Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Колчин, В. Ф. Колчин, Переход с одной решетки на другую распределений сумм случайных величин, встречающихся в обобщенной схеме размещения, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 3, 15–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm962>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:24:09

Переход с одной решетки на другую распределений сумм случайных величин, встречающихся в обобщенной схеме размещения

© 2007 г. А. В. Колчин, В. Ф. Колчин

Рассматриваются детали перехода распределений сумм независимых одинаково распределенных неотрицательных целочисленных случайных величин, встречающихся в обобщенной схеме размещения, с одной решетки на другую.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05-01-00035, и программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ 4129.2006.1.

1. Введение

В статье рассматриваются независимые одинаково распределенные неотрицательные целочисленные случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ с распределением

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{b_k \theta^k}{k! B(\theta)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где $b_0, b_1, \dots$ — последовательность неотрицательных чисел, θ — положительный параметр, ряд

$$B(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k \theta^k}{k!} \quad (2)$$

имеет ненулевой радиус сходимости R . Такие случайные величины входят в определение понятия обобщенной схемы размещения. Говорят, что неотрицательные целочисленные случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$ образуют обобщенную схему размещения, если существуют такие независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$, что для любых целых неотрицательных $k_1, \dots, k_N$

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}. \quad (3)$$

Нетрудно показать, что если соотношение (3) справедливо для случайных величин $\xi'_1, \dots, \xi'_N$ с распределением

$$\mathbf{P}\{\xi'_1 = k\} = \frac{b_k (\theta')^k}{k! B(\theta')}$$

при некотором θ' , то оно выполняется для случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_N$ с распределением (1) при любом параметре θ , $0 < \theta < R$.

В обобщенной схеме размещения случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$ интерпретируются как заполнения ячеек. Это связано с тем, что если $b_k = 1$, $k = 0, 1, \dots$, то распределение (1) случайных величин является распределением Пуассона с параметром θ и при выполнении соотношения (3) случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$ имеют полиномиальное распределение с одинаковыми вероятностями исходов и могут рассматриваться как заполнения ячеек в равновероятной схеме размещения n частиц по N ячейкам.

Распределения многих характеристик случайных величин в обобщенной схеме размещения выражаются через распределения случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_N$ и связанных с ними величин. Так, пусть $\mu_r(n, N)$ — число ячеек, содержащих ровно r частиц, или число случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_N$, принявших значение r . Тогда (см. [1]) для $k = 0, 1, \dots, N$

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} = \binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} + \dots + \xi_N^{(r)} = n - rk\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\}}, \quad (4)$$

где

$$p_r = \frac{b_r \theta^r}{r! B(\theta)}, \quad r = 0, 1, \dots, n,$$

и $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_N^{(r)}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \neq r\}, \quad k = 0, 1, \dots$$

В [2] были рассмотрены предельные распределения суммы $S_N = \xi_1 + \dots + \xi_N$ с распределением слагаемых (1) при $N \rightarrow \infty$ и $\theta \rightarrow 0$. Изучался переход распределения S_N с одной решетки на другую, этот эффект был обнаружен в классической схеме размещения частиц для случайной величины $\mu_1(n, N)$, в силу представления (4) он является отражением существования этого эффекта для соответствующей суммы S_N .

Как и в [2], будем говорить, что выполнено условие A_r , $r \geq 2$, если $b_0 > 0$, $b_1 = \dots = b_{r-1} = 0$, $b_r > 0$; если $b_0, b_1 > 0$, то будем говорить, что выполнено условие A_1 .

В [2] получены следующие результаты.

Теорема 1 ([2]). Пусть выполнено условие A_r при некотором $r \geq 1$, и пусть $N \rightarrow \infty$ и $\theta = \theta(N) \rightarrow 0$ так, что выполняется соотношение

$$\frac{b_r}{r! b_0} N \theta^r \rightarrow \lambda,$$

где λ — положительная постоянная. Тогда распределение суммы S_N/r слабо сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

Согласно теореме 1, предельное распределение суммы S_N сосредоточено на решетке целых неотрицательных чисел с шагом r .

Теорема 2 ([2]). Пусть выполнено условие A_r при некотором $r \geq 1$, и пусть $N \rightarrow \infty$ и $\theta = \theta(N) \rightarrow 0$ так, что $\theta^r N \rightarrow \infty$. Тогда распределение

$$S_N^* = \sum_{k=1}^N \frac{\xi_k - m}{\sigma \sqrt{N}},$$

где $m = \mathbf{M}\xi_1$, $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1$, слабо сходится к стандартному нормальному распределению.

Пусть s — первое целое число, большее r , для которого $b_s > 0$; положим также

$$z = \frac{n - Nm}{\sigma\sqrt{N}}, \quad P_N(n) = \mathbf{P}\{S_N = n\}.$$

Теорема 3 ([2]). Пусть выполнено условие A_r при некотором $r \geq 2$, и пусть $N \rightarrow \infty$ и $\theta = \theta(N) \rightarrow 0$ так, что $N\theta^s \rightarrow \infty$, и максимальный шаг решетки, на которой лежат $0, r, s$ равен единице. Тогда

$$\sigma\sqrt{N}P_N(n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \rightarrow 0$$

равномерно относительно целых n .

Итак, если $N\theta^s \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, то для S_N справедлива локальная предельная теорема о сходимости к нормальному распределению на решетке целых чисел. Если же $N\theta^r \rightarrow \lambda r!b_0/b_r$, $\lambda > 0$, то для S_N справедлива теорема о сходимости к распределению Пуассона с параметром λ на решетке целых неотрицательных чисел с шагом r . Таким образом, при промежуточных порядках стремления параметра θ к нулю происходит переход распределения S_N с решетки целых неотрицательных чисел с шагом r на решетку всех целых неотрицательных чисел. Указанные выше теоремы были доказаны в [2] с привлечением производящих и характеристических функций случайной величины S_N . В настоящей статье для описания деталей этого перехода применяется прямой анализ распределения S_N , следующий ясным интуитивным соображениям.

2. Основная теорема

Пусть E_k — событие, состоящее в том, что ровно k случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_N$ приняли значения, большие s , B_m — событие, состоящее в том, что ровно m случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_N$ приняли значение s , и $E_{k,m} = E_k \cap B_m$. Обозначим для краткости записи событие $\{S_N = n\}$ через $S_{n,N}$.

Используя эти обозначения, вероятность $P_N(n)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} P_N(n) &= \mathbf{P}\{S_N = n\} = \mathbf{P}\left\{S_{n,N} \cap \bigcup_{k=0}^N E_k\right\} \mathbf{P}\left\{S_{n,N} \cap \bigcup_{k=0}^N \bigcup_{m=0}^{N-k} E_{km}\right\} \\ &= \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(E_k) \mathbf{P}\{S_N = n \mid E_k\} = \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^{N-k} \mathbf{P}(E_{k,m}) \mathbf{P}\{S_N = n \mid E_{k,m}\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Значения S_N лежат на решетке всех целых неотрицательных чисел $\mathbf{N}$. Разобьем эту решетку на подрешетки с шагом r :

$$\begin{aligned} L_0 &= \{0, r, 2r, \dots\}, \\ L_1 &= \{1, r+1, 2r+1, \dots\}, \\ L_2 &= \{2, r+2, 2r+2, \dots\}, \\ &\dots \\ L_{r-1} &= \{r-1, 2r-1, 3r-1, \dots\}; \end{aligned}$$

ясно, что

$$\mathbf{N} = L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_{r-1}.$$

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 4. Пусть выполнено условие A_r при некотором $r \geq 2$, и пусть $N \rightarrow \infty$ и $\theta = \theta(N) \rightarrow 0$ так, что

$$N \frac{b_s \theta^s}{b_0 s!} \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty,$$

и максимальный шаг решетки, на которой лежат $0, r, s$, равен единице. Тогда

$$P_N(n) = \sum_{k \in L_t} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \frac{1}{\sqrt{2\pi N b_r \theta^r / (b_0 r!)}} \exp \left\{ -\frac{(n - N b_r \theta^r / (b_0 r!))^2}{2 N b_r \theta^r / (b_0 r!)} \right\} (1 + o(1)) \quad (6)$$

равномерно относительно $n \in L_t$, $t = 0, 1, 2, \dots, r-1$, таких, что

$$\frac{n - N b_r \theta^r / (b_0 r!)}{\sqrt{2 N b_r \theta^r / (b_0 r!)}}$$

лежит в любом фиксированном конечном интервале.

Доказательство. Как будет видно далее, основной вклад в $P_N(n)$ вносят слагаемые в (5), соответствующие случаю, когда справедливы события $E_{0,m}$. При реализации события $E_{0,m}$ случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ принимают только три значения $0, r, s$. Поэтому значение случайной величины S_N лежит на решетке L_t , если число величин $\xi_1, \dots, \xi_N$, принявших значения s , имеет вид $lr+t$, $l = 0, 1, \dots$, то есть принадлежат L_t , $0 \leq t \leq r-1$. Таким образом,

$$\mathbf{P}\{S_N \in L_t \mid E_{0,m}\} = 1, \quad (7)$$

если $m \in L_t$, в противном случае эта вероятность равна нулю. Отсюда и из (5) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(E_0) \mathbf{P}\{S_N \in L_t \mid E_0\} &= \sum_{m \in L_t} \mathbf{P}(E_{0,m}) \mathbf{P}\{S_N \in L_t \mid E_{0,m}\} \\ &= \sum_{m \in L_t} \mathbf{P}(E_{0,m}). \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим через η_N число случайных величин, принявших значение s . Напомним, что $E_0 = \{\xi_1, \dots, \xi_N \leq s\}$. Ясно, что

$$\mathbf{P}(E_{0,m}) = \mathbf{P}(E_0) \mathbf{P}\{\eta_N = m \mid E_0\}. \quad (9)$$

Поэтому из (8) и (9) получаем, что

$$\mathbf{P}\{S_N \in L_t \mid E_0\} = \sum_{m \in L_t} \mathbf{P}\{\eta_N = m \mid E_0\} (1 + O(\theta)). \quad (10)$$

Как отмечалось выше, при выполнении условия E_0 случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ принимают лишь значения $0, r, s$. Поэтому условное распределение η_N при условии

E_0 совпадает с распределением случайной величины $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_N$, где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения 0 и 1, причем $\mathbf{P}\{\varepsilon_1 = 1\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = s \mid E_0\}$. При условии E_0 случайная величина ξ_1 принимает значения 0, r , s с вероятностями

$$\frac{b_0}{b_0 + b_r \theta^r / r! + b_s \theta^s / s!}, \quad \frac{b_r \theta^r / r!}{b_0 + b_r \theta^r / r! + b_s \theta^s / s!}, \quad \frac{b_s \theta^s / s!}{b_0 + b_r \theta^r / r! + b_s \theta^s / s!},$$

соответственно, так что при $\theta \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\varepsilon_1 = 1\} = \frac{b_s \theta^s / s!}{b_0 + b_r \theta^r / r! + b_s \theta^s / s!} = \frac{b_s \theta^s}{b_0 s!} (1 + O(\theta^r)).$$

Таким образом, при условии E_0 случайная величина η_N имеет биномиальное распределение с N испытаниями и вероятностью успеха $p = b_s \theta^s / (b_0 s!) (1 + o(1))$,

$$\mathbf{P}\{\eta_N = m \mid E_0\} = \binom{N}{m} p^m (1 - p)^{N-m}. \quad (11)$$

Для ряда (10) существует сходящийся мажорирующий ряд, так что можно перейти к пределу под знаком суммы. Биномиальное распределение (11) сходится к распределению Пуассона с параметром, равным

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Np = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N b_s \theta^s}{b_0 s!} = \lambda.$$

Поэтому из (10) следует, что в условиях теоремы

$$\mathbf{P}\{S_N \in L_t \mid E_0\} \rightarrow \sum_{m \in L_t} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \quad (12)$$

При $\lambda \rightarrow 0$ условная вероятность при условии E_0 того, что S_N принимает значения из решетки L_0 , стремится к единице, а при $\lambda \rightarrow \infty$ условные вероятности принять значения из каждой из r решеток стремятся к $1/r$.

Оценим теперь локальные вероятности $\mathbf{P}\{S_N = n \mid E_0\}$ на каждой из решеток. В предположении, что реализуется событие E_0 ,

$$\mathbf{P}(E_0) \mathbf{P}\{S_N = n \mid E_0\} = \sum_{m=0}^N \mathbf{P}(E_{0,m}) \mathbf{P}\{S_N = n \mid E_{0,m}\}.$$

Предположим, что $n \in L_t$. Тогда в силу (7) $\mathbf{P}\{S_N = n \mid E_{0,m}\} = 0$ при всех $m \notin L_t$, и для $n \in L_t$ предыдущее равенство принимает вид

$$\mathbf{P}(E_0) \mathbf{P}\{S_N = n \mid E_0\} = \sum_{m \in L_t} \mathbf{P}(E_{0,m}) \mathbf{P}\{S_N = n \mid E_{0,m}\}. \quad (13)$$

Ясно, что при $n \in L_t$

$$\mathbf{P}\{S_N = n \mid E_{0,m}\} = \mathbf{P}\{\delta_1 + \dots + \delta_{N-m} = (n - ms)/r\},$$

где $m, n \in L_t$ и случайные величины $\delta_1, \dots, \delta_N$ независимы и одинаково распределены, причем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\delta_1 = 0\} &= \frac{b_0}{b_0 + b_r \theta^r / r!} = 1 - \frac{b_r}{b_0 r!} \theta^r (1 + (1)), \\ \mathbf{P}\{\delta_1 = 1\} &= \frac{b_r \theta^r / r!}{b_0 + b_r \theta^r / r!} = \frac{b_r}{b_0 r!} \theta^r (1 + (1)).\end{aligned}$$

Для биномиального распределения справедливо нормальное приближение, поскольку

$$\mathbf{M}\delta_1 = b_r \theta^r / (b_0 r!) (1 + o(1)), \quad \mathbf{D}\delta_1 = b_r \theta^r / (b_0 r!) (1 + o(1)), \quad (14)$$

и в условиях теоремы $N b_r \theta^r \rightarrow \infty$. Таким образом, при фиксированном $m \in L_t$ и $N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{S_N = n \mid E_{0,m}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N b_r \theta^r / (b_0 r!)}} \exp \left\{ -\frac{(n - N b_r \theta^r / (b_0 r!))^2}{2 N b_r \theta^r / (b_0 r!)} \right\} (1 + o(1)) \quad (15)$$

равномерно относительно $n \in L_t$ таких, что

$$\frac{n - N b_r \theta^r / (b_0 r!)}{\sqrt{N b_r \theta^r / (b_0 r!)}} \quad (16)$$

лежит в любом фиксированном конечном интервале.

Можно показать, что при выполнении указанного выше условия на (16) сумма

$$\sqrt{N \theta^r} \sum_{m \in L_t}^N \mathbf{P}(E_{0,m}) \mathbf{P}\{S_N = n \mid E_{0,m}\}$$

имеет сходящийся мажорирующий ряд, так что для таких n в (13), умноженном на $\sqrt{N \theta^r}$, можно перейти к пределу под знаком суммы. Учитывая, что если (16) лежит в любом фиксированном конечном интервале, то асимптотика (15) при фиксированном $m \in L_t$ не зависит от m , находим, что для таких $n \in L_t$

$$\mathbf{P}(E_0) \mathbf{P}\{S_n = n \mid E_0\} = \mathbf{P}\{S_N = n \mid E_{0,t}\} \sum_{m \in L_t} \mathbf{P}(E_{0,m}) (1 + o(1)).$$

Откуда, в силу (15), а также (8) и (12) получаем, что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E_0) \mathbf{P}\{S_N = n \mid E_0\} &= \sum_{n \in L_t} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi N b_r \theta^r / (b_0 r!)}} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{(n - N b_r \theta^r / (b_0 r!))^2}{2 N b_r \theta^r / (b_0 r!)} \right\} (1 + o(1)) \quad (17)\end{aligned}$$

равномерно относительно $n \in L_t$ таких, что (16) лежит в любом фиксированном конечном интервале.

С учетом того, что $\mathbf{P}(E_0) \rightarrow 0$, для завершения доказательства теоремы остается убедиться, что неисследованная часть суммы (5)

$$\sum_{k=1}^N \sum_{m=0}^{N-k} \mathbf{P}(E_{k,m}) \mathbf{P}\{S_N = n \mid E_{k,m}\} \quad (18)$$

в условиях теоремы есть $o(1/\sqrt{N\theta^r})$.

Нетрудно видеть, что при любом фиксированном наборе значений $s_1, \dots, s_k > s$, принятых k случайными величинами $\xi_1, \dots, \xi_N$, проходят рассуждения, приводящие к локальной теореме о сходимости к нормальному распределению с параметрами (14) для условного распределения S_N при условии $E_{k,m}$. Поэтому при любых фиксированных k и m для n , удовлетворяющих условию (16), справедлива оценка

$$\mathbf{P}\{S_N = n \mid E_{k,m}\} = O(1/\sqrt{N\theta^r}).$$

Принимая во внимание, что в силу условий теоремы

$$\mathbf{P}(E_{k,m}) \leq \mathbf{P}(E_k) \leq \binom{N}{k} (\mathbf{P}\{\xi_1 > s\})^k \leq N^k (\theta^{s+1})^k \leq (c\theta)^k,$$

где c — не зависящая от k и m постоянная, нетрудно увидеть, что для суммы (18), умноженной на $\sqrt{N\theta^r}$, существует мажорирующий сходящийся ряд. Поэтому можно перейти к пределу под знаком суммы и получить, что сумма (18), умноженная на $\sqrt{N\theta^r}$, есть $O(\theta)$, то есть сумма (18) есть $o(1/\sqrt{N\theta^r})$. Таким образом, утверждение теоремы доказано.

Список литературы

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1984.
2. Колчин А. В., Колчин В. Ф., О переходе распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с одной решетки на другую в обобщенной схеме размещения. *Дискретная математика* (2006) **18**, №4, 113–127.

Статья поступила 31.07.2007.