Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Хворостянская, Об условии возникновения гигантского дерева в случайном непомеченном лесе, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 3, 35–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm964>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 16:26:19

Об условии возникновения гигантского дерева в случайном непомеченном лесе

© 2007 г. Е. В. Хворостянская

Рассматривается множество случайных лесов, состоящих из N корневых деревьев, упорядоченных одним из $N!$ возможных способов, и n некорневых непомеченных вершин. При $N, n \rightarrow \infty$ найдены предельные распределения $(N - p)$ -х членов вариационного ряда, полученного расположением объемов деревьев случайного непомеченного леса в неубывающем порядке, при фиксированных $p = 1, 2, \dots$. Установлено, что гигантское дерево (то есть дерево объема $n + o(n)$) возникает только в случае, когда $N, n \rightarrow \infty$ так, что $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, проект 05-01-00007а, и программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ 1758.2003.1.

В работах [1, 2] рассматривалось множество $F_{N,n}$ лесов, состоящих из N корневых деревьев, упорядоченных одним из $N!$ возможных способов, и n некорневых непомеченных вершин. На $F_{N,n}$ задано равномерное распределение вероятностей. В [1, 2] доказаны предельные теоремы для максимального объема дерева и числа деревьев заданного объема в лесе из $F_{N,n}$ при $N, n \rightarrow \infty$ (под объемом дерева понимается число некорневых вершин, содержащихся в этом дереве). При этом из теорем 4, 5 из [2] получаем, что при $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$ в случайном непомеченном лесе возникает гигантское дерево, то есть дерево объема $n + o(n)$ [3], а при $N/\sqrt{n} \rightarrow c > 0$, где c — положительная постоянная, максимальный объем дерева имеет порядок n , однако отсюда не следует возникновения в этом случае гигантского дерева.

Пусть $\eta_1, \dots, \eta_N$ — случайные величины, равные объемам деревьев леса из $F_{N,n}$ с номерами $1, \dots, N$ соответственно. В данной статье изучается поведение случайных величин $\eta_{(N-p)}$ при фиксированных $p = 0, 1, 2, \dots$, где $\eta_{(1)} \leq \eta_{(2)} \leq \dots \leq \eta_{(N)}$ — вариационный ряд, полученный расположением случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_N$ в неубывающем порядке.

В [1, 2] показано, что для изучения характеристик случайного непомеченного леса можно использовать обобщенную схему размещения частиц по ячейкам [4], в которой независимые случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ имеют распределение

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_i = k\} = \frac{T_{k+1}\lambda^{k+1}}{T(\lambda)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < \lambda \leq R, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где T_{k+1} — число корневых непомеченных деревьев, содержащих k некорневых вершин,

$R = 0,3383219 \dots$ — радиус сходимости производящей функции

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k x^k. \quad (2)$$

Согласно [5]

$$T(x) = x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 9x^5 + \dots, \quad (3)$$

при $k \rightarrow \infty$

$$T_k = \beta(R^k k^{3/2})^{-1} + O((R^k k^{5/2})^{-1}), \quad (4)$$

где $\beta = 0,4399237 \dots$;

$$T(R) = 1, \quad (5)$$

функцию $T(x)$ можно представить в виде

$$T(x) = 1 - b(R - x)^{1/2} + b_1(R - x) + b_2(R - x)^{3/2} + \dots, \quad (6)$$

числовые коэффициенты $b, b_1, b_2, \dots$ определены в [4], в частности, $b = 2,681127 \dots$,

$$b = 2\beta\sqrt{\pi/R}. \quad (7)$$

Следуя [2], будем считать, что если $N, n \rightarrow \infty$ так, что $N/\sqrt{n} \rightarrow \infty$, то в качестве значения параметра λ распределения (1) выбираем решение уравнения

$$\frac{\lambda T'(\lambda)}{T(\lambda)} = \frac{N + n}{N}, \quad (8)$$

а если $N, n \rightarrow \infty$ так, что $N/\sqrt{n} \leq C < \infty$, то $\lambda = R$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 0$, а $r \geq 3$ выбрано так, что

$$\frac{N}{r^{3/2}} \left(\frac{\lambda}{R} \right)^r \rightarrow \infty, \quad NT_{r+2} \lambda^{r+1} \rightarrow \gamma, \quad (9)$$

где γ — некоторая неотрицательная постоянная. Тогда для любого фиксированного $p = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} = r\} \rightarrow e^{-\gamma} \sum_{k=0}^p \frac{\gamma^k}{k!}, \quad \mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} = r+1\} \rightarrow 1 - e^{-\gamma} \sum_{k=0}^p \frac{\gamma^k}{k!}.$$

Теорема 2. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow c$, а r выбрано так, что

$$\frac{N\beta}{r^{3/2}} \left(\frac{\lambda}{R} \right)^{r+1} \rightarrow \gamma, \quad (10)$$

где c, γ — некоторые положительные постоянные. Тогда при любых фиксированных $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и $p = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leq r+q\} \rightarrow \exp \left\{ -\frac{\gamma (\lambda_c/R)^{q+1}}{1 - \lambda_c/R} \right\} \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} \left(\frac{\gamma (\lambda_c/R)^{q+1}}{1 - \lambda_c/R} \right)^k,$$

где λ_c удовлетворяет равенству $\lambda_c T'(\lambda_c) / T(\lambda_c) = 1 + c$.

Теорема 3. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N, N/\sqrt{n} \rightarrow \infty$. Тогда для любых фиксированных z и $p = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P} \{ \ln(R/\lambda) \eta_{(N-p)} - u \leq z \} \rightarrow e^{-e^{-z}} \sum_{k=0}^p \frac{e^{-kz}}{k!},$$

где u задано соотношением

$$N\beta \sqrt{\ln(R/\lambda)} u^{-3/2} e^{-u} = 1. \quad (11)$$

Теорема 4. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $2n/(b^2 R N^2) \rightarrow \gamma$, где γ — некоторая положительная постоянная. Тогда при любых фиксированных $z > 0$ и $p = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n} \eta_{(N-p)} \leq z \right\} \rightarrow \gamma^{3/2} \exp \left\{ \frac{1}{2\gamma} \right\} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} I_{s+k}(z\gamma, \gamma),$$

где

$$\begin{aligned} I_0(u, v) &= (v^3 \exp\{1/v\})^{-1/2}, \\ I_j(u, v) &= \int_{X_j(u, v)} \frac{\exp\{-1/(2(v - x_1 - \dots - x_j))\}}{(2\pi)^{j/2} (x_1 \dots x_j (v - x_1 - \dots - x_j))^{3/2}} dx_1 \dots dx_j, \\ X_j(u, v) &= \{x_i \geq u, i = 1, \dots, j, x_1 + \dots + x_j \leq v\}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Теорема 5. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$. Тогда для любых фиксированных $z > 0$ и $p = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{2\eta_{(N-p)}}{b^2 R N^2} \leq z \right\} \rightarrow e^{-E(0, z)} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(E(0, z))^l}{l!},$$

где

$$E(0, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} x^{-3/2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}.$$

Из сформулированных теорем и результатов работы [2] следует, что гигантское дерево в случайном непомеченном лесе возникает только тогда, когда $N, n \rightarrow \infty$ так, что $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$. Заметим, что, как и в работах [1, 2, 6], теоремы 1–5 аналогичны соответствующим результатам, полученным в [7], для случайных помеченных лесов.

Ниже приводятся вспомогательные утверждения (леммы 1–10), а затем с их помощью будут доказаны теоремы 1–5.

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_i^{(r)}$ и $\bar{\xi}_i^{(r)}$, $i = 1, \dots, N$, такие, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_i^{(r)} = k\} &= \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \leq r\}, \\ \mathbf{P}\{\bar{\xi}_i^{(r)} = k\} &= \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 > r\}, \end{aligned}$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$. Согласно лемме 1.2.2 из [4], для любого $p = 0, 1, \dots, N-1$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leq r\} = \sum_{l=0}^p \binom{N}{l} P_r^l (1 - P_r)^{N-l} \frac{\mathbf{P}\{\xi_{r,l} = n\}}{\mathbf{P}\{\xi_N = n\}}, \quad (12)$$

где

$$P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}, \quad \zeta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N, \\ \zeta_{r,l} = \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_{N-l}^{(r)} + \bar{\xi}_{N-l+1}^{(r)} + \dots + \bar{\xi}_N^{(r)}.$$

Из равенства (12) следует, что для получения теорем 1–5 достаточно изучить предельное поведение NP_r и сумм независимых случайных величин $\zeta_N, \zeta_{r,l}$.

В [1, 2] получены следующие результаты (леммы 1–4).

Лемма 1. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 0$, а r выбрано таким образом, что выполнены соотношения (9). Тогда $NP_{r-1} \rightarrow \infty$, $NP_r \rightarrow \gamma$, $NP_{r+1} \rightarrow 0$.

Лемма 2. Для любого фиксированного $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ при выполнении условий теоремы 2

$$NP_{r+q} \rightarrow \gamma(\lambda_c/R)^{q+1}(1 - \lambda_c/R)^{-1},$$

где λ_c определено в теореме 2.

Лемма 3. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N, N/\sqrt{n} \rightarrow \infty$, $r = (u + z)/\ln(R/\lambda) + O(1)$, где z — фиксированное число, а u задано соотношением (11). Тогда $NP_r \rightarrow e^{-z}$.

Лемма 4. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $2n/(b^2 RN^2) \rightarrow \gamma$, $r = nz + O(1)$, где γ, z — некоторые положительные постоянные. Тогда $NP_r \rightarrow E(0, \gamma z)$, где $E(0, \gamma z)$ определено в теореме 5.

Следуя доказательству леммы 2.2.6 из [6], с помощью (1), (4), (5), (7) несложно получить следующее утверждение.

Лемма 5. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$, и пусть $r = zb^2 RN^2/2$, где z — фиксированное положительное число. Тогда $NP_r \rightarrow E(0, z)$, где $E(0, z)$ определено в теореме 5.

При $N/\sqrt{n} \rightarrow \infty$ обозначим $m = \mathbf{E}\xi_1, \sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1$ ($\mathbf{E}\xi_1$ и $\mathbf{D}\xi_1$ при $\lambda = R$ не существуют). Из (1) и (8) находим, что

$$m = \frac{\lambda T'(\lambda)}{T(\lambda)} - 1 = \frac{n}{N}, \quad \sigma^2 = \frac{\lambda^2 T''(\lambda)}{T(\lambda)} - m - m^2. \quad (13)$$

Пусть $\varphi_{\xi_1}(t), \varphi_{\xi_1^{(r)}}(t), \varphi_{\bar{\xi}_1^{(r)}}(t), \varphi_{r,l}(t)$ — характеристические функции случайных величин $\xi_1, \xi_1^{(r)}, \bar{\xi}_1^{(r)}, (\zeta_{r,l} - n)/(\sigma\sqrt{N})$ соответственно. Нетрудно проверить, что

$$\varphi_{\xi_1^{(r)}}(t) = (1 - P_r)^{-1} \left(\varphi_{\xi_1}(t) - \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk} \right), \\ \varphi_{\bar{\xi}_1^{(r)}}(t) = P_r^{-1} \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk}, \\ \varphi_{r,l}(t) = \exp \left\{ -\frac{itn}{\sigma\sqrt{N}} \right\} \varphi_{\xi_1^{(r)}}^{N-l} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \varphi_{\bar{\xi}_1^{(r)}}^l \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right). \quad (14)$$

Через $C, C_1, C_2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, не всегда различные.

Лемма 6. Если выполнены условия леммы 1 или леммы 3, то при любых фиксированных $l = 0, 1, 2, \dots$ и t

$$\varphi_{r,l}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

При выполнении условий леммы 1 это утверждение остается справедливым при замене r на $r - 1 \geq 2$ и на $r + 1$.

Доказательство. Из (3), (8) следует, что

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{n}{N}(1 + o(1)), & n/N &\rightarrow 0, \\ \lambda &= R - (bRN/(2n))^2(1 + o(1)), & n/N &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (15)$$

При $x \rightarrow 0$ с помощью формулы Тейлора находим, что

$$\varphi_{\xi_1}(x) = 1 + imx - \frac{\sigma^2 + m^2}{2}x^2 + \frac{\theta(\tau)}{6}x^3, \quad (16)$$

где m, σ^2 определены в (13), $|\theta(\tau)| \leq \mathbf{E}\xi_1^3$, $0 < \tau \leq |x|$. Учитывая (1), несложно показать, что

$$\mathbf{E}\xi_1^3 = \frac{\lambda^3 T'''(\lambda)}{T(\lambda)} + m. \quad (17)$$

Из (3), (6), (13), (15), (17) следуют соотношения

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{n}{N}(1 + o(1)), & \mathbf{E}\xi_1^3 &= O(\lambda^2), & n/N &\rightarrow 0, \\ \sigma^2 &= \frac{2(n/N)^3}{b^2 R^3}(1 + o(1)), & \mathbf{E}\xi_1^3 &= O((n/N)^5), & n/N &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя (15), (18) и формулу Тейлора, при фиксированных t из (16) получаем равенство

$$\exp\left\{-\frac{itm}{\sigma\sqrt{N}}\right\} \varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) = e^{-t^2/2N} \left(1 + o\left(\frac{1}{N}\right)\right). \quad (19)$$

Легко видеть, что

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk} = P_r + Q_r(t), \quad (20)$$

где

$$Q_r(t) = \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k (e^{itk} - 1).$$

Поскольку $|e^{ix} - 1| \leq |x|$, получаем неравенство

$$|Q_r(t)| \leq |t| \sum_{k=r+1}^{\infty} k p_k. \quad (21)$$

Пусть выполнены условия леммы 1. Учитывая (4), нетрудно показать, что для любых r, k справедливо неравенство $T_{r+2+k}/T_{r+2} \leq C_1 R^{-k}$. С помощью этого неравенства и (1), (3), (15) находим, что

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} k p_k \leq C_1 p_{r+1} \sum_{k=0}^{\infty} (r+1+k)(\lambda/R)^k \leq C_2 r T_{r+2} \lambda^{r+1}.$$

Отсюда и из (13), (14), (18)–(21) получаем равенство

$$\begin{aligned} \varphi_{r,l}(t) &= e^{-t^2/2} (1 + o(1)) \\ &\times \left(1 + o\left(\frac{1}{N(1-P_r)}\right) + O\left(\frac{r T_{r+2} \lambda^{r+1}}{\sqrt{n}(1-P_r)}\right) \right)^{N-l} \left(1 + O\left(\frac{r T_{r+2} \lambda^{r+1}}{\sqrt{n} P_r}\right) \right)^l. \end{aligned} \quad (22)$$

Покажем, что если $r \rightarrow \infty$, то

$$r = o(\lambda \sqrt{n}). \quad (23)$$

В силу леммы 1 справедливо соотношение $N P_{r-1} \rightarrow \infty$. Отсюда, из (1) и (15) следует, что $N P_3 \rightarrow \infty$, и с помощью (1), (3), (15) находим, что $\lambda n^{1/3} \rightarrow \infty$. Тогда, предполагая, что $r \geq C_3 \lambda \sqrt{n}$, и учитывая (1), (4), (15), нетрудно получить соотношение $N P_{r-1} \rightarrow 0$, что противоречит утверждению леммы 1. Следовательно, справедливо (23). Из (22), (23), (9) и леммы 1 получаем, что $\varphi_{r,l}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}$. При замене r на $r+1$ из (22), (23), леммы 1 и легко проверяемого с помощью (1), (2), (15) равенства $P_{r+1} = T_{r+3} \lambda^{r+2} (1 + o(1))$ находим, что $\varphi_{r+1,l}(t) = e^{-t^2/2} (1 + o(1))$. Аналогично, учитывая соотношения $P_{r-1} = T_{r+1} \lambda^r (1 + o(1))$ и $T_{r+1}/T_{r+2} \leq 1$, получаем, что $\varphi_{r-1,l}(t) = e^{-t^2/2} (1 + o(1))$ при $r-1 \geq 2$.

Пусть выполнены условия леммы 3. Из (11), (15) находим, что

$$n u^{3/2} e^u / N^2 = (\beta b \sqrt{R}/2) (1 + o(1)). \quad (24)$$

Из (15), (24) и условий леммы 3 следуют соотношения

$$u \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Используя (21), (1), (4), (11), (15), (18), (24), (25), несложно показать, что при фиксированных t

$$Q_r \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{N}} \right) = o \left(\frac{1}{N} \right).$$

Отсюда, из (14), (19), (20) и леммы 3 получаем утверждение леммы при выполнении условий леммы 3.

Лемма 7. При выполнении условий леммы 1 или леммы 3 для любого фиксированного $l = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\xi_{r,l} = k\} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi N}} \exp \left\{ -\frac{(k-n)^2}{2\sigma^2 N} \right\} (1 + o(1))$$

равномерно относительно $(k-n)/\sigma \sqrt{N}$ в любом конечном фиксированном интервале.

При выполнении условий леммы 1 это утверждение остается справедливым при замене r на $r-1 \geq 2$ и на $r+1$.

Доказательство. По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{\xi_{r,l} = k\} = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{N}} \int_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} \exp^{-itz} \varphi_{r,l}(t) dt,$$

где $z = (k - n)/\sigma\sqrt{N}$, и поскольку

$$e^{-z^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{-itz - t^2/2} dt,$$

разность

$$R_{r,l} = \sqrt{2\pi}(\sigma\sqrt{2\pi N} \mathbf{P}\{\xi_{r,l} = k\} - e^{-z^2/2}) \quad (26)$$

можно представить в виде $R_{r,l} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-A}^A e^{-itz} (\varphi_{r,l}(t) - e^{-t^2/2}) dt, & I_2 &= \int_{A < |t| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{N}} e^{-itz} \varphi_{r,l}(t) dt, \\ I_3 &= \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{N} < |t| \leq \pi\sigma\sqrt{N}} e^{-itz} \varphi_{r,l}(t) dt, & I_4 &= - \int_{|t| > A} e^{-itz - t^2/2} dt, \end{aligned}$$

положительные постоянные A, ε будут выбраны позднее.

С помощью леммы 6 получаем, что $I_1 \rightarrow 0$ при любом фиксированном A . Интеграл I_4 можно сделать сколь угодно малым, выбрав A достаточно большим.

При $t \rightarrow 0$ по формуле Тейлора находим, что

$$\varphi_{\xi_1^{(r)}}(t) = 1 + im_r t - \frac{\sigma_r^2 + m_r^2}{2} t^2 + \frac{\theta_r(\tau)}{6} t^3, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} m_r &= \mathbf{E}\xi_1^{(r)} = (1 - P_r)^{-1} \left(m - \sum_{k=r+1}^{\infty} k p_k \right), \\ \sigma_r^2 &= \mathbf{D}\xi_1^{(r)} = (1 - P_r)^{-1} \left(\sigma^2 + m^2 - \sum_{k=r+1}^{\infty} k^2 p_k \right) - m_r^2, \\ |\theta_r(\tau)| &\leq \mathbf{E}(\xi_1^{(r)})^3 \leq (1 - P_r)^{-1} \mathbf{E}\xi_1^3, \quad 0 < \tau \leq |t|/\sigma\sqrt{N}, \end{aligned}$$

$m, \sigma^2, \mathbf{E}\xi_1^3$ определены в (13) и (17). Учитывая (1), (2), (4), (6), (13), (15), (18), (25) и леммы 1, 3, получаем, что

$$\begin{aligned} m_r &= m(1 + o(1)), & \sigma_r^2 &= \sigma^2(1 + o(1)), \\ \theta_r(\tau) &= O(\lambda^2), & n/N &\rightarrow 0, \\ \theta_r(\tau) &= O((n/N)^5), & n/N &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (28)$$

Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда при $A < |t| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{N}$ и достаточно малом ε из (27), (28), (13), (15), (18) следует оценка

$$\left| \varphi_{\xi_1^{(r)}} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \right|^2 \leq 1 - \frac{C_4 t^2}{N} \leq e^{-C_4 t^2/N}, \quad (29)$$

и из (14), (29) находим, что при фиксированных $l \geq 0$

$$|\varphi_{r,l}(t)| \leq e^{-C_5 t^2}.$$

Тогда

$$|I_2| \leq C_6 \int_A^\infty e^{-C_5 t^2} dt$$

и интеграл I_2 можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A .

Пусть $\varepsilon\sigma\sqrt{N} < |t| \leq \pi\sigma\sqrt{N}$. Используя (1), (3), (4), (15), несложно показать, что

$$\varphi_{\xi_1^{(r)}}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) = (1 - P_r)^{-1}(1 - \lambda(1 - e^{it/\sigma\sqrt{N}}) + O(\lambda^2)),$$

и учитывая формулу Эйлера и соотношение $P_r \rightarrow 0$, получаем оценку

$$\left|\varphi_{\xi_1^{(r)}}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right| \leq (1 - P_r)^{-1}e^{-C_7\lambda} \leq e^{-C_8\lambda}.$$

С помощью этого неравенства и (1), (3), (15) при фиксированных $l \geq 0$ из (14) находим, что

$$|\varphi_{r,l}(t)| \leq C_9 e^{-C_{10}n}.$$

Отсюда, учитывая (18), получаем, что

$$|I_3| \leq C_{11}\sqrt{n}e^{-C_{10}n} \rightarrow 0.$$

Пусть выполнены условия леммы 3. Интеграл I_2 представим в виде суммы $I_2 = I_2^{(1)} + I_2^{(2)}$, где области интегрирования $I_2^{(1)}, I_2^{(2)}$ соответственно равны

$$S^{(1)} = \{A < |t| \leq \delta N/\sqrt{n}\}, \quad S^{(2)} = \{\delta N/\sqrt{n} < |t| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{N}\},$$

положительные постоянные δ, ε будут выбраны позднее. При $t \in S^{(1)}$ с помощью (27), (28), (13), (15), (18) получаем, что при достаточно малом δ выполнено соотношение (29), откуда и из (14) следует, что при любых фиксированных $l \geq 0$ имеет место неравенство $|\varphi_{r,l}(t)| \leq e^{-C_{12}t^2}$, и интеграл $I_2^{(1)}$ можно сделать сколь угодно малым, выбрав A достаточно большим.

Учитывая (1), (2), (14), находим, что

$$\varphi_{\xi_1^{(r)}}(t) = (1 - P_r)^{-1} \left(\frac{e^{-it}T(\lambda e^{it})}{T(\lambda)} - \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk} \right). \quad (30)$$

Пусть $t \in S^{(2)}$. Используя (6), (15), формулу Тейлора и формулу Муавра, можно показать, что

$$0 < C_{13} \leq |T(\lambda e^{it/(\sigma\sqrt{N})})/T(\lambda)| \leq 1 - C_{14}\sqrt{|t|/(\sigma\sqrt{N})}.$$

Тогда, учитывая (14), (18), (30), неравенство $|\sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk}| \leq P_r$ и лемму 3, получаем, что при фиксированных $l \geq 0$

$$|\varphi_{r,l}(t)| \leq C_{15} \exp\{-C_{16}(N/\sqrt{n})^3 \sqrt{|t|}\}.$$

Отсюда, из (18) и соотношения $N/\sqrt{n} \rightarrow \infty$ находим, что $I_2^{(2)} \rightarrow 0$. Следовательно, $I_2 \rightarrow 0$ при $N, n \rightarrow \infty$.

При $\varepsilon\sigma\sqrt{N} < |t| \leq \pi\sigma\sqrt{N}$, используя формулу Эйлера, неравенство

$$1 - \cos(t/\sigma\sqrt{N}) > t^2/4\sigma^2N > \varepsilon^2/4,$$

соотношения (1), (6), (15) и лемму 3, несложно показать, что

$$\left| \varphi_{\xi_1^{(r)}} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \right|^2 = (1 - P_r)^{-2} \left| \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk} \right|^2 \leq 1 - \frac{p_0 p_1 \varepsilon^2}{2t(1 - P_r)^2} \leq e^{-C_{17}}.$$

Отсюда и из (14), (18) находим, что

$$|I_3| \leq C_{18}(n^{3/2}/N)e^{-C_{19}N} \leq C_{20}n^{3/2}/N^3,$$

и $I_3 \rightarrow 0$, поскольку $N/\sqrt{n} \rightarrow \infty$.

Таким образом, показано, что $R_{r,l} \rightarrow 0$ при $N, n \rightarrow \infty$, причем, как нетрудно проверить, при выполнении условий леммы 1 это соотношение остается справедливым при замене r на $r - 1 \geq 2$ и на $r + 1$. Отсюда и из (26) следует утверждение леммы.

Лемма 8. При выполнении условий теоремы 2 для любых фиксированных $l = 0, 1, 2, \dots$ и $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\xi_{r+q,l} = k\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \exp \left\{ -\frac{(k-n)^2}{2\sigma^2 N} \right\} (1 + o(1))$$

равномерно относительно $(k-n)/(\sigma\sqrt{N})$ в любом конечном фиксированном интервале.

Доказательство. Учитывая (3), (8), нетрудно видеть, что при выполнении условий теоремы 2

$$0 < C_{21} \leq \lambda \leq C_{22} < R, \quad (31)$$

а r выбрано так, что

$$r \rightarrow \infty, \quad r^2/N \rightarrow 0. \quad (32)$$

Из (13), (17), (3), (5), (31) следуют соотношения

$$0 < C_{23} \leq \sigma^2 \leq C_{24} < \infty, \quad \mathbf{E}\xi_1^3 \leq C_{25} < \infty. \quad (33)$$

Используя (16), (13), (33) и формулу Тейлора, получаем, что при фиксированных t выполнено равенство (19), а с помощью (1), (4), (31) несложно показать, что при фиксированных $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и t

$$\sum_{k=r+q+1}^{\infty} p_k e^{itk/(\sigma\sqrt{N})} = P_{r+q} + Q_{r+q} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right),$$

где

$$\left| Q_{r+q} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \right| = \left| \sum_{k=r+q+1}^{\infty} p_k (e^{itk/\sigma\sqrt{N}} - 1) \right| \leq \frac{|t|}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{k=r+q+1}^{\infty} k p_k \leq C_{26} \frac{r T_{r+2} \lambda^{r+1}}{\sqrt{N}}.$$

Отсюда, из (14), (19), (31)–(33), (4), (10) и леммы 2 находим, что при фиксированных $l \geq 0$

$$\varphi_{r+q,l}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}. \quad (34)$$

С помощью (27) (где вместо r стоит $r+q$), (3)–(5), (13), (31)–(33) и леммы 2 несложно показать, что при любом фиксированном A и достаточно малом ε для $A < |t| \leq \varepsilon \sigma \sqrt{N}$ выполнено неравенство

$$\left| \varphi_{\xi_1^{r+q}} \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{N}} \right) \right| \leq e^{-C_{27} t^2 / N}.$$

Поскольку максимальный шаг распределения ξ_1^{r+q} равен 1 и характеристическая функция $\varphi_{\xi_1^{r+q}}$ непрерывно зависит от параметра λ , $0 < C_{21} \leq \lambda \leq C_{22} < R$, при $\varepsilon \sigma \sqrt{N} < |t| \leq \pi \sigma \sqrt{N}$ справедлива оценка

$$\left| \varphi_{\xi_1^{r+q}} \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{N}} \right) \right| \leq e^{-C_{28}}.$$

Учитывая эти оценки и (34), утверждение леммы получаем аналогично доказательству леммы 7.

Лемма 9. Пусть выполнены условия леммы 4 и пусть $v = 2h/(b^2 R N^2)$, где h — натуральное число. Тогда для любого фиксированного $l = 0, 1, 2, \dots$ равномерно относительно v в любом конечном интервале вида $0 < v_0 \leq v \leq v_1 < \infty$

$$\frac{1}{2} b^2 R N^2 \mathbf{P} \left\{ \frac{2\zeta_{r,l}}{b^2 R N^2} = v \right\} = \frac{e^{E(0, \gamma z)} (1 + o(1))}{\sqrt{2\pi} E^l(0, \gamma z)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} I_{s+l}(\gamma z, v),$$

где $I_{s+l}(\gamma z, v)$, и $E(0, \gamma z)$ определены соответственно в теоремах 4, 5.

Доказательство. Пусть $\psi_{r,l}(t)$ — характеристическая функция случайной величины $2\zeta_{r,l}/(b^2 R N^2)$,

$$\begin{aligned} \psi_{r,l}(t) &= (1 - P_r)^{-(N-l)} P_r^{-l} \left(\varphi_{\xi_1} \left(\frac{2t}{b^2 R N^2} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} p_{r+k} \exp \left\{ \frac{2it(r+k)}{b^2 R N^2} \right\} \right)^{N-l} \\ &\quad \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_{r+k} \exp \left\{ \frac{2it(r+k)}{b^2 R N^2} \right\} \right)^l. \end{aligned} \quad (35)$$

В [1] показано, что при $N \rightarrow \infty$ и фиксированных t

$$\varphi_{\xi_1}^N \left(\frac{2t}{b^2 R N^2} \right) = e^{-\sqrt{-2it}} (1 + o(1)), \quad (36)$$

и при выполнении условий леммы 4 и фиксированных t

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{r+k} \exp \left\{ \frac{2it(r+k)}{b^2 R N^2} \right\} = \frac{E(t, \gamma z)}{N} (1 + o(1)),$$

где

$$E(t, u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty x^{-3/2} e^{itx} dx. \quad (37)$$

Тогда, учитывая лемму 4, при $N \rightarrow \infty$ и фиксированных $l \geq 0$ получаем равенство

$$\psi_{r,l}(t) = \exp\{-\sqrt{-2it} - E(t, \gamma z) + E(0, \gamma z)\} \left(\frac{E(t, \gamma z)}{E(0, \gamma z)} \right)^l (1 + o(1)). \quad (38)$$

Отсюда, аналогично доказательству леммы 5 из [7], находим, что $\psi_{r,l}(t)$ сходится к характеристической функции

$$\varphi(t) = \exp\{-\sqrt{-2it} - E(t, \gamma z) + E(0, \gamma z)\} \left(\frac{E(t, \gamma z)}{E(0, \gamma z)} \right)^l$$

распределения с плотностью

$$g(v) = \frac{e^{E(0, \gamma z)}}{\sqrt{2\pi} E^l(0, \gamma z)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} I_{s+l}(\gamma z, v).$$

Используя формулу обращения, разность

$$R_{r,l} = \pi b^2 R N^2 \mathbf{P}\{\zeta_{r,l} = h\} - 2\pi g(v)$$

можно представить в виде $R_{r,l} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-A}^A e^{-itv} (\psi_{r,l}(t) - \varphi(t)) dt, & I_2 &= \int_{A < |t| \leq \varepsilon b^2 R N^2 / 2} e^{-itv} \psi_{r,l}(t) dt, \\ I_3 &= \int_{\varepsilon b^2 R N^2 / 2 < |t| \leq \pi b^2 R N^2 / 2} e^{-itv} \psi_{r,l}(t) dt, & I_4 &= - \int_{|t| > A} \varphi(t) dt, \end{aligned}$$

положительные постоянные A и ε будут выбраны позднее.

Из соотношения (38) следует, что $I_1 \rightarrow 0$ при любом фиксированном A . Поскольку $|E(t, u)| \leq E(0, u) = \sqrt{2/\pi u}$, легко видеть, что $|\varphi(t)| \leq C_{29} e^{-\sqrt{|t|}}$ и интеграл I_4 можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A .

Учитывая (1), (2), (5), при $\lambda = R$ получаем, что $\varphi_{\xi_1}(t) = e^{-it} T(Re^{it})$. С помощью (6) и формулы Эйлера несложно показать, что $|T(Re^{it})| \leq 1 - C_{30} \sqrt{|t|}$ при достаточно малом t . Тогда при $A < |t| \leq \varepsilon b^2 R N^2 / 2$ и достаточно малом ε

$$\left| \varphi_{\xi_1} \left(\frac{2t}{b^2 R N^2} \right) \right| \leq e^{-C_{31} \sqrt{|t|}/N}.$$

Отсюда, из (35) и леммы 4 находим, что при фиксированных $l \geq 0$ имеет место неравенство $|\psi_{r,l}(t)| \leq C_{32} e^{-C_{33} \sqrt{|t|}}$ и, аналогично I_4 , выбором A интеграл I_2 можно сделать сколь угодно малым.

Учитывая (35) и лемму 4, нетрудно видеть, что при $\varepsilon b^2 R N^2 / 2 < |t| \leq \pi b^2 R N^2 / 2$ выполнено неравенство $|\psi_{r,l}(t)| \leq q^N$, где $q < 1$. С помощью этой оценки получаем, что $I_3 \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Таким образом показано, что $R_{r,l} \rightarrow 0$, откуда следует утверждение леммы.

Лемма 10. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $N^2/n \rightarrow 0$, и пусть $r = zb^2RN^2/2$, где z — фиксированное число. Тогда для любого фиксированного $l = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\zeta_{r,l} = n\} = \frac{l\beta N(1+o(1))}{n^{3/2}E(0,z)}, \quad n^{3/2}\mathbf{P}\{\zeta_{r,0} = n\}/N^2 \rightarrow 0,$$

где $E(0, z)$ определено в теореме 5.

Доказательство. Несложно проверить, что справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\zeta_{r,l} = n\} = P_r^{-l} \sum_{0 \leq k \leq n-lr} \mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} = k\} P_{l,n-k},$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_{N-l}^{(r)} &= \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_{N-l}^{(r)}, \\ P_{l,n-k} &= \mathbf{P}\{\xi_{N-l+1} + \dots + \xi_N = n-k, \xi_i > r, i = N-l+1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Тогда вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_{r,l} = n\}$ можно представить в виде

$$\mathbf{P}\{\zeta_{r,l} = n\} = S_1 + S_2 + S_3, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= P_r^{-l} \sum_{0 \leq k < \delta n} \mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} = k\} P_{l,n-k}, \\ S_2 &= P_r^{-l} \sum_{\delta n \leq k < n-\alpha n} \mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} = k\} P_{l,n-k}, \\ S_3 &= P_r^{-l} \sum_{n-\alpha n \leq k \leq n-lr} \mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} = k\} P_{l,n-k}, \end{aligned}$$

где $\delta = (N^2/n)^{1/7}$, а положительная постоянная α будет выбрана позднее.

Пусть $0 \leq k < \delta n$. Положим

$$\begin{aligned} S &= \{s_1, \dots, s_l : s_1 + \dots + s_l = n-k, r < s_1, \dots, s_l \leq n-k-(l-1)(r+1)\}, \\ S^{(1)} &= \{s_1, \dots, s_l : r < s_1, \dots, s_{l-1} \leq \delta n, s_l = n-k-s_1-\dots-s_{l-1} > \delta n\}, \\ S^{(2)} &= \{s_1, \dots, s_l : r < s_1, \dots, s_{l-2} \leq \delta n, s_{l-1}, s_l > \delta n, s_{l-1} + s_l = n-k-s_1-\dots-s_{l-2}\}, \\ &\dots \\ S^{(l)} &= \{s_1, \dots, s_l : s_1 + \dots + s_l = n-k, s_1, \dots, s_l > \delta n\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$P_{l,n-k} = \sum_S \mathbf{P}\{\xi_{N-l+1} = s_1\} \dots \mathbf{P}\{\xi_N = s_l\} = \binom{l}{1} \Sigma_1 + \binom{l}{2} \Sigma_2 + \dots + \binom{l}{l} \Sigma_l,$$

где

$$\Sigma_j = \sum_{S^{(j)}} \mathbf{P}\{\xi_{N-l+1} = s_1\} \dots \mathbf{P}\{\xi_N = s_l\}, \quad j = 1, \dots, l.$$

Рассмотрим Σ_1 . Так как $\delta \rightarrow 0$, при фиксированных l получаем, что $s_l = n(1 + o(1))$ и, используя (1), (4), находим, что при $\lambda = R$

$$\Sigma_1 = \frac{\beta^l}{n^{3/2}}(1 + o(1)) \sum_{r < s_1, \dots, s_{l-1} \leq \delta n} (s_1 \dots s_{l-1})^{-3/2}.$$

Заменяя суммирование интегрированием и учитывая равенства (7) и $r = zb^2RN^2/2$, $E(0, z) = \sqrt{2/\pi}z$, получаем, что

$$\Sigma_1 = \frac{\beta}{n^{3/2}} \left(\frac{E(0, z)}{N} \right)^{l-1} (1 + o(1)).$$

Аналогично можно показать, что $\Sigma_j = o(\Sigma_1)$, $j = 2, \dots, l$. Следовательно,

$$P_{l, n-k} = \frac{l\beta}{n^{3/2}} \left(\frac{E(0, z)}{N} \right)^{l-1} (1 + o(1)), \quad (40)$$

и учитывая лемму 5, находим, что

$$S_1 = \frac{l\beta N}{n^{3/2}E(0, z)}(1 + o(1)) \sum_{0 \leq k < \delta n} \mathbf{P}\{\xi_{N-l}^{(r)} = k\}. \quad (41)$$

Обозначим $\psi_r(t)$ характеристическую функцию величины $2\xi_{N-l}^{(r)}/(b^2RN^2)$. Используя (1), (4), (7) и заменяя суммирование интегрированием, нетрудно показать, что

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} p_k \exp\left\{\frac{2itk}{b^2RN^2}\right\} = \frac{E(t, z)}{N}(1 + o(1)),$$

где $E(t, z)$ определено в (37). Отсюда, из (14), (36) и леммы 5 при фиксированных t получаем равенство

$$\psi_r(t) = \varphi_{\xi_1^{(r)}}^{N-l} \left(\frac{2t}{b^2RN^2} \right) = \exp\{-\sqrt{-2it} + E(0, z) - E(t, z)\}(1 + o(1)),$$

откуда, аналогично тому, как это делается в доказательстве леммы 6 из [1], находим, что функция $\psi_r(t)$ сходится к характеристической функции распределения с плотностью

$$f(v) = \frac{e^{E(0, z)}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} I_s(z, v),$$

где $I_s(z, v)$ определены в теореме 4. Тогда

$$\sum_{0 \leq k < \delta n} \mathbf{P}\{\xi_{N-l}^{(r)} = k\} \rightarrow 1 \quad (42)$$

и из (41) следует равенство

$$S_1 = \frac{l\beta N}{n^{3/2}E(0, z)}(1 + o(1)). \quad (43)$$

Пусть $\delta n \leq k < n - \alpha n$. При достаточно малом α , аналогично тому, как было получено равенство (40), находим, что $P_{l,n-k} \leq C_{34} n^{-3/2} N^{-(l-1)}$. Отсюда, учитывая (42) и лемму 5, получаем соотношение

$$S_2 \leq C_{35} N n^{-3/2} \sum_{\delta n \leq k < n - \alpha n} \mathbf{P}\{\xi_{N-l}^{(r)} = k\} = o(S_1), \quad (44)$$

Ясно, что $\mathbf{P}\{\xi_{N-l}^{(r)} = k\} = 0$ при достаточно большом n/N^3 . Пусть $n/N^3 \leq C_{36}$. Согласно лемме 6 из [2], при $N^2/n \rightarrow 0$ и $r = zb^2 RN^2/2$

$$NP_{n-r} \rightarrow 0. \quad (45)$$

Введем обозначение $Q_{N-l} = \mathbf{P}\{\xi_{N-l}^{(r)} = k, \xi_i^{(n-r)} \leq r, i = 1, \dots, N-l\}$. Учитывая (45) и лемму 5, находим, что

$$Q_{N-l} = \left(\frac{1 - P_r}{1 - P_{n-r}} \right)^{N-l} \mathbf{P}\{\xi_{N-l}^{(r)} = k\} = e^{-E(0,z)} \mathbf{P}\{\xi_{N-l}^{(r)} = k\} (1 + o(1)). \quad (46)$$

Положим

$$S(x) = \sum_{k=0}^r e^{xk} \mathbf{P}\{\xi_1^{(n-r)} = k\}.$$

Введем независимые случайные величины $\xi_1(r), \dots, \xi_N(r)$ с распределением

$$\mathbf{P}\{\xi_i(r) = s\} = e^{s/r} \frac{\mathbf{P}\{\xi_1^{(n-r)} = s\}}{S(1/r)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, r,$$

положим $\zeta_{N-l}(r) = \xi_1(r) + \dots + \xi_{N-l}(r)$ и обозначим $\psi(t)$ характеристическую функцию $\xi_1(r)$. Несложно проверить, что справедливы равенства

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-l}(r) = k\} = e^{k/r} Q_{N-l} / S^{N-l}(1/r), \quad \psi(t) = S(it + r) / S(1/r). \quad (47)$$

Учитывая (1), (4), (45), можно показать, что

$$|S(it + 1/r)| \leq |\varphi_{\xi_1^{(n-r)}}(t)| + C_{37}/N, \quad |S(1/r)| \leq 1 + O(1/N), \quad (48)$$

отсюда и из (47) следует неравенство

$$|\psi(t)|^{N-l} \leq C_{38} |\varphi_{\xi_1^{(n-r)}}(t)|^{N-l}. \quad (49)$$

Согласно неравенствам (34), (39) из [2], при $|t| \leq \varepsilon N^2$ и достаточно малом ε

$$\left| \varphi_{\xi_1^{(n-r)}} \left(\frac{2t}{b^2 RN^2} \right) \right|^N \leq C_{39} e^{-C_{40} \sqrt{|t|}},$$

а при $\varepsilon N^2 < |t| \leq \pi b^2 RN^2/2$

$$\left| \varphi_{\xi_1^{(n-r)}} \left(\frac{2t}{b^2 RN^2} \right) \right| \leq e^{-C_{41}}.$$

Используя эти оценки, формулу обращения и (49), находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\zeta_{N-l}(r) = k\} &= \frac{1}{\pi b^2 R N^2} \int_{-\pi b^2 R N^2/2}^{\pi b^2 R N^2/2} \left| \psi \left(\frac{2t}{b^2 R N^2} \right) \right|^{N-l} dt \\ &\leq \frac{C_{42}}{N^2} \int_0^{\varepsilon N^2} e^{-C_{40}\sqrt{t}} dt + \frac{C_{43}}{N^2} e^{-C_{41}N} \int_{\varepsilon N^2}^{\pi b^2 R N^2/2} dt \leq e^{-C_{44}N}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (46)–(48) следует неравенство

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} = k\} \leq C_{45} e^{-k/r} / N^2. \quad (50)$$

Тогда, используя (1), (4), лемму 5, соотношение $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$, получаем, что при $l = 1$

$$S_3 \leq \frac{C_{46}}{N^2 P_r} \sum_{n-\alpha n \leq k \leq n-r} e^{-k/r} \frac{1}{(n-k)^{3/2}} \leq \frac{C_{47}}{N \sqrt{r}} e^{-C_{48}n/N^2} = o\left(\frac{N}{n^{3/2}}\right),$$

при $l \geq 2$

$$\begin{aligned} S_3 &\leq \frac{C_{49}}{N^2 P_r^l} \sum_{n-\alpha n \leq k \leq n-lr} e^{-k/r} P_{l,n-k} \\ &\leq \frac{C_{50}}{P_r^{l-2} r^{(3l-4)/2}} \sum_{n-\alpha n \leq k \leq n-lr} e^{-k/r} \leq \frac{C_{51}}{N^{2l-2}} e^{-C_{48}n/N^2} = o\left(\frac{N}{n^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (39), (43), (44) следует первое утверждение леммы.

Аналогично тому, как было получено неравенство (50), можно показать, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_{r,0} = n\} = \mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\} \leq C_{50} \frac{e^{-n/r}}{N^2} = o\left(\frac{N}{n^{3/2}}\right),$$

откуда получаем второе утверждение леммы.

Теперь мы можем доказать теоремы 1–5.

В [2] показано, что при выполнении условий теорем 1–3

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = (\sigma \sqrt{2\pi N})^{-1} (1 + o(1)).$$

Учитывая это соотношение, утверждение теоремы 1 нетрудно получить из (12) и лемм 1 и 7, утверждение теоремы 2 — из (12) и лемм 2 и 8, а утверждение теоремы 3 — из (12) и лемм 3 и 7.

Согласно лемме 4 из [1], при выполнении условий теоремы 4

$$\frac{b^2 R N^2}{2} \mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = (2\pi \gamma e^{1/\gamma})^{-1/2} (1 + o(1)).$$

Отсюда, из (12) и лемм 4, 9 следует утверждение теоремы 4.

В [2] показано, что при выполнении условий теоремы 5

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = \frac{\beta N}{n^{3/2}} (1 + o(1)).$$

Из этого равенства, (12) и лемм 5, 10 получаем утверждение теоремы 5.

Список литературы

1. Павлов Ю. Л., Предельные теоремы для объемов деревьев непомеченного графа случайного отображения. *Дискретная математика* (2004) **16**, №3, 63–75.
2. Павлов Ю. Л., Предельные теоремы для объемов деревьев случайного непомеченного леса. *Дискретная математика* (2005) **17**, №2, 70–86.
3. Колчин В. Ф., О существовании гигантской компоненты в схемах размещения частиц. *Обзорные прикладной и промышленной математики* (2000) **7**, №1, 112–113.
4. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2004.
5. Оттер Р., Число деревьев. В сб.: *Перечислительные задачи комбинаторного анализа*. Мир, Москва, 1979, с. 139–159.
6. Павлов Ю. Л., *Случайные леса*. Карельский научный центр РАН, Петрозаводск, 1996.
7. Чеплюкова И. А., Возникновение гигантского дерева в случайном лесе. *Дискретная математика* (1998) **10**, №1, 111–126.

Статья поступила 25.05.2006.