Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Бабаш, Внешне периодические автоматы, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 1, 68–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm88>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 15:25:59

Внешне периодические автоматы

© 2005 г. А. В. Бабаш

Описываются автоматы, которые при любом начальном состоянии перерабатывают любую входную чисто периодическую последовательность в выходную чисто периодическую последовательность. Указан алгоритм, проверяющий, обладает ли данный автомат таким свойством. Введены и оценены сверху параметры его сложности.

Пусть $A = (X, S, Y, (h_x)_{x \in X}, (f_x)_{x \in X})$ — конечный автомат с входным алфавитом X , выходным алфавитом Y , множеством состояний S , частичными функциями перехода $(h_x)_{x \in X}$ и частичными функциями выхода $(f_x)_{x \in X}$. Введем следующие обозначения: пусть $|P|$ — длина входного слова P автомата, $|S|$ — мощность множества состояний S автомата A , $A(s, P)$ и $P(s)$ — выходное слово автомата A длины $|A(s, P)| = |P|$ и его заключительное состояние, полученные в результате подачи входного слова P на автомат A с начальным состоянием $s \in S$, наконец, $\omega \mid L$ означает, что ω делит L . Под периодом периодической последовательности понимается ее минимальный период.

Определение 1. Автомат A называется автоматом с L -потерей информации о выходе, если существуют входное слово P длины $|P| = L$, $L \geq 1$, и состояния $s_1, s_2 \in S$, для которых имеют место соотношения

$$\begin{aligned} A(s_1, P) &\neq A(s_2, P), \\ P(s_1) &= P(s_2), \end{aligned}$$

а при любом входном слове длины, меньшей L , не существует состояний с указанным свойством. Очевидно, граф переходов автомата A с L -потерей информации о выходе содержит диаграмму вида

$$\begin{aligned} s_1 &\xrightarrow{P, A(s_1, P)} s', \\ s_2 &\xrightarrow{P, A(s_2, P)} s', \end{aligned}$$

где

$$s' = P(s_1) = P(s_2), \quad A(s_1, P) \neq A(s_2, P), \quad |P| = L.$$

Определение 2. Автомат A , не являющийся автоматом с L -потерей информации о выходе ни при каком L , называется автоматом без потери информации о выходе.

Лемма 1. Пусть A — автомат с L_A -потерей информации о выходе. Тогда

$$L_A \leq \frac{1}{2}|S|(|S| - 1) + 1.$$

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы 1 и P, s_1, s_2 таковы, что

$$P = x_1 x_2 \dots x_L, \quad |P| = L = L_A, \quad P(s_1) = P(s_2) = s', \quad A(s_1, P) \neq A(s_2, P),$$

при этом, очевидно, $f_{x_1} s_1 \neq f_{x_1} s_2$ и

$$f_{x_j} h_{x_{j-1}} \dots h_{x_1} s_1 = f_{x_j} h_{x_{j-1}} \dots h_{x_1} s_2$$

для $j \in \{2, \dots, L\}$. Более того, легко показать, что при любом $j \in \{1, \dots, L-1\}$ состояния $h_{x_j} \dots h_{x_1} s_1$ и $h_{x_j} \dots h_{x_1} s_2$ различны. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что в множестве $M = \{h_{x_j} \dots h_{x_1} s_1, h_{x_j} \dots h_{x_1} s_2\}_{j \in [1, L-1]}$ неупорядоченных пар различных состояний нет одинаковых пар. Предположим, что такие пары имеются. Имено, пусть, например, для некоторых $k(1) < k(2), k(1), k(2) \in \{1, \dots, L-1\}$, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} h_{x_{k(1)}} \dots h_{x_1} s_1 &= h_{x_{k(2)}} \dots h_{x_1} s_1, \\ h_{x_{k(1)}} \dots h_{x_1} s_2 &= h_{x_{k(2)}} \dots h_{x_1} s_1. \end{aligned}$$

Заметим, что случай

$$\begin{aligned} h_{x_{k(1)}} \dots h_{x_1} s_1 &= h_{x_{k(2)}} \dots h_{x_1} s_1, \\ h_{x_{k(1)}} \dots h_{x_1} s_2 &= h_{x_{k(2)}} \dots h_{x_1} s_2 \end{aligned}$$

рассматривается аналогично.

Тогда для входного слова

$$\bar{P} = x_1 x_2 \dots x_{k(1)+1} x_{k(2)+1} \dots x_L$$

длины $L - k(2) + k(1)$ и состояний s_1, s_2 справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \bar{P}(s_1) &= \bar{P}(s_2), \\ A(s_1, \bar{P}) &\neq A(s_2, \bar{P}), \end{aligned}$$

что противоречит условию леммы 1. Таким образом, лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $A = (X, S, Y, (h_x)_{x \in X}, \lambda)$ — автомат Мура с L_A -потерей информации о выходе и $\{N_y, y \in Y\}$ — мощности его классов 1-неотличимых состояний,

$$\sum_{y \in Y} N_y = |S|.$$

Тогда

$$L_A \leq 1 + \sum_{y \in Y} \frac{1}{2} N_y (N_{y-1}).$$

Доказательство. Воспользовавшись обозначениями, введенными при доказательстве леммы 1, и сформулированными там утверждениями, заключаем, что множество M может быть разбито на классы $M_y, y \in Y$, где M_y представляет собой множество всех пар $(a, b) \in M$, для которых $\lambda(a) = \lambda(b) = y$. Очевидно, что

$$\bigcup_{y \in Y} M_y = M,$$

причем для мощностей $|M_y|$ классов M_y справедливы оценки

$$|M_y| \leq \frac{1}{2} N_y (N_y - 1), \quad y \in Y,$$

из которых вытекает утверждение леммы 2.

Определение 3. Автомат A называется внешне периодическим (внутренне периодическим), если для любой его входной чисто периодической последовательности P и любого его начального состояния $s \in S$ его выходная последовательность $A(s, P)$ (его последовательность состояний) является чисто периодической последовательностью.

Теорема 1. Следующие два условия эквивалентны:

- (1) автомат A является внешне периодическим автоматом,
- (2) автомат A является автоматом без потери информации о выходе.

Доказательство. Пусть A — внешне периодический автомат с L -потерей информации о выходе и $s_1, s_2, P = x_1, x_2, \dots, x_L$ таковы, что

$$A(s_1, P) \neq A(s_2, P), \quad P(s_1) = P(s_2).$$

Тогда для входной периодической последовательности

$$\bar{P} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_j \dots,$$

где $\bar{x}_j = \bar{x}_{j+L}$ для любого j и $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_L) = (x_1, x_2, \dots, x_L)$ последовательности $A(s_1, P), A(s_2, P)$ чисто периодические. Кроме того, очевидно, что, начиная с номера $L + 1$, элементы таких последовательностей совпадают. Поэтому должны совпадать и их начальные элементы, то есть $A(s_1, P) = A(s_2, P)$, что противоречит начальному допущению. Таким образом, показано, что условие 1) влечет условие 2).

Предположим теперь, что автомат A не является внешне периодическим. Пусть $P = x_1 x_2 \dots x_L$, а входная последовательность A имеет вид $R = PP \dots P \dots$ (конкатенация слов P). Очевидно, что последовательность R периодическая некоторого периода $\omega \mid L$. Пусть s_1 — состояние автомата, при котором последовательность $A(s_1, R)$ не является чисто периодической. Обозначим через $A_M(s_1, R) = s_1 s_2 \dots$ последовательность состояний автомата A , отвечающую входной последовательности R и начальному состоянию $s_1 \in S$. В ее подпоследовательности $s_{L+1} s_{2L+1} s_{3L+1} \dots$ имеются одинаковые состояния, так как мощность множества состояний S автомата A конечна. Пусть, например,

$$s_{Lr(1)+1} = s_{Lr(2)+1}, \quad r(2) > r(1).$$

Не ограничивая общности доказательства, будем считать, что $r(2) - r(1) > r(1)$. Обозначим $(P)^k$ конкатенацию $PP \dots P$, состоящую из k слов P . Несложно проверить, что выходная последовательность $A(s_1, R)$ автомата A имеет вид

$$A(s_1, R) = A(s_1, (P)^{r(1)}) A(s_{1+Lr(1)}, (P)^{r(2)-2r(1)}) A(s_{1+L(r(2)-r(1))}, (P)^{r(1)}) \\ A(s_{1+Lr(1)}, (P)^{r(2)-2r(1)}) A(s_{1+L(r(2)-r(1))}, (P)^{r(1)}) \dots$$

Ясно, что

$$A(s_1, (P)^{r(1)}) \neq A(s_{1+L(r(2)-r(1))}, (P)^{r(1)}),$$

так как в противном случае последовательность $A(s_1, R)$ была бы чисто периодической последовательностью с периодом $\omega \mid L(r(2) - r(1))$.

Таким образом, установлено, что граф переходов автомата A содержит диаграмму вида

$$\begin{array}{c} s_1 \xrightarrow{P^{r(1)}, A(s_1, P^{r(1)})} s', \\ s_1 + L(r(2) - r(1)) \xrightarrow{P^{r(1)}, A(s_1 + L(r(2) - r(1)), P^{r(1)})} s', \end{array}$$

где

$$s' = s_1 + Lr(1) = s_1 + Lr(2),$$

то есть автомат A является автоматом с L -потерей информации о выходе, $L \leq Lr(1)$.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Автомат A является внутренне периодическим тогда и только тогда, когда его частичные функции переходов осуществляют биекции S в S , то есть автомат A является перестановочным.*

Теорема 2. *Автомат A является внешне периодическим тогда и только тогда, когда для любой его чисто периодической входной последовательности P периода $\omega \leq |S|(|S| - 1)/2 + 1$ и любого состояния $s \in S$ последовательность $A(s, P)$ является чисто периодической последовательностью.*

Доказательство. Предположим, что автомат A не является внешне периодическим автоматом. Тогда, согласно теореме 1, он является автоматом с L_A -потерей информации о выходе. В первой части доказательства теоремы 1 показано, что в этом случае существуют чисто периодическая последовательность P периода $\omega \leq L_A$ и состояние $s \in S$, для которых последовательность $A(s, P)$ не является чисто периодической последовательностью. В то же время, согласно лемме 1,

$$L_A \leq |S|(|S| - 1)/2,$$

откуда и следует утверждение теоремы 2.

Использование леммы 2 для автомата Мура A позволяет аналогично теореме 2 доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Автомат Мура A является внешне периодическим автоматом тогда и только тогда, когда для любого $s \in S$ и любой его чисто периодической последовательности P периода*

$$\omega \leq 1 + \sum_{y \in Y} \frac{1}{2} N_y (N_y - 1)$$

где N_y — мощность классов 1-неотличимых состояний, последовательность $A(s, P)$ является чисто периодической последовательностью.

Следствие 2. *Существует алгоритм, проверяющий, является ли заданный автомат внешне периодическим автоматом.*

Доказательство. Действительно, для автомата Мура A , согласно теореме 2, число последовательностей $A(s, P)$ при периодической входной последовательности P периода

$$\omega(P) \leq \frac{1}{2}|S|(|S| - 1) + 1$$

и начальном состоянии s конечно. Следовательно, достаточно доказать существование алгоритма, проверяющего, является ли фиксированная последовательность $A(s, P)$ при

$$\omega(P) \leq |S|(|S| - 1)/2 + 1$$

и $s \in S$ чисто периодической последовательностью. Существование же такого алгоритма следует из того факта (см. [1]), что приведенная длина исследуемой последовательности $A(s, P)$ ограничена сверху величиной $|S|\omega(P)$.

Список литературы

1. Кобринский Н. Е., Трахтенброт Б. А., *Введение в теорию конечных автоматов*. Наука, Москва, 1962.

Статья поступила 05.06.2003.