Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Бородина, Синтез легкотестируемых схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ при однотипных константных неисправностях на выходах элементов, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 1, 129–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm92>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:19:05

Синтез легкотестируемых схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ при однотипных константных неисправностях на выходах элементов

© 2005 г. Ю. В. Бородина

Предложен метод синтеза легкотестируемых схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, реализующих булевы функции, в дизъюнктивной нормальной форме которых не более h переменных присутствуют как с отрицанием, так и без отрицания. Допускаются константные неисправности типа 1 на выходах элементов. Доказано, что для таких схем полный проверяющий тест имеет длину, не большую h .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 02-01-00985; программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ-1807.2003.1; программой «Университеты России»; программой фундаментальных исследований Отделения математических наук «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики».

Для обеспечения надежного функционирования управляющих систем необходимо решать задачи контроля исправности и диагностики неисправностей этих систем. Для решения этих задач С. В. Яблонским предложены логические методы контроля [1], суть которых состоит в том, что входы схемы подвергаются некоторому специальным образом подобранному проверяющему воздействию, то есть на входы системы подается некоторая тестовая информация, и на основе наблюдения реакции системы на это воздействие делается заключение об ее исправности и характере неисправностей (при их наличии).

Будем рассматривать схемы из функциональных элементов [2, 3]. Пусть S — некоторая схема, реализующая булеву функцию $f(\vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Функция, реализуемая на выходе схемы при наличии в схеме неисправных элементов, называется функцией неисправности. Множество T входных наборов схемы S называется полным проверяющим тестом для этой схемы (см. [4, 5]), если для любой функции неисправности $g(\vec{x})$, не равной тождественно $f(\vec{x})$, в T найдется хотя бы один такой набор $\vec{\sigma}$, что $f(\vec{\sigma}) \neq g(\vec{\sigma})$. Число наборов, составляющих этот тест, называется длиной теста. В качестве тривиального теста всегда можно взять тест, содержащий все 2^n наборов значений переменных булевой функции от n переменных.

Прежде всего интересна задача построения минимальных тестов, то есть тестов, содержащих минимальное число наборов. В простейшем случае решение задачи сводится к перебору, что затруднительно при больших значениях n . Кроме того, длина минимального теста может существенно зависеть и от вида схемы, реализующей заданную функцию.

Рис. 1.

Для упрощения решения данной задачи с целью получения практического результата существуют следующие пути:

- ограничение типов возможных неисправностей [6];
- выбор схем определенного типа;
- синтез легкотестируемых схем [5].

В работе рассматривается задача построения легкотестируемых схем из функциональных элементов для булевых функций, в дизъюнктивной нормальной форме которых не более чем k переменных присутствует как с отрицанием, так и без отрицания, а остальные переменные присутствуют либо только с отрицанием, либо только без отрицания. В качестве базиса возьмем $\{\&, \vee, \neg\}$. В качестве неисправностей предполагаются константные неисправности типа 1 на выходах элементов.

Для произвольной булевой функции $f(\vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, известен (см. [7]) способ построения реализующей ее схемы, допускающей полный проверяющий тест длины, не большей n . Целью данной работы является уточнение этого результата для указанных классов функций (см. теорему 4).

Теорема 1. Любую монотонную булеву функцию, отличную от константы, можно реализовать схемой из функциональных элементов, допускающей полный проверяющий тест длины 1.

Доказательство. Начнем с построения схемы. В данном случае в качестве базиса можем взять $\{\&, \vee\}$. Рассмотрим все нулевые наборы функции $f(\vec{x})$ (то есть наборы значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, на которых функция принимает значение 0). Выберем из них набор, содержащий максимальное число единиц s , $s \geq 1$. Если $s = 0$, то функция имеет вид $f(\vec{x}) = x_1 \vee \dots \vee x_n$, и при реализации этой функции цепью из дизъюнкторов (см. рис. 1) полным проверяющим тестом для полученной схемы будет единственный нулевой набор.

Далее считаем $s \geq 1$. Без ограничения общности будем считать, что эти s единиц соответствуют первым s переменным $x_1, x_2, \dots, x_s$.

Рис. 2.

Возьмем тупиковую дизъюнктивную нормальную форму F функции $f(\tilde{x})$ указанного в условии теоремы типа (известно, см., например, [8], что эта тупиковая дизъюнктивная нормальная форма будет для монотонной булевой функции $f(\tilde{x})$ также и минимальной).

Схему S , реализующую функцию $f(\tilde{x})$, составим из трех подсхем S_1 , S_2 и S_3 (см. рис. 2).

Подсхема S_1 реализует все конъюнкции, входящие в указанную дизъюнктивную нормальную форму F функции $f(\tilde{x})$, следующим образом. Каждая конъюнкция реализуется цепью из конъюнкторов, причем на входы верхних конъюнкторов цепи (см. [5]) подаются переменные x_i с $i > s$. Такие переменные содержатся в каждой конъюнкции в силу выбора параметра s .

Схема S_2 состоит из цепей конъюнкторов длины s (см. рис. 3). В каждой цепи на левый вход верхнего элемента E_1 подается выход каждого конъюнктора схемы S_1 (таким образом, количество цепей в схеме S_2 совпадает с количеством элементов схемы S_1). На левые входы последующих конъюнкторов $E_2, \dots, E_s$ подаются значения с выходов предыдущих, на правые же входы — значения переменных x_i , где $1 \leq i \leq s$.

Схема S_3 представляет собой цепь из дизъюнкторов и реализует дизъюнкцию выходных функций всех цепей схем S_1 и S_2 .

Заметим, что при отсутствии блока S_2 совокупность схем S_1 и S_3 реализует функцию $f(\tilde{x})$.

Докажем, что схема S также реализует функцию $f(\tilde{x})$. Пусть это не так и схема S реализует такую функцию $g(\tilde{x})$, что $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$ для некоторого набора $\tilde{\sigma}$ значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Если $f(\tilde{\sigma}) = 1$, то из устройства схемы следует, что и $g(\tilde{\sigma}) = 1$. Следовательно, $f(\tilde{\sigma}) = 0$, а $g(\tilde{\sigma}) = 1$ — единственный возможный вариант выполнения неравенства $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. Это означает, что некоторая конъюнкция вида $x_1 \& \dots \& x_s \& x_{i_1} \& \dots \& x_{i_k}$, $k > 0$, $i_j > s$, реализуемая на выходе подсхемы S_2 , равна 1 на наборе $\tilde{\sigma}$, в то время как $f(\tilde{\sigma}) = 0$. Тогда набор $\tilde{\sigma}$ должен содержать единицы на местах $1, \dots, s, i_1, \dots, i_k$, и этих единиц оказывается более s штук, что невозможно в силу выбора параметра s как максимального числа единиц в нулевых наборах функции f .

Перейдем к построению теста. Докажем, что полным проверяющим тестом для построенной нами схемы S будет набор $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ с s единицами и $n - s$ нулями.

На этом наборе значение функции $f(\tilde{x})$ равно 0. Достаточно показать, что при возникновении неисправностей схема S на данном наборе будет выдавать значение 1. В силу монотонности рассматриваемых функций и вида базиса данное утверждение достаточно

Рис. 3.

доказать при возникновении одной неисправности.

Легко заметить, что в исправном состоянии значение на выходах всех элементов схемы на данном наборе равно 0.

При неисправности любого элемента подсхемы S_3 или при подаче на любой из ее входов единицы схема S выдает значение 1.

Рассмотрим случай неисправности какого-либо элемента подсхемы S_2 . Так как она состоит из цепей конъюнкторов, на правые входы которых на данном наборе подаются 1, а на левые (в исправном состоянии схемы) 0, то при подаче на левый вход первого элемента цепи 1 или при переходе в неисправное состояние какого-либо элемента цепи на левый вход следующего элемента подается значение 1. Но в таком случае значение 1 окажется и на выходе всей цепи, являющемся входом схемы S_3 . В итоге в данном случае получим 1 и на выходе всей схемы S .

При переходе в неисправное состояние одного из элементов схемы S_1 на вход некоторой цепи схемы S_2 будет подано значение 1. Из вышесказанного следует, что и в этом случае на выходе всей схемы S получим единицу.

Замечание 1. Исключенные в теореме 1 константные функции также реализуются схемами, допускающими полный проверяющий тест длины 1 (см. [5], с. 149).

Замечание 2. Теорема 1 справедлива и при константных неисправностях типа 0 на выходах элементов. Доказательство в этом случае необходимо подвергнуть следующим изменениям:

- монотонная булева функция $f(\bar{x})$ представляется в виде тупиковой конъюнктивной нормальной формы, в которой отсутствуют переменные с отрицаниями:

$$f(\bar{x}) = D_1 \& D_2 \& \dots \& D_l,$$

Рис. 4.

где D_i есть дизъюнкция вида $x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee \dots \vee x_{i_m}$ (из конъюнктивной нормальной формы нельзя удалить ни одной дизъюнкции, а из каждой дизъюнкции нельзя удалить ни одной переменной);

- параметр s выберем как максимальное число нулей, содержащихся в единичных наборах функции (то есть наборах, на которых функция принимает значение 1);
- в подсхеме S_1 все дизъюнкции, входящие в некоторую тупиковую конъюнктивную нормальную форму указанного типа, реализуются на выходах цепей из дизъюнкторов;
- подсхему S_2 составляют цепи из дизъюнкторов;
- подсхема S_3 реализует конъюнкцию всех функций, получаемых на выходах схем S_1 и S_2 ;
- в качестве теста берется набор $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ с s нулями и $n - s$ единицами.

Теорема 2. Любую булеву функцию от n переменных, отличную от константы и представимую в виде дизъюнктивной нормальной формы, в которой каждая переменная присутствует либо только с отрицанием, либо только без отрицания, можно реализовать схемой из функциональных элементов, допускающей полный проверяющий тест длины 1.

Доказательство. Начнем с построения схемы. Возьмем для функции $f(x_1, \dots, x_n)$ тупиковую дизъюнктивную нормальную форму F , в которую переменные $x_1, \dots, x_m$ входят без отрицаний, а переменные $x_{m+1}, \dots, x_n$ — только с отрицаниями. Слагаемые из F разобьем на два непересекающихся подмножества A_1 и A_2 . К A_1 отнесем слагаемые вида $x_{i_1} \& x_{i_2} \& \dots \& x_{i_l}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq m$, не содержащие переменные с отрицаниями. В A_2 войдут все оставшиеся конъюнкции.

Искомую схему S' для функции f построим как объединение $S \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6 \cup S_7$ (см. рис. 4).

Схема $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ (см. также рис. 2) реализует дизъюнкцию всех конъюнкций из A_1 и устроена так, как указано в доказательстве теоремы 1. Схема S_4 содержит $n - m$

инверторов, на выходах которых реализуются $\bar{x}_{m+1}, \dots, \bar{x}_n$. Схема S_5 реализует все конъюнкции из множества A_2 цепями из конъюнкторов, причем на левый вход первого конъюнктора каждой цепи подается выход одного из инверторов (для той переменной, отрицание которой присутствует в данной конъюнкции) схемы S_4 .

Схема S_6 служит для контроля исправности элементов из подсхем S_4 и S_5 . В S_6 содержится столько конъюнкторов, сколько инверторов и конъюнкторов содержится в схемах S_4 и S_5 , и каждый конъюнктор из S_6 однозначно соответствует некоторому элементу одной из схем S_4 или S_5 . Пусть конъюнктор E из S_6 соответствует элементу E' одной из подсхем S_4 или S_5 . Если E' — инвертор из S_4 , то один вход E соединяется с выходом E' , а второй вход E соединяется с тем входом схемы S_4 , с которым соединен вход инвертора E' . Предположим теперь, что E' — конъюнктор из S_5 , то есть элемент некоторой цепи Z из конъюнкторов. В этом случае один вход конъюнктора E соединяем с выходом E' , а на второй вход подаем значение той переменной, отрицание которой подается на левый вход верхнего элемента соответствующей цепи Z . Если все элементы из S_4 и S_5 исправны, то на выходе элемента E реализуется некоторая конъюнкция, содержащая в качестве сомножителя конъюнкцию $\bar{x}_i \& x_i$ с некоторым $i > m$. Таким образом, при отсутствии неисправных элементов в схемах S_4 , S_5 и S_6 на выходах всех конъюнкторов из S_6 реализуются тождественные нули.

Схема S_7 представляет собой цепь из дизъюнкторов и реализует дизъюнкцию функций, реализуемых на выходах схем S , S_5 и S_6 .

Построенная схема S' при отсутствии неисправностей реализует заданную функцию f .

Перейдем к построению теста. В силу теоремы 1 схема S допускает полный проверяющий тест, состоящий из одного набора $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$. Докажем, что в качестве полного проверяющего теста для схемы S' можно взять набор $(\sigma_1, \dots, \sigma_m, 1, \dots, 1)$, содержащий $n - m$ единиц в конце набора.

На этом наборе значение функции $f(\tilde{x})$ равно 0. Достаточно доказать, что при возникновении неисправностей схема S' на данном наборе будет выдавать значение 1.

Легко заметить, что в исправном состоянии значение на выходах всех элементов схемы на данном наборе равно 0.

При возникновении неисправности любого элемента подсхемы S_7 или при подаче на любой из ее входов единицы схема S' выдает значение 1.

При неисправности любого элемента подсхемы S на ее выходе, а значит, и на выходе всей схемы S' получим 1 (в силу того, что набор $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ является тестом для S , а остальные переменные на входы этой схемы не подаются).

При неисправности какого-либо элемента E' из подсхем S_4 и S_5 на оба входа соответствующего ему конъюнктора E из S_6 подаются единицы. Следовательно, на выходе этого конъюнктора E , а вслед за ним и на выходе подсхемы S_7 тоже получим единицу.

При переходе в неисправное состояние одного из элементов схемы S_6 на вход некоторого элемента схемы S_7 будет подано значение 1. В этом случае опять же единицу получим и на выходе всей схемы.

Теорема 3. Любую функцию n переменных, отличную от константы и представимую в виде дизъюнктивной нормальной формы, в которой каждая переменная, кроме одной, присутствует либо только с отрицанием, либо только без отрицания, можно реализовать схемой из функциональных элементов, допускающей полный проверяющий тест длины 1.

Рис. 5.

Доказательство. Начнем с построения схемы. Пусть для определенности функция $f(\bar{x})$ существенно зависит от n переменных и переменная x_1 входит в удовлетворяющую условию теоремы тупиковую дизъюнктивную нормальную форму F как с отрицанием, так и без отрицания. Разложим функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ по первой переменной следующим образом:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \& f_1 \vee \bar{x}_1 \& f_0,$$

где $f_1 = f(1, x_2, \dots, x_n)$, $f_0 = f(0, x_2, \dots, x_n)$.

Для функций f_1 и f_0 возьмем тупиковые дизъюнктивные нормальные формы F_1 и F_0 соответственно. Каждая из переменных $x_2, \dots, x_n$ входит в обе эти формы либо только с отрицанием, либо только без отрицания. Можно считать, что в каждой из этих форм нет слагаемого 1, в противном случае в дизъюнктивную нормальную форму исходной функции входит отдельное слагаемое x_1 или $\bar{x}_1$, а тогда в силу закона поглощения соответственно $\bar{x}_1$ или x_1 вообще исчезает, и оказываются выполненными условия теоремы 2.

Искомую схему S'' для исходной функции f построим как объединение схем S' , S_8 , S_9 , S_{10} , одного конъюнктора K и одного инвертора I (см. рис. 5).

Схема $S' = S \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6 \cup S_7$ реализует F_1 согласно теореме 2. Выход этой схемы подается на правый вход конъюнктора K , на левый вход которого подается значение

переменной x_1 .

Схема S_8 реализует все конъюнкции, входящие в дизъюнктивную нормальную форму F_0 функции f_0 цепями конъюнкторов, причем на левый вход верхнего конъюнктора каждой цепи подается выход инвертора I , на вход которого подано значение переменной x_1 . Если функция f_1 существенно зависит от $n - 1$ переменной, то все необходимые для построения схемы значения отрицаний переменных уже реализованы в схеме S' , и выходы соответствующих инверторов из S' подаются в подсхему S_8 (стрелка от S' к S_8 на рис. 5). Если же функция $f_1 = f(1, x_2, \dots, x_n)$ не зависит от некоторой переменной x_i , отрицание которой входит в F_0 , то мы добавляем соответствующий инвертор E^- в схему S_8 ; на вход инвертора E^- подаем переменную x_i , а выход данного инвертора E^- подаем на входы соответствующих конъюнкторов этой схемы.

Схема S_9 служит для контроля исправности элементов из схемы S_8 и инвертора I . В S_9 содержится столько конъюнкторов, сколько инверторов и конъюнкторов содержится в схеме S_8 плюс один, и каждый конъюнктор из S_9 однозначно соответствует некоторому элементу схемы S_8 или инвертору I . Пусть конъюнктор E из S_9 соответствует элементу E' . Если E' — инвертор для переменной x_i , то один вход элемента E соединяется с выходом E' , а на второй вход элемента E подается x_i . Предположим теперь, что E' — конъюнктор из S_8 , то есть элемент некоторой цепи из конъюнкторов. В этом случае один вход элемента E соединяется с выходом E' , а на второй вход элемента E подается x_1 . Если все элементы из S_8 и инвертор I исправны, то на выходе элемента E реализуется некоторая конъюнкция, содержащая в качестве сомножителя конъюнкцию $\bar{x}_i \& x_i$. Таким образом, при отсутствии неисправных элементов в схемах S_8 , S_9 и исправном инверторе I на выходах всех конъюнкторов из S_9 реализуются тождественные нули.

Схема S_{10} представляет собой цепь из дизъюнкторов и реализует дизъюнкцию функций, реализуемых на выходах схем S_8 , S_9 и конъюнктора K .

Построенная схема S' при отсутствии неисправностей реализует заданную функцию f .

Перейдем к построению теста. Пусть функция f_1 существенно зависит от переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_p}$. Согласно теореме 2, схема S' допускает полный проверяющий тест, состоящий из одного набора $\bar{\sigma}' = (\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_p})$. Докажем, что в качестве полного проверяющего теста для схемы S'' можно взять набор $(1, \dots, \sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_p}, \dots)$, в котором первый разряд равен единице, значения σ_{i_k} , $1 \leq k \leq p$, из $\bar{\sigma}'$ стоят на своих местах, а на оставшихся местах стоит либо 1, если соответствующая переменная x_i присутствует в F с отрицанием, либо 0 в противном случае.

На этом наборе значение функции $f(\bar{x})$ равно 0. Достаточно доказать, что при возникновении неисправностей схема S'' на данном наборе будет выдавать значение 1.

Легко заметить, что в исправном состоянии значение на выходах всех элементов схемы на данном наборе равно 0.

При возникновении неисправности любого элемента подсхемы S_{10} или при подаче на любой из ее входов 1 схема S'' выдает значение 1.

При переходе в неисправное состояние конъюнктора K на один из входов схемы S_{10} будет подаваться значение 1, значит, мы получим это значение и на выходе всей схемы S'' .

При возникновении неисправности любого элемента подсхемы S' на ее выходе, а значит, и на выходе всей схемы S'' получится 1 (в силу того, что набор $(\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_p})$ является тестом для S' , а на левый вход конъюнктора K подается значение 1).

При неисправности какого-либо элемента E' из подсхем S_8 или инвертора I на оба входа соответствующего ему конъюнктора E из S_9 подаются единицы. Следовательно, на выходе этого конъюнктора, а вслед за ним и на выходе всей схемы тоже получим единицу.

При переходе в неисправное состояние одного из элементов подсхемы S_9 на вход некоторого дизъюнктора схемы S_{10} будет подано значение 1. В этом случае единицу получим опять же и на выходе всей схемы.

Теорема 4. Любую булеву функцию n переменных, отличную от константы и представимую в виде дизъюнктивной нормальной формы, в которой не более чем h переменных присутствуют как с отрицанием, так и без отрицания, можно реализовать схемой из функциональных элементов, допускающей полный проверяющий тест длины, не большей h .

Доказательство. Докажем теорему индукцией по h . При $h = 1$ утверждение теоремы следует из теоремы 3. Пусть теорема верна для $h = 1, \dots, k - 1$. Докажем ее для случая $h = k$. Начнем с построения схемы.

Можно считать, что первые переменные $x_1, \dots, x_k$ входят в дизъюнктивную нормальную форму функции $f(\bar{x})$ как с отрицанием, так и без отрицания, а остальные переменные — либо только с отрицанием, либо только без отрицания.

Разложим функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ по первой переменной следующим образом:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \& f_1 \vee \bar{x}_1 \& f_0,$$

где $f_1 = f(1, x_2, \dots, x_n)$, $f_0 = f(0, x_2, \dots, x_n)$.

Для функций f_1 и f_0 возьмем тупиковые дизъюнктивные нормальные формы F_1 и F_0 соответственно. Можно считать, что в каждой из этих форм нет слагаемого 1; в противном случае в дизъюнктивную нормальную форму исходной функции входит отдельное слагаемое x_1 или $\bar{x}_1$, а тогда в силу закона поглощения соответственно $\bar{x}_1$ или x_1 вообще исчезает, и мы строим нужную схему по предположению индукции.

Искомую схему S_k''' для исходной функции f построим как объединение схем S_{k-1}''' , S_{11} , S_{12} , S_{13} , S_{14} , одного конъюнктора K и одного инвертора I (см. рис. 6).

Схема S_{k-1}''' реализует F_1 согласно предположению индукции. Выход этой схемы подается на правый вход конъюнктора K , на левый вход которого подается значение переменной x_1 .

Слагаемые из F_0 разобьем на два непересекающихся подмножества A_1 и A_2 . К A_1 отнесем слагаемые, в которых участвуют только переменные $x_2, \dots, x_k$, а к A_2 — все остальные слагаемые.

Пусть $x_{i_1}, \dots, x_{i_q}$ — те переменные из $x_2, \dots, x_k$, отрицания которых отсутствуют в дизъюнктивной нормальной форме F_1 .

Схема S_{11} реализует все конъюнкции, входящие в подмножество A_2 , на выходах цепей из конъюнкторов, причем на левый вход верхнего конъюнктора каждой цепи подается выход инвертора I , на вход которого подано значение переменной x_1 . Если функция f_1 существенно зависит от переменных $x_{k+1}, \dots, x_n$, то все необходимые для построения схемы отрицания этих переменных (а также переменных $\{x_2, \dots, x_k\} \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_q}\}$) уже реализованы в схеме S_{k-1}''' , и выходы соответствующих инверторов из S_{k-1}''' подаются на входы подсхемы S_{11} (стрелка от S_{k-1}''' к S_{11} на рис. 6). Если же в дизъюнктивную нормальную форму F_1 не входит отрицание переменной x_i , которое входит в слагаемые подмножества A_2 , то добавляем соответствующий инвертор в схему S_{11} ; на вход добавленного инвертора подаем значение переменной x_i , а его выход подаем на входы соответствующих конъюнкторов этой схемы.

Схема S_{13} реализует все конъюнкции, входящие в подмножество A_1 , на выходах цепей из конъюнкторов, причем на левый вход верхнего конъюнктора каждой цепи подается

Рис. 6.

выход инвертора I , на вход которого подано значение переменной x_1 . Если в схемах S'''_{k-1} и S_{11} уже были реализованы какие-то из необходимых в S_{13} отрицаний переменных $x_2, \dots, x_k$, то все выходы соответствующих инверторов из S'''_{k-1} и S_{11} подаются на входы подсхемы S_{13} (стрелки от S'''_{k-1} и S_{11} к S_{13} на рис. 6). В частности, все отрицания переменных $\{x_2, \dots, x_k\} \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_q}\}$ будут подаваться в S_{13} таким образом. Если же в схеме S_{11} нет инвертора переменной x_{i_l} , отрицание которой входит в слагаемые подмножества A_1 , то добавляем соответствующий инвертор в схему S_{13} ; на вход добавленного инвертора подаем значение переменной x_{i_l} , а его выход подаем на входы соответствующих конъюнкторов этой схемы.

Схема S_{12} служит для контроля исправности элементов из схем S_{11} и S_{13} и инвертора I . В S_{12} содержится столько конъюнкторов, сколько инверторов и конъюнкторов содержится в схемах S_{11} и S_{13} плюс один, и каждый конъюнктор из S_{12} однозначно соответствует некоторому элементу схем S_{11} и S_{13} или инвертору I . Пусть конъюнктор E из S_{12} соответствует элементу E' . Если E' — инвертор для переменной x_i , то один вход E соединяется с выходом E' , а на второй вход E подается значение x_i . Предположим теперь, что E' — конъюнктор из S_{11} или S_{13} , то есть элемент некоторой цепи из конъюнкторов. В этом случае один вход E соединяется с выходом E' , а на второй вход E подается значение x_1 . Если все элементы из S_{11} , S_{13} и инвертор I исправны, то на выходе исправного элемента E реализуется некоторая конъюнкция, содержащая в качестве множителя конъюнкцию $\bar{x}_i \& x_i$. Таким образом, при отсутствии неисправных элементов в схемах S_{11} , S_{12} , S_{13} и исправном инверторе I на выходах всех конъюнкторов из S_{12}

реализуются тождественные нули.

Схема S_{14} представляет собой цепь из дизъюнкторов и реализует дизъюнкцию функций, реализуемых на выходах схем S_{11} , S_{12} , S_{13} и конъюнктора K .

Построенная схема S_k''' при отсутствии неисправностей реализует заданную функцию f .

Перейдем к построению теста. По предположению индукции, схема S_{k-1}''' допускает полный проверяющий тест из $p = \max\{k-1-q, 1\}$ наборов $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_p$ (в дизъюнктивной нормальной форме F_1 ровно $k-1-q$ переменных $\{x_2, \dots, x_k\} \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_q}\}$ встречаются как с отрицанием, так и без отрицания, а в случае $k-1-q=0$ по теореме 2 длина полного проверяющего теста равна 1). В этих наборах могут отсутствовать разряды, отвечающие некоторым переменным из числа $x_{i_1}, \dots, x_{i_q}$ и $x_{k+1}, \dots, x_n$. Построим эти наборы до наборов длины $n-1$, поставив на места отсутствующих разрядов единицы, если соответствующая переменная входит хотя бы в одно слагаемое из A_2 с отрицанием, и произвольные значения в противном случае.

Построим наборы $\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_q$ значений переменных $x_2, \dots, x_n$ для проверки исправности инверторов схем S_{11} и S_{13} , на входы которых подаются значения переменных из множества $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_q}\}$, следующим образом. В наборе $\tilde{\delta}_1$ в разряде, соответствующем переменной x_{i_1} , стоит единица, а в разрядах остальных переменных $x_2, \dots, x_n$ стоят такие значения, при которых обращались бы в 0 все слагаемые из множества A_1 (если таких значений нет, то в силу тупиковости дизъюнктивной нормальной формы F_0 в множестве A_1 есть слагаемое x_{i_1} , а тогда вследствие закона поглощения все слагаемые F_0 вообще не содержат отрицания этой переменной) и множества A_2 (в каждом слагаемом из A_2 входит одна из переменных $x_{k+1}, \dots, x_n$, причем либо только с отрицанием, либо только без отрицания).

Докажем, что наборы $(1, \tilde{\sigma}_1), \dots, (1, \tilde{\sigma}_p), (0, \tilde{\delta}_1), \dots, (0, \tilde{\delta}_q)$ составляют полный проверяющий тест построенной схемы. На каждом из этих наборов значение функции $f(\tilde{x})$ равно 0. Достаточно доказать, что при возникновении неисправностей схема S_k''' на каком-то наборе будет выдавать значение 1.

При возникновении неисправности любого элемента подсхемы S_{14} или при подаче на любой из ее входов 1 схема S_k''' выдает значение 1.

При переходе в неисправное состояние конъюнктора K на один из входов схемы S_{14} будет подаваться значение 1, а значит, мы получим это значение и на выходе всей схемы.

При возникновении неисправности любого элемента подсхемы S_{k-1}''' на одном из наборов $(1, \tilde{\sigma}_1), \dots, (1, \tilde{\sigma}_p)$ на оба входа конъюнктора K будет подана 1, значит, мы получим это значение и на выходе всей схемы.

При неисправности какого-либо конъюнктора E' из подсхем S_{11} , S_{13} или инвертора I на оба входа соответствующего ему конъюнктора E из S_{12} на любом из наборов $(1, \tilde{\sigma}_1), \dots, (1, \tilde{\sigma}_p)$ подаются 1. Следовательно, на его выходе тоже получится 1, которая, будучи поданной на один из входов схемы S_{14} , даст 1 на выходе всей схемы.

При неисправности какого-либо инвертора E' из подсхемы S_{11} , на вход которого подается значение переменной из множества $\{x_{k+1}, \dots, x_n\}$, на оба входа соответствующего ему конъюнктора E из S_{12} на любом из наборов $(1, \tilde{\sigma}_1), \dots, (1, \tilde{\sigma}_p)$ подаются 1.

При неисправности какого-либо инвертора E' из подсхем S_{11} и S_{13} , на вход которого подается значение переменной из множества $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_q}\}$, на оба входа соответствующего ему конъюнктора E из S_{12} на одном из наборов $(0, \tilde{\delta}_1), \dots, (0, \tilde{\delta}_q)$ подается 1. Следовательно, на его выходе тоже получится 1, которая, будучи поданной на один из входов схемы S_{14} , даст 1 на выходе всей схемы.

При переходе в неисправное состояние одного из элементов схемы S_{12} на вход не-

которого элемента схемы S_{14} будет подано значение 1, что опять даст 1 на выходе всей схемы.

Замечание 3. В случае $h = 2$ утверждение теоремы 4 является точным. Возьмем функцию $x_1 \& x_2 \vee \bar{x}_1 \& \bar{x}_2$ и докажем, что ее нельзя реализовать схемой в исходном базисе, допускающей полный проверяющий тест длины 1. Если такая схема существует, то она непременно содержит инверторы (иначе на наборе (0, 0) получилось бы значение 0). Если вход инвертора соединен не с входом схемы, а с выходом какого-то ее элемента, то на любом наборе либо сам инвертор, либо предшествующий ему элемент будет выдавать 1, и при переходе их в неисправное состояние это не отразится на полученном результате. Таким образом, инверторы могут находиться только на входах схемы, а так как наша функция немонотонна по каждой переменной, то схема должна содержать инверторы после входа каждой переменной. Но тогда проверяющий тест должен состоять из набора, при подаче которого на входы схемы оба инвертора выдают значение 0, то есть из набора (1, 1), но этот набор не является нулевым для нашей функции, и мы не сможем проверить наличие неисправностей у выходного элемента. Полученное противоречие показывает, что указанной схемы не существует.

Автор благодарен Н. П. Редькину за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. Чегис И. А., Яблонский С. В., Логические способы контроля работы электрических схем. *Труды МИАН* (1958) 51, 5–142.
2. Лупанов О. Б., *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*. МГУ, Москва, 1984.
3. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Высшая школа, Москва, 2002.
4. Яблонский С. В., Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем. *Матем. вопросы киберн.* (1988) 1, 5–25.
5. Редькин Н. П., *Надежность и диагностика схем*. МГУ, Москва, 1992.
6. Карибский В. В., Пархоменко П. П., Согомонян Е. С., Халчев В. Ф., *Основы технической диагностики*. Энергия, Москва, 1976.
7. Редькин Н. П., О схемах, допускающих короткие тесты. *Вестник Московского ун-та, сер. I: матем., мех.* (1988), №2, 17–21.
8. Шоломов Л. А., *Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств*. Наука, Москва, 1980.

Статья поступила 30.03.2004.