = 1, \dots, k; h_0^+ > u \right) du. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что это соотношение справедливо при $x_1, \dots, x_{k-1} \in (0, \infty)$, $x_k = 0$.

Итак, конечномерные распределения процесса $\{v_{[nt]}/n, t \in [0, \infty) \mid H > n\}$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\{Y^+(t), t \in [0, \infty)\}$ из соотношения (4). Лемма 5 доказана.

Из леммы 5, учитывая соотношение (19) и равенство $\mathbf{D}Z_1^* = 4\lambda^* = 2$, получаем, что конечномерные распределения процесса $\{Z_{[nt]}^*/(\lambda^* n), t \in [0, \infty) \mid T^* > n\}$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к конечномерным распределениям процесса $\{Y^+(t), t \in [0, \infty)\}$ из соотношения (4). Следовательно, предельный процесс в соотношении (3) действительно имеет распределение, задаваемое соотношением (4). Теорема 1 доказана.

4. Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 6. Если выполнено условие (1), то при $n \rightarrow \infty$

$$\{Y_n(t), tT/n, t \in [0, \infty) \mid Z_n > 0\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{Y^+(t), t\tau, t \in [0, \infty)\}, \quad (40)$$

где τ — некоторая случайная величина, $\tau \geq 1$, причем для любого борелевского множества A из $D[0, \infty) \times D[0, \infty)$

$$\mathbf{P}(\{Y^+(t), t\tau\} \in A) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \mathbf{P} \left(\left\{ \frac{l_0^+(tu)}{u}, \frac{h_0^+}{u} \right\} \in A, h_0^+ > u \right) du.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 и линейной зависимости от t второй компоненты случайного вектора в левой части (40), достаточно показать, что при $t_1, \dots, t_k \in (0, \infty)$, $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$ и $y \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; T/n > y \mid Z_n > 0) \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \mathbf{P}\left(\frac{l_0^+(t_i u)}{u} \leq x_i, i = 1, \dots, k; \frac{h_0^+}{u} > y; h_0^+ > u\right) du. \end{aligned} \quad (41)$$

Рассмотрим сначала случай $y \in [1, \infty)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; T/n > y \mid Z_n > 0) \\ = \frac{\mathbf{P}(T > ny)}{\mathbf{P}(T > n)} \mathbf{P}\left(\frac{Z_{[nt_i]}}{\lambda n} \leq x_i, i = 1, \dots, k \mid T/n > y\right). \end{aligned}$$

Отсюда, применяя теорему 1 и соотношение (6), получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; T/n > y \mid Z_n > 0) \\ = \frac{1}{y} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \mathbf{P}\left(\frac{l_0^+(t_i u/y)}{u} \leq \frac{x_i}{y}, i = 1, \dots, k; h_0^+ > u\right) du. \end{aligned}$$

Для доказательства соотношения (41) осталось заметить, что выражение справа равно правой части (41). Если же $y \in (0, 1)$, то

$$\mathbf{P}\left(Y_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; \frac{T}{n} > y \mid Z_n > 0\right) = \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k \mid Z_n > 0),$$

и соотношение (41) сразу следует из теоремы 1. Лемма 6 доказана.

Следствие 2. Пусть $\Psi(\cdot, \cdot)$ — непрерывное отображение $D[0, \infty) \times D[0, \infty)$ в $D[0, \infty)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\{\Psi(\{Y_n(t)\}, \{tT/n\}) \mid Z_n > 0\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \Psi(\{Y^+(t)\}, \{t\tau\}),$$

причем для любого борелевского множества A из $D[0, \infty)$

$$\mathbf{P}(\Psi(\{Y^+(t)\}, \{t\tau\}) \in A) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \mathbf{P}\left(\Psi\left(\left\{\frac{l_0^+(tu)}{u}\right\}, \left\{t \frac{h_0^+}{u}\right\}\right) \in A, h_0^+ > u\right) du.$$

Пусть теперь $\Psi(\cdot, \cdot)$ — непрерывное отображение $D[0, \infty) \times D_0[0, \infty)$ в $D[0, \infty)$, введенное при доказательстве леммы 4. Тогда из следствия 2 находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\{Y_n(t), Y_n(tT/n), t \in [0, \infty) \mid Z_n > 0\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{Y^+(t), Y^+(t\tau), t \in [0, \infty)\},$$

причем для любых борелевских множеств A, B из $D[0, \infty)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{Y^+(t)\} \in A, \{Y^+(t\tau)\} \in B) \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \mathbf{P}\left(\left\{\frac{l_0^+(tu)}{u}\right\} \in A, \left\{\frac{l_0^+(th_0^+)}{u}\right\} \in B, h_0^+ > u\right) du. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$Y_n \left(\frac{tT}{n} \right) = \frac{Z_{[tT]}}{\lambda n}$$

и полагая $Y_0^+(t) = Y^+(t\tau)$, получаем утверждение теоремы 2.

Список литературы

1. Lamperti J., Ney P., Conditioned branching processes and their limiting diffusions. *Теория вероятностей и ее применения* (1968) **13**, 126–136.
2. Durrett R., Conditioned limit theorems for some null recurrent Markov processes. *Ann. Probab.* (1978) **6**, 798–828.
3. Lindvall T., Convergence of critical Galton–Watson branching processes. *J. Appl. Probab.* (1972) **9**, 445–450.
4. Lindvall T., Limit theorems for some functionals of certain Galton–Watson branching processes. *Adv. Appl. Probab.* (1974) **6**, 309–321.
5. Севастьянов Б. А., *Курс теории вероятностей и математической статистики*. Наука, Москва, 1982.
6. Биллингсли П., *Сходимость вероятностных мер*. Наука, Москва, 1977.
7. Афанасьев В. И., Условное случайное блуждание с отрицательным сносом. *Теория вероятностей и ее применения* (1979) **24**, 191–198.
8. Drmota M., Gittenberger B., On the profile of random trees. *Random Structures and Algorithms* (1997) **10**, 421–451.
9. Cohen J. W., Hooghiemstra G., Brownian excursion, the M/M/1 queue and their occupation times. *Math. Oper. Res.* (1981) **6**, 608–629.
10. Durrett R. T., Iglehart D. L., Miller D. R., Weak convergence to Brownian meander and Brownian excursion. *Ann. Probab.* (1977) **5**, 117–129.
11. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2. Мир, Москва, 1984.
12. Афанасьев В. И., О функционалах от случайного блуждания до момента первого достижения отрицательной полуоси. *Теория вероятностей и ее применения* (1986) **31**, 773–777.

Статья поступила 20.01.2004.

Переработанный вариант поступил 12.10.2004.