Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Салий, Оптимизация в булевозначных сетях, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 1, 141–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm93>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 18:10:58

Оптимизация в булевозначных сетях

© 2005 г. В. Н. Салий

Под булевозначной сетью понимается ориентированный мультиграф, каждой дуге которого приписан некоторый элемент из фиксированной конечной булевой алгебры B . Объединение меток всех дуг вдоль данного пути называется оценкой этого пути, а число атомов булевой алгебры B , содержащихся в оценке, — разнообразием пути. Путь (s, t) из начальной вершины s в назначенную вершину t по определению является оптимальным, если он имеет наименьшее возможное для (s, t) -путей разнообразие и среди (s, t) -путей с таким же разнообразием имеет наименьшую длину (число составляющих дуг). В заметке предлагается алгоритм, позволяющий за время $O(n^3)$ найти один из оптимальных (s, t) -путей в n -вершинной B -сети.

Под сетью понимается ориентированный граф, дугам которого приписаны некоторые положительные числа (веса). Сеть называется корневой, если в ней существует вершина s (корень), из которой достижима любая другая вершина сети. Одной из классических задач алгоритмической теории графов является отыскание такого пути из корня s в заданную вершину t , сумма весов дуг вдоль которого была бы минимальной (кратчайший путь). Первый эффективный метод для решения этой задачи предложил Дейкстра в 1959 году в [1]. В одной из многочисленных интерпретаций этот алгоритм выглядит следующим образом (см. [2]). Каждой вершине сети присваивается начальная метка $\lambda(s)$, причем $\lambda(s) = 0$ и $\lambda(v) = c \neq \infty$ для $v \neq s$. Множество U окрашенных вершин первоначально состоит только из корня s . Далее на очередном этапе работы алгоритма для всякой неокрашенной вершины v находится новое значение метки по формуле

$$\lambda(v) = \min_{u \in U} \{\lambda(v), \lambda(u) + w(u, v)\},$$

где $w(u, v)$ — вес дуги (u, v) . Окрашивается (то есть заносится в список U) одна из вершин v , имеющих наименьшую метку, и окрашивается одна из дуг, ведущих из множества U в выбранную вершину и дающих наименьшее значение для метки $\lambda(v)$. Если после очередной итерации вершина t попадет в список U , то цель достигнута: кратчайший путь из s в t измеряется величиной $\lambda(t)$ и определяется как состоящий из окрашенных дуг. Оценивая сложность алгоритма, заметим, что наибольшие затраты времени для n -вершинной сети получаются, если вершина t будет окрашена последней и если сеть представляет собой полный ориентированный граф. В этом случае число итераций общего шага равно $n - 1$, причем на каждой из них для выбора окрашиваемой вершины просматривается не более $n - 1$ вершин, и при пересчете меток будут задействованы все $n^2 - n$ дуг (считаем, что петель нет). Таким образом, искомый путь из s в t строится за время $O(n^2)$.

К настоящему времени известно большое число эффективных методов для отыскания кратчайших путей в сетях. В некоторых важных частных случаях (например, для планарных сетей) удалось найти даже линейные алгоритмы (см. обзор в [3]).

Алгоритм Дейкстры и его модификации основаны на принципе динамического программирования: отрезок кратчайшего пути будет кратчайшим путем между своими концами. При этом веса дуг являются элементами линейно упорядоченного множества, то есть попарно сравнимыми. В задаче отыскания оптимальных путей в булевозначных сетях аналогичные условия не выполняются, что естественно усложняет ее. В настоящей заметке для этого случая предлагается решающий алгоритм временной сложности $O(n^3)$. Результаты были анонсированы в [4].

Пусть B — фиксированная конечная булева алгебра с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1. Под B -сетью понимается пара $N = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество, а $\alpha \subseteq V \times V \times B$ — тернарное отношение. Элементы множества V называются вершинами сети N , а тройки, входящие в α , — ее помеченными дугами, при этом для дуги (u, v, b) вершина u является началом, v — концом, b — меткой. Дуги, имеющие общее начало u и общий конец v , образуют пучок (u, v) . Предполагается, что метки одного пучка попарно несравнимы, то есть составляют в B антицепь. Мы исключим петли, то есть дуги вида (v, v, b) .

Такая конструкция возникает, например, в следующей практической задаче.

Пусть

$$A = (S, s_0, X, \delta)$$

— автомат (без выхода) с множеством состояний S , входным алфавитом X , функцией переходов $\delta: S \times X \rightarrow S$ и начальным состоянием s_0 (из него достижимы все другие состояния). Длинной входного слова называется общее число алфавитных символов (букв) в нем, а его разнообразием — количество входящих в него различных букв. Для заданного состояния $t \in S$ требуется найти входное слово с наименьшим разнообразием, переводящее автомат из начального состояния s_0 в состояние t и имеющее при этом наименьшую возможную длину. Автомат A задают диаграммой, которая представляет собой ориентированный мультиграф с множеством вершин S , где из вершины s_i в вершину s_j ведет дуга с меткой x_k тогда и только тогда, когда $\delta(s_i, x_k) = s_j$, то есть входной сигнал x_k переводит автомат из состояния s_i в состояние s_j . Эту диаграмму можно считать корневой $P(X)$ -сетью (s_0 — корень), где $P(X)$ — булева алгебра всех подмножеств входного алфавита X (петли в контексте задачи можно игнорировать).

Возвращаясь к общей схеме, будем считать, что булева алгебра B задана двоичной $|B| \times |B|$ матрицей M строгого порядка, то есть $M_{ij} = 1$, если $b_i < b_j$, и $M_{ij} = 0$ в противном случае (элементы в B пронумерованы). Сеть N представляется списком, где каждая вершина u (их тоже перенумеруем) открывает замыкаемый знаком « $\rightarrow$ » перечень концов исходящих из нее дуг, причем за концевой вершиной v выписываются метки всех дуг пучка (u, v) . Если m — число пучков в сети, то список, задающий эту сеть, имеет длину, не большую $2n + m(l + 1)$, где l — ширина булевой алгебры B (наибольшее возможное число элементов в антицепи), при этом $m \leq n^2 - n$.

Пример 1. Пусть B_0 — восьмиэлементная булева алгебра с тремя атомами b_1, b_2, b_3 и тремя коатомами (дополнениями атомов) b'_1, b'_2, b'_3 . Зададим B_0 -сеть N_0 с выделенными вершинами s (первая) и t (последняя) списком

$$s, v_1, b_1, v_3, b_2 - v_1, v_2, b_3, v_4, b'_3 - v_2, v_3, b_1, b_2, v_4, b'_1 - \\ v_3, v_1, b_3, v_4, b_1, t, b'_2 - v_4, v_2, b_2, t, b_3 - t - .$$

Ясно, что сеть N_0 имеет 6 вершин и 12 помеченных дуг, например, из вершины s имеется одна дуга в v_1 с меткой b_1 и одна дуга в v_3 с меткой b_2 , а из вершины v_2 в вершину v_3 ведут две дуги с метками b_1 и b_2 , из вершины t выходов нет и так далее. Длина списка равна 35. Наибольшая возможная длина списка, задающего 6-вершинную B_0 -сеть, равна 102, так как $l = 3$ и $m \leq 30$.

Пусть P — некоторый путь в B -сети N . Объединяя (в B) метки всех дуг, образующих P , получим элемент $b(P)$ булевой алгебры B , который называется оценкой пути P . Разнообразие пути P — это высота $|b(P)|$ элемента $b(P) \in B$, то есть число содержащихся в нем атомов.

Пусть s — корень B -сети N и t — некоторая выбранная вершина. Требуется найти путь P из s в t такой, чтобы

- (1) разнообразие $|b(P)|$ было минимальным (в смысле порядка в B);
- (2) среди всех путей с такой же оценкой путь P содержал бы наименьшее возможное число дуг, то есть был бы кратчайшим.

Всякий путь из s в t , который удовлетворяет условиям 1 и 2, называется оптимальным (s, t) -путем.

Следующий алгоритм за время $O(n^3)$ находит в B -сети с n вершинами один из оптимальных (s, t) -путей.

- (1) Положить $L(s) = \{0\}$, где $0 \in B$, и $L(v) = \{1\}$, где $1 \in B$, для всех $v \neq s$. Положить $A = \{s\}$ и $A^* = \emptyset$.

Будем называть $L(v)$ меточным множеством вершины $v \in V$, множество A списком активных вершин, A^* вспомогательным списком.

- (2) Для каждой вершины v переформировать меточное множество, полагая

$$L(v) = \text{Min} \left(L(v) \cup \bigcup_{u \in A} (L(u) \vee \alpha(u, v)) \right).$$

Здесь под $\text{Min}(X)$ понимается совокупность всех минимальных элементов в упорядоченном подмножестве X булевой алгебры B и для $X, Y \subseteq B$ полагается

$$X \vee Y = \{x \vee y \mid x \in X \text{ \& } y \in Y\}$$

(глобальное решетчатое объединение), причем

$$\alpha(u, v) = \{b \in B \mid (u, v, b) \in \alpha\}.$$

Если множество $L(v)$ изменилось, вершину v занести в список A^* . После просмотра всех меточных множеств содержимое списка активных вершин A заменить содержимым вспомогательного списка A^* , то есть положить $A = A^*$, а затем очистить A^* , то есть положить $A^* = \emptyset$.

Этап 2 повторять до тех пор, пока список A не окажется пустым, после чего перейти к следующему этапу.

- (3) В меточном множестве $L(t)$ вершины t выбрать один из наименьших по высоте элементов b .

- (4) В сети N окрасить все дуги, метки которых не превосходят b . Любой путь из s в t по окрашенным дугам имеет разнообразие b .
- (5) В сети, образованной окрашенными дугами, пренебрегая метками (заменяя их все числовым значением 1), с помощью соответствующей вариации алгоритма Дейкстры (см. [5]) найти один из кратчайших (s, t) -путей. Найденный путь P (с выделенными метками) выдается как один из оптимальных (s, t) -путей в B -сети N .

Следующие предложения дают обоснование алгоритма.

Лемма 1. Если в меточном множестве $L(v)$ есть элемент $b \in B$, то в сети N существует путь из s в v с оценкой b .

Доказательство. Меточное множество вершины v , полученное после k -й итерации этапа 2 алгоритма, обозначим через $L_k(v)$. Покажем сначала, что если в $L_k(v)$ появился элемент $b \in B$, то в N существует путь из s в v с оценкой b . Применим индукцию по k .

1. Пусть $b \in L_1(v)$. Так как $L_1(v) = \text{Min}(\{1\} \cup \alpha(s, v))$, то $b \in \alpha(s, v)$, то есть в N имеется дуга из s в v с меткой b , а это и есть путь из s в v с оценкой b .

2. Пусть элемент b появился в меточном множестве $L_k(v)$ вершины v после k -й итерации этапа 2 алгоритма. Тогда

$$b \in \text{Min}(L_{k-1}(v) \cup_{u \in A} (L_{k-1}(u) \vee \alpha(u, v))).$$

Так как $b \notin L_{k-1}(v)$, то $b \in \text{Min}(\bigcup_{u \in A} (L_{k-1}(u) \vee \alpha(u, v)))$. Следовательно, $b = b_1 \vee b_2$, где $b_1 \in L_{k-1}(u)$, $b_2 \in \alpha(u, v)$ и $u \in A$. Поскольку элемент b_1 появился в меточном множестве вершины u не позднее, чем при $(k-1)$ -й итерации этапа 2, по предположению индукции в N существует путь из s в u с оценкой b_1 . Так как b_2 — это метка одной из дуг, ведущих из u в v , то $b = b_1 \vee b_2$ — оценка пути из s в v , полученного присоединением к P дуги (u, v, b_2) . Таким образом, утверждение об $L_k(v)$ доказано.

Пусть теперь в составе финального меточного множества $L(v)$ есть элемент $b \in B$. Этот элемент появился среди меток вершины v после завершения некоторой итерации шага 2 алгоритма. По доказанному в N есть путь из s в v с оценкой b .

Лемма 2. Если в сети N существует путь из s в v с оценкой b , то в составе $L(v)$ есть элемент, не превосходящий b .

Доказательство. Пусть $(s, u_1, b_1), (u_1, u_2, b_2), \dots, (u_{j-1}, v, b_j)$ — путь из s в v и $b = \bigvee_{i=1}^j b_i$ — его оценка. Тогда $b_1 \leq b$. Элемент b_1 входит в состав меточного множества $L_1(u_1)$, поскольку метки дуг, идущих из s в u_1 , попарно несравнимы, и значит, $\text{Min}(\alpha(s, u_1)) = \alpha(s, u_1)$.

При вычислении $L_2(u_2)$ ищется $\text{Min}(L_1(u_2), (L_1(u_1) \vee b_2) \cup \dots)$. Очевидно, что в этом множестве есть элемент, не превосходящий $b_1 \vee b_2$. И так далее. В составе $L_j(v)$ будет элемент, не превосходящий $b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_j = b$. При следующем пересчете меточного множества вершины v ищется $\text{Min}(L_j(v) \cup \dots)$. В этом множестве неизбежно окажется элемент, не превосходящий b .

Теорема 1. Любой оптимальный путь в B -сети N может быть получен как результат работы алгоритма; каждый путь, полученный в результате работы алгоритма, является оптимальным.

Доказательство. Пусть P_0 — оптимальный (s, t) -путь в B -сети N с оценкой b_0 . Согласно лемме 2, в составе меточного множества $L(t)$, полученного в ходе алгоритма, имеется элемент $b \leq b_0$. Если $b < b_0$, то по лемме 1 в N существует путь из s в t с оценкой b и, следовательно, с разнообразием, меньшим чем $|b_0|$. Это невозможно в силу оптимальности пути P_0 . Значит, $b = b_0$, то есть в составе $L(t)$ присутствует элемент b_0 . Аналогично, в $L(t)$ нет элемента b с меньшим, чем у b_0 разнообразием, то есть $|b| < |b_0|$. Итак, в составе $L(t)$ элемент b_0 имеет минимальное разнообразие.

Действуя согласно этапам 3 и 4 алгоритма, получаем сеть N' , в которой все дуги имеют метки, не превосходящие b_0 . В составе N' находятся все пути, ведущие в сети N из s в t по таким дугам. В частности, среди них есть и путь P_0 , который может быть выделен в N' на этапе 5.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть (s, t) -путь P_0 выделен в сети N как результат работы алгоритма. Его оценка b_0 является в $L(t)$ элементом минимальной высоты. Возьмем произвольный оптимальный путь P , и пусть b — его оценка. Согласно первому утверждению теоремы путь P может быть получен в результате выполнения алгоритма. Это означает, что b принадлежит $L(t)$ и будет в $L(t)$ элементом минимальной высоты. Отсюда, $|b| = |b_0|$, и значит, путь P_0 имеет такое же разнообразие, что и путь P . После выхода из этапа 4 алгоритма пути P_0 и P оба окажутся окрашенными. Так как P_0 является кратчайшим путем из s в t по окрашенным дугам, его длина не превосходит длины пути P и в силу оптимальности последнего совпадает с ней. Таким образом, путь P_0 имеет одинаковые разнообразие и длину с оптимальным путем P , и значит, сам будет оптимальным. Теорема доказана.

Оценивая сложность алгоритма, заметим, что на этапе 2 придется провести в наихудшем случае n итераций. При каждой итерации просматриваются все дуги, число которых lm не превышает $l(n^2 - n)$, где l — ширина булевой алгебры B . Считая, что алгебра B фиксирована, получаем оценку числа выполняемых предписаний $O(n^3)$.

Пример 2. В B_0 -сети N_0 из примера 1 с помощью описанного алгоритма найдем оптимальные (s, t) -пути.

1. Положим $L(s) = \{0\}$ и $L(v) = \{1\}$ для всех $v \neq s$. Положим $A = \{s\}$ и $A^* = \emptyset$.

2. Проведем пересчет меток вершин.

1) $L(s) = \{0\}$, $L(v_1) = \{b_1\}$, $L(v_2) = \{1\}$, $L(v_3) = \{b_2\}$, $L(v_4) = \{1\}$, $L(t) = \{1\}$.

Вершины с измененным меточным множеством заносим в вспомогательный список: полагаем $A^* = \{v_1, v_3\}$, а затем полагаем $A = A^* = \{v_1, v_3\}$ и $A^* = \emptyset$. Так как $A \neq \emptyset$, продолжаем пересчет меток.

2) $L(s) = \{0\}$, $L(v_1) = \{b_1, b'_1\}$, $L(v_2) = \{b'_2\}$, $L(v_3) = \{b_2\}$, $L(v_4) = \{b'_3\}$, $L(t) = \{1\}$.

При этом $A^* = \{v_1, v_2, v_4\}$. Полагаем $A = \{v_1, v_2, v_4\}$, $A^* = \emptyset$.

3) $L(s) = \{0\}$, $L(v_1) = \{b_1, b'_1\}$, $L(v_2) = \{b'_1, b'_2, b'_3\}$, $L(v_3) = \{b_2, b'_2\}$, $L(v_4) = \{b'_3\}$, $L(t) = \{1\}$.

При этом $A^* = \{v_2, v_3\}$. Полагаем $A = \{v_2, v_3\}$, $A^* = \emptyset$.

4) $L(s) = \{0\}$, $L(v_1) = \{b_1, b'_1\}$, $L(v_2) = \{b'_1, b'_2, b'_3\}$, $L(v_3) = \{b_2, b'_2\}$, $L(v_4) = \{b'_1, b'_2, b'_3\}$, $L(t) = \{b'_2\}$.

При этом $A^* = \{v_4, t\}$. Полагаем $A = \{v_4, t\}$, $A^* = \emptyset$.

5) $L(s) = \{0\}$, $L(v_1) = \{b_1, b'_1\}$, $L(v_2) = \{b'_1, b'_2, b'_3\}$, $L(v_3) = \{b_2, b'_2\}$, $L(v_4) = \{b'_1, b'_2, b'_3\}$, $L(t) = \{b'_1, b'_2\}$. При этом $A^* = \{t\}$. Полагаем $A = \{t\}$, $A^* = \emptyset$.

- 6) $L(s) = \{0\}$, $L(v_1) = \{b_1, b'_1\}$, $L(v_2) = \{b'_1, b'_2, b'_3\}$, $L(v_3) = \{b_2, b'_2\}$, $L(v_4) = \{b'_1, b'_2, b'_3\}$, $L(t) = \{b'_1, b'_2\}$.

При этом $A^* = \emptyset$. Полагаем $A = A^* = \emptyset$.

Этап 2 завершен.

3. В меточном множестве $L(t)$ выбираем один из минимальных по высоте элементов b'_1 .
4. В сети N_0 окрашиваем все дуги, метки которых не превосходят b'_1 , то есть дуги (s, v_3, b_2) , (v_1, v_2, b_3) , (v_2, v_3, b_2) , (v_2, v_4, b'_1) , (v_3, v_1, b_3) , (v_4, v_2, b_2) , (v_4, t, b_3) .
5. В сети, образованной окрашенными дугами, снимем метки дуг и с помощью соответствующей версии алгоритма Дейкстры найдем кратчайший (s, t) -путь (s, v_3) , (v_3, v_1) , (v_1, v_2) , (v_2, v_4) , (v_4, t) . В исходной B_0 -сети N_0 путь P_1 , состоящий из дуг (s, v_3, b_2) , (v_3, v_1, b_3) , (v_1, v_2, b_3) , (v_2, v_4, b'_1) , (v_4, t, b_3) , имеет наименьшее разнообразие $2 = |b'_1|$ и среди всех путей с оценкой b'_1 является кратчайшим, его длина равна 5.

Заметим, что подпуть (s, v_3, b_2) , (v_3, v_1, b_3) найденного оптимального пути P_1 не будет оптимальным путем из s в v_1 , ибо он имеет разнообразие $|b_2 \vee b_3| = 2$, в то время как разнообразие пути (s, v_1, b_1) , состоящего из одной дуги, есть $1 = |b_1|$.

На этапе 3 в меточном множестве $L(t)$ можно было выбрать в качестве оценки с наименьшей высотой элемент b'_2 . В этом случае после выполнения этапов 4 и 5 в B_0 -сети N_0 выявляется оптимальный путь P_2 , состоящий из дуг (s, v_1, b_1) , (v_1, v_2, b_3) , (v_2, v_3, b_1) , (v_3, t, b'_2) с разнообразием 2 и длиной 4. Имея одинаковое разнообразие с оптимальным путем P_1 , он к тому же является и более коротким. Можно считать, что это наилучший путь из s в t .

Таким образом, если в определении оптимального пути пункт 2 заменить на пункт 2', состоящий в том, что среди всех путей с таким же разнообразием путь P содержит наименьшее возможное число дуг, и назвать такой путь наилучшим, то для поиска наилучших путей алгоритм нужно расширить, обеспечив поиск оптимального пути для каждого наименьшего по высоте элемента из $L(t)$, а затем из всех полученных оптимальных путей выбрать те, которые являются кратчайшими. Для этого придется дополнительно проделать самое большее $(l-1)n^2$ действий, что не увеличивает общую сложность $O(n^3)$ алгоритма.

Список литературы

1. Dijkstra E. W., A note on two problems in connection with graphs. *Numer. Math.* (1959) 1, 269–271.
2. Богомолов А. М., Салий В. Н., *Алгебраические основы теории дискретных систем*. Наука, Москва, 1997.
3. Thorup M., Undirected single-source shortest path with positive integer weights in linear time. *J. ACM* (1999) 46, 362–394.
4. Салий В. Н., Об оптимальных путях в булевозначной сети. В кн.: *Труды 3-й Межд. алгебр. конф. в Украине*. СДПУ, Сумы, 2001, с. 240–241.
5. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И., *Лекции по теории графов*. Наука, Москва, 1990.

Статья поступила 17.12.2002.