Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Алексеев, Верхняя оценка числа максимальных независимых множеств графа, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 3, 84–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm967>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 08:44:25

Верхняя оценка числа максимальных независимых множеств графа

© 2007 г. В. Е. Алексеев

Пусть $T(G)$ — число максимальных независимых множеств, $M(G)$ — число порожденных паросочетаний графа G . Доказывается, что $T(G) \leq M(G) + 1$. Как следствие выводится оценка $T(G) \leq ((m - m_1)/p + 1)^p + m_1$ для графа, не содержащего порожденного подграфа $(p + 1)K_2$, здесь m — число ребер, а m_1 — число доминирующих ребер. Это неравенство отличается от предположения, высказанного Балашем и Ю только наличием последнего слагаемого.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 06-01-00553а.

1. Введение

Максимальное независимое множество (МНМ) графа — это множество попарно несмежных вершин, не содержащееся в другом таком множестве. Известно, что наибольшее число МНМ в графах с n вершинами растет экспоненциально как функция от n (см. [4]). В то же время для некоторых классов графов это число ограничено полиномами от n . Такие классы представляют интерес в связи с тем, что для них задача о наибольшем независимом множестве может быть решена за полиномиальное время перебором МНМ, например, с помощью алгоритма, предложенного в [5]. В работе [1] исследовались с этой точки зрения наследственные классы, то есть классы, замкнутые относительно удаления и переименования вершин. В ней было доказано, что число МНМ в графах из наследственного класса ограничено полиномом тогда и только тогда, когда этот класс не содержит графа pK_2 при некотором p . Основной элемент доказательства составляла полиномиальная верхняя оценка числа МНМ в графах из класса $\text{Free}(pK_2)$, состоящего из всех графов, не содержащих pK_2 в качестве порожденного подграфа. Однако явный вид полинома в этой работе не был указан. Позже автор узнал о работе [2], в которой приведена явная оценка.

Пусть $T(G)$ — число МНМ в графе G . Ребро графа назовем доминирующим, если любая вершина графа смежна хотя бы с одним из концов этого ребра. Обозначим через $m_1 = m_1(G)$ число доминирующих ребер в графе G , и пусть $m_0 = m_0(G) = m - m_1(G)$, где m — число всех ребер. В [2] доказано, что для любого графа из $\text{Free}((p + 1)K_2)$, у которого дополнительный граф связан, справедливо неравенство $T(G) \leq m_0^p + 1$. Кроме того, в [2] высказано предположение, что

$$T(G) \leq (m_0/p + 1)^p. \quad (1)$$

В [3] получена оценка, из которой следует, что неравенство (1) справедливо асимптотически, если $m_0 = \Omega(n^2)$.

В настоящей статье устанавливается связь между $T(G)$ и числом порожденных паросочетаний в графе. Порожденное паросочетание — это порожденный подграф, в котором каждая компонента связности состоит из двух вершин. Число всех порожденных паросочетаний графа G обозначим через $M(G)$. В разделе 2 доказывается неравенство

$$T(G) \leq M(G) + 1. \quad (2)$$

В разделе 3 выводится оценка для числа всех независимых множеств графа, которая затем вместе с (2) используется для доказательства следующей слегка ослабленной формы предположения Балаша–Ю:

$$T(G) \leq (m_0/p + 1)^p + m_1$$

для любого графа $G \in \text{Free}((p+1)K_2)$.

Окрестность вершины a (множество смежных с ней вершин) обозначается через $N(a)$, подграф, получаемый из графа G удалением вершины a , — через $G - a$, а подграф, получаемый удалением множества вершин $N(a) \cup \{a\}$, — через G/a . Число независимости (мощность наибольшего независимого множества) графа G обозначается через $\alpha(G)$.

2. Максимальные независимые множества и порожденные паросочетания

Вершину графа будем называть доминирующей, если она смежна со всеми остальными вершинами. Для вершин a и b графа G обозначим через $G_{a,b}$ подграф, получаемый удалением этих вершин и всех, смежных хотя бы с одной из них.

Лемма 1. Если вершина a графа G не является доминирующей, то

$$T(G) \leq T(G - a) + \sum_{b \in N(a)} T(G_{a,b}).$$

Доказательство. Разобьем все МНМ графа G на две категории, к первой отнесем те, в которых содержатся МНМ графа $G - a$, ко второй — все остальные. Множество всех МНМ первой категории обозначим через H_1 , второй — через H_2 . Каждое $X \in H_1$ либо не содержит вершину a и является, следовательно, МНМ в графе $G - a$, либо содержит a , и тогда $X - \{a\}$ есть МНМ в $G - a$. Обратно, любому МНМ Y графа $G - a$ можно поставить в соответствие множество $X \in H_1$: если в Y есть вершины, смежные с a , то полагаем $X = Y$, если же таких нет, то полагаем $X = Y \cup \{a\}$. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между H_1 и множеством всех МНМ графа $G - a$, поэтому $T(G) = T(G - a) + |H_2|$.

Рассмотрим семейство H_2 . Каждое множество из H_2 содержит вершину a . Пусть $X \cup \{a\} \in H_2$. Вершина a не доминирующая, поэтому $X \neq \emptyset$. Множество X не является МНМ графа $G - a$, поэтому существует вершина b , смежная с a и несмежная со всеми вершинами из X . Значит, X целиком содержится в графе $G_{a,b}$. Так как X является МНМ в графе G/a , оно будет МНМ и в его порожденном подграфе $G_{a,b}$. Поэтому

$$|H_2| \leq \sum_{b \in N(a)} T(G_{a,b}).$$

Лемма 2. Для любой вершины a графа G справедливо равенство

$$M(G) = M(G - a) + \sum_{b \in N(a)} (M(G_{a,b}) + 1).$$

Доказательство. Это следует из того, что любое порожденное паросочетание либо содержится в $G - a$, либо содержит ребро, инцидентное вершине a .

Теорема 1. Для любого графа G справедливо неравенство

$$T(G) \leq M(G) + 1.$$

Доказательство. Для полного графа с n вершинами

$$T(K_n) = n, \quad M(K_n) = n(n-1)/2,$$

и приведенное в теореме неравенство выполняется при любом n . Если граф не является полным, то в нем есть не доминирующая вершина a . Утверждение теоремы доказывается индукцией по числу вершин с применением лемм 1 и 2:

$$T(G) \leq T(G - a) + \sum_{b \in N(a)} T(G_{a,b}) \leq M(G - a) + 1 + \sum_{b \in N(a)} (M(G_{a,b}) + 1) = M(G) + 1.$$

Отметим, что равенство в утверждении теоремы 1 достигается на графах, у которых степени вершин не превосходят 1. В графе из класса $\text{Free}((p+1)K_2)$ всякое порожденное паросочетание содержит не более p ребер. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. Если G — граф с t ребрами из класса $\text{Free}((p+1)K_2)$, то

$$T(G) \leq \sum_{i=0}^p \binom{m}{i}.$$

3. Оценка числа независимых множеств

Предварительно получим оценку для числа всех (не только максимальных) независимых множеств графа. Это число будем обозначать через $S(G)$, при этом считаем, что пустое множество является независимым множеством любого графа.

Теорема 2. Если G — граф с n вершинами и числом независимости α , то

$$S(G) \leq (n/\alpha + 1)^\alpha.$$

Доказательство. Для графа с одной вершиной утверждение верно, далее проводим индукцию по числу вершин.

Сначала рассмотрим случай, когда G — связный граф. Возьмем в нем вершину a максимальной степени Δ и положим $G_1 = G - a$, $G_2 = G/a$. Независимые множества графа G , не содержащие вершину a , — это независимые множества графа G_1 , а те, которые содержат вершину a , находятся во взаимно однозначном соответствии с независимыми множествами графа G_2 . Поэтому $S(G) = S(G_1) + S(G_2)$. Для чисел независимости

графов G_1 и G_2 справедливы неравенства $\alpha(G_1) \leq \alpha$, $\alpha(G_2) \leq \alpha - 1$. Так как $(n/x + 1)^x$ — возрастающая функция x , применяя предположение индукции, получаем, что

$$S(G) \leq \left(\frac{n-1}{\alpha} + 1\right)^\alpha \left(\frac{n-\Delta-1}{\alpha-1} + 1\right)^{\alpha-1}. \quad (3)$$

Из теоремы Брукса следует, что для любого связного графа, не являющегося полным графом или нечетным циклом, справедливо неравенство $\Delta \geq n/\alpha$. Чуть более слабое неравенство $\Delta \geq (n-1)/\alpha$ выполняется и для полных графов, и для нечетных циклов, и следовательно для любых связных графов. Применяя его к (3), получаем, что

$$S(G) \leq \left(\frac{n+\alpha-1}{\alpha} + 1\right)^\alpha + \left(\frac{n+\alpha-1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}.$$

Отсюда

$$S(G) - \left(\frac{n}{\alpha} + 1\right)^\alpha \leq \left(\frac{n+\alpha-1}{\alpha}\right)^\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{n+\alpha-1} - \left(1 + \frac{1}{n+\alpha-1}\right)^\alpha\right) \leq 0.$$

Пусть теперь граф G несвязен, $G = H_1 + H_2$. Пусть n_i , α_i суть соответственно число вершин и число независимости графа G_i , $i = 1, 2$. Тогда $\alpha(G) = \alpha_1 + \alpha_2$, $S(G) = S(G_1)S(G_2)$ и по предположению индукции

$$S(G) \leq \left(\frac{n_1}{\alpha_1} + 1\right)^{\alpha_1} \left(\frac{n_2}{\alpha_2} + 1\right)^{\alpha_2}.$$

Применим теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом в форме

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \leq x_1 p_1 + x_2 p_2,$$

полагая $p_i = \alpha_i/(\alpha_1 + \alpha_2)$, $x_i = n_i/\alpha_i$, $i = 1, 2$. Получим, что

$$S(G) \leq \left(\frac{n_1 + n_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + 1\right)^{\alpha_1 + \alpha_2} = \left(\frac{n}{\alpha} + 1\right)^\alpha.$$

Теорема 3. Для любого графа $G \in \text{Free}((p+1)K_2)$ справедливо неравенство

$$T(G) \leq (m_0/p + 1)^p + m_1.$$

Доказательство. Пусть $G \in \text{Free}((p+1)K_2)$. Порожденное паросочетание графа G будем называть M -подграфом, если в нем больше одного ребра, либо только одно ребро, которое не является доминирующим в G . Очевидно, ребра любого M -подграфа не доминирующие в G , а каждое порожденное паросочетание, не являющееся M -подграфом, состоит из одного доминирующего ребра. Обозначим через $M_0(G)$ число M -подграфов графа G . Тогда $M(G) = M_0(G) + m_1$, а утверждение теоремы 1 приобретает вид

$$T(G) \leq M_0(G) + m_1 + 1. \quad (4)$$

Построим граф H следующим образом: вершинами его являются недоминирующие ребра графа G и две вершины графа H , соответствующие ребрам (a, b) и (c, d) графа G , не смежны в H тогда и только тогда, когда множество $\{a, b, c, d\}$ порождает подграф $2K_2$ в G . Имеется очевидное взаимно однозначное соответствие между M -подграфами графа G и непустыми независимыми множествами вершин графа H . Поэтому $M_0(G) + 1 = S(G)$. Так как число вершин графа H равно $m_0(G)$, а $\alpha(H) \leq p$, из теоремы 2 получаем оценку $M_0(G) + 1 \leq (m_0(G)/p + 1)^p$, что вместе с (4) дает утверждение теоремы 3.

Список литературы

1. Алексеев В. Е., О числе тупиковых независимых множеств в графах из наследственных классов. В сб.: *Комбинаторно-алгебраические методы в дискретной оптимизации*, Горький, 1991, с. 5–8.
2. Balas E., Yu Ch. S., On graphs with polynomially solvable maximum-weight clique problem. *Networks* (1989) **19**, 247–253.
3. Farber M., Hujter M., Tuza Z., An upper bound on the number of cliques in a graph. *Networks* (1993) **23**, 207–210.
4. Moon J. W., Moser L., On cliques in graphs. *Israel J. Math.* (1965) **3**, 23–28.
5. Tsukigama S., Ide M., Ariochi H., Ozaki H., A new algorithm for generating all the maximal independent sets. *SIAM J. Comput.* (1977) **6**, №3, 505–517.

Статья поступила 7.06.2006.