Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Кучеренко, О структуризации класса обратимых клеточных автоматов,
Дискрет. матем., 2007, том 19, выпуск 3, 102–121

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm969>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:33:06

О структуризации класса обратимых клеточных автоматов

© 2007 г. И. В. Кучеренко

В работе изучается структура множества обратимых клеточных автоматов. В классе двумерных бинарных линейных клеточных автоматов с переменной структурой выделены классы с разрешимым и неразрешимым свойством обратимости, охватывающие практически все множество таких клеточных автоматов. С использованием этого результата доказана неразрешимость обратимости в классе клеточных автоматов с Г-шаблоном и шестнадцатью состояниями ячейки и в классе двумерных бинарных клеточных автоматов с самодвойственными локальными функциями перехода. Полностью описана структура множества обратимых клеточных автоматов в классах бинарных клеточных автоматов с локальными функциями переходов из классов Поста.

1. Введение

Клеточные автоматы (КА) являются дискретными математическими моделями широкого класса реальных систем вместе с протекающими в них процессами. Важное семейство клеточных автоматов образуют обратимые КА, то есть такие, в которых предыстория возникновения конфигурации определяется однозначно. Эти объекты имеют много приложений, в том числе в вопросах защиты информации.

Первые исследования обратимых клеточных автоматов относятся к шестидесятым годам двадцатого века. Было замечено, что обратимость эквивалентна сюръективности глобальной функции переходов клеточного автомата (теорема Мура–Майхилла, [1]). Следующим естественным вопросом стала задача распознавания свойства обратимости. Первым значимым классом, для которого были получены продвижения в этой задаче, стал класс КА с одномерным пространством ячеек. В [8] было установлено, что в этом классе существует алгоритм для распознавания обратимости. В той же работе высказана гипотеза, что для многомерных КА свойство обратимости также разрешимо, и даже было предложено попытаться обобщить на них технику одномерного случая. Однако, долгое время прогресса в решении задачи распознавания свойства обратимости многомерных КА не было. Только в девяностые годы было установлено, что эта задача является алгоритмически неразрешимой [9].

Следующим вопросом, связанным с обратимыми КА, является вопрос о доле их в множестве всех клеточных автоматов. С помощью усиления теоремы Мура–Майхилла можно показать, что почти все клеточные автоматы являются необратимыми. До настоящего времени в литературе класс обратимых КА часто упоминался как экзотический класс малой мощности. Однако такая точка зрения не отражает реальное положение вещей. В [5] было

установлено, что асимптотика логарифма числа обратимых клеточных автоматов в любом классе КА с фиксированным шаблоном соседства совпадает с асимптотикой числа всех клеточных автоматов. Это было сделано с помощью явного построения богатого класса обратимых КА с разрешимым свойством обратимости — гранично-перестановочных клеточных автоматов (ГПКА). Одним из замечательных свойств этого класса является возможность моделирования в нем произвольных клеточных автоматов. В частности, в $(k + 1)$ -мерном ГПКА без увеличения числа состояний можно смоделировать любой k -мерный клеточный автомат, что является усилением известного результата [10].

Однако с точки зрения практики неразрешимость является плохой характеристикой свойства. Кроме того, классификация клеточных автоматов по размерности множества ячеек является довольно грубой и не отражает многих особенностей функционирования КА. Автором были очерчены множества классов с неразрешимым свойством обратимости.

Были исследованы классы клеточных автоматов с фиксированной топологией локального взаимодействия. Для них был получен критерий разрешимости свойства обратимости. Как установлено в [7], разрешимыми являются только случаи, сводящиеся к одномерным. Также был исследован класс двумерных клеточных автоматов с фиксированным числом состояний ячейки. Оказалось, что в нем свойство обратимости также неразрешимо.

Отметим, что все встречавшиеся выше классы задаются с помощью некоторого ограничения на функционирование клеточного автомата. Например, обратимость — это глобальное ограничение (ограничение на основную функцию переходов), вообще говоря неразрешимое. Отметим, что почти все глобальные ограничения являются алгоритмически не распознаваемыми (это следует из возможности моделирования машин Тьюринга в клеточном автомате и теоремы Райса).

Иначе обстоит дело с локальными ограничениями, то есть с ограничениями на локальную функцию перехода и шаблон соседства. Встречающиеся на практике локальные ограничения, как правило, являются разрешимыми. Индуцируемое разрешимым локальным ограничением глобальное ограничение также является разрешимым. Эта идея широко используется в данной работе. Фактически, ведется последовательное построение локальных ограничений, позволяющее исследовать структуру множества обратимых клеточных автоматов.

Естественно разделить рассматриваемые локальные ограничения на топологические (ограничения на устройство шаблона соседства) и логические (ограничение на локальное функционирование в рамках данной топологии взаимодействия). Отметим, что любое локальное ограничение может быть представлено как композиция логических и топологических ограничений. В работе рассмотрено влияние некоторых простых локальных ограничений на свойство обратимости. Результат, полученный в предлагаемой работе, наглядно представлен на рис. 1.

Первой задачей, решаемой в данной работе, является поиск наиболее простых классов клеточных автоматов, проблема распознавания свойства обратимости в которых неразрешима. Рассмотрено смешанное ограничение, которого оказывается достаточно для неразрешимости обратимости. Пусть вся окрестность ячейки КА, за исключением одной ячейки, сосредоточена на одной прямой, и значность состояния ячейки конечна и равна числу n . Установлено, что уже для $n = 16$ свойство обратимости неразрешимо.

При доказательстве этого факта были получены результаты, представляющие самостоятельный интерес. Рассмотрен специальный подкласс класса клеточных автоматов — клеточные автоматы с переменной структурой (КАПС). В множестве двумерных бинарных линейных КАПС выделены два граничащих между собой класса, в одном из которых

Рис. 1. Структура множества обратимых клеточных автоматов. Классы упорядочены по вложению, идущие влево стрелки обозначают топологические ограничения, вправо — логические. Плюсом обозначены классы с разрешимым свойством обратимости, минусом — с неразрешимым. Возле каждого результата приведены ссылки на работы, в которых они были получены. Серым цветом выделены результаты данной работы.

свойство обратимости разрешимо, а в другом — нет.

Второй задачей является описание распределения локальных функций переходов (ЛФП) бинарных клеточных автоматов по классам Поста и исследования свойств множеств обратимых КА с ЛФП из некоторого класса Поста. Как оказалось, все классы Поста по отношению к свойству обратимости можно разделить на три типа. К первому типу естественно отнести классы, в которых свойство обратимости разрешимо из-за того, что нетривиальных обратимых КА в таких классах нет. Ко второму — классы, в которых обратимость разрешима, причем причиной этой разрешимости является некоторое свойство функций из этого класса Поста. К третьему — классы, в которых обратимость не является разрешимой. Оказалось, что множество классов первого типа счетно, второго и третьего конечно. Для каждого класса Поста явно указано, к какому типу он принадлежит.

2. Основные понятия и результаты

Формально клеточный автомат σ представляет собой четверку вида $(\mathbf{Z}^k, E_n, V, \varphi)$, где $\mathbf{Z}^k$ — совокупность всех k -мерных векторов с целочисленными координатами, E_n — конечное множество из n элементов, природа которых несущественна, для простоты будем считать что $E_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ — упорядоченный набор различных ненулевых векторов из $\mathbf{Z}^k$, называемый шаблоном соседства, $\varphi: (E_n)^{m+1} \mapsto E_n$,

$\varphi(0, 0, \dots, 0) = 0$. Элементы множества $\mathbf{Z}^k$ называются ячейками, элементы E_n — состояниями ячеек, 0 — состояние покоя. При помощи шаблона соседства V каждой ячейке α ставится в соответствие набор векторов $V(\alpha) = \{\alpha, \alpha + v_1, \alpha + v_2, \dots, \alpha + v_m\}$, который называется ее окрестностью. Функция φ называется локальной функцией переходов клеточного автомата. Клеточный автомат, имеющий только два состояния ячейки, называется бинарным.

Функции $g: \mathbf{Z}^k \mapsto E_n$ называются состояниями КА. Множество всех состояний обозначается $E_n^{\mathbf{Z}^k}$. Основная функция переходов Φ задается как отображение множества всех состояний клеточного автомата σ в себя, причем если $g = \Phi(g')$, то для любой ячейки α

$$g(\alpha) = \varphi(g'(\alpha), g'(\alpha + v_1), g'(\alpha + v_2), \dots, g'(\alpha + v_m)).$$

Функционирование КА определяется как последовательность его состояний $g_0, g_1, g_2, \dots$, получающаяся в результате применения основной функции переходов к некоторому его состоянию g_0 , то есть $g_t = \Phi(g_{t-1}) = \Phi^t(g_0)$, $t \in \mathbf{N}$. Состояние клеточного автомата, в котором только конечное число ячеек находится в ненулевом состоянии, называется конфигурацией.

При исследовании локальных свойств КА приходится рассматривать некоторые подмножества множества ячеек $\mathbf{Z}^k$. Конечные непустые множества ячеек клеточного автомата σ называются блоками. Конфигурацией блока B называется ограничение некоторого состояния КА на этот блок, то есть функция $f: B \mapsto E_n$. Множество всех конфигураций блока B обозначается через E_n^B . Блок $V(B) = \bigcup_{\alpha \in B} V(\alpha)$ называется окрестностью блока B . Ограничение основной функции переходов на блок B приводит к функции $\Phi|_B: E_n^{V(B)} \mapsto E_n^B$, которая соответствует изменению конфигурации f блока B в результате функционирования клеточного автомата, а именно,

$$\Phi|_B(f)(\alpha) = \varphi(f(\alpha), f(\alpha + v_1), f(\alpha + v_2), \dots, f(\alpha + v_m)), \quad \alpha \in B.$$

Клеточный автомат, основная функция переходов которого инъективна на множестве всех конфигураций, называется обратимым. По теореме Мура–Майхилла [1], [2] множество обратимых клеточных автоматов совпадает с множеством КА, основная функция переходов которых является сюръективной. Тривиальным примером обратимого клеточного автомата является КА σ_I , не меняющий своего состояния в процессе функционирования.

Далее мы будем часто использовать несколько типов шаблонов, для которых для удобства введем специальные обозначения. Шаблоном ближайшего соседства будем называть шаблон $V^+ = \{(1, 0, \dots, 0), (-1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), (0, -1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 0, -1)\}$. Будем называть Т-шаблоном радиуса l двумерный шаблон $V_l^T = \{(0, -1), (-l, 1), (-l + 1, 1), \dots, (l, 1)\}$. Будем называть Г-шаблоном диаметра l двумерный шаблон $V_l^G = \{(0, -1), (1, 0), (2, 0), \dots, (l, 0)\}$.

Будем считать, что множество ячеек вложено естественным образом в евклидово пространство $\mathbf{R}^k$. Двумерный шаблон соседства V будем называть полуплоскостным, если все его векторы находятся в некоторой полуплоскости. Формально это означает, что для шаблона V существует ненулевой вектор $w \in \mathbf{R}^2$ такой, что $(w, v) \geq 0$ для всех $v \in V$, где $(\cdot, \cdot)$ — евклидово скалярное произведение. Следует отметить, что в силу того, что векторы шаблона V имеют целые координаты, всегда можно выбрать вектор w из $\mathbf{Z}^2$. Для простоты будем считать, что w выбран именно таким образом.

Далее будет использоваться один подкласс КА специального вида. Пусть состояния клеточного автомата μ представляют собой пары вида (x, y) , $x \in E_{n_1}$, $y \in E_{n_2}$. Тогда локальную функцию переходов φ можно рассматривать как вектор-функцию (ψ, ϕ) .

Будем называть КА μ клеточным автоматом с переменной структурой (КАПС), если вторая компонента состояния ячейки не меняется в процессе функционирования μ , то есть $\varphi((x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)) = y_0$. Для удобства значение второй компоненты состояния ячейки будем называть основанием, а первой — активным состоянием. КАПС μ можно записать в виде $\mu = (\mathbf{Z}^k, E_{n_1}, E_{n_2}, V, \psi)$. В случае, если $n_1 = 2$, будем называть КАПС бинарным.

На клеточные автоматы с переменной структурой распространяется определение обратимости, данное выше для КА. В классе КАПС удалось построить наиболее бедный из известных подкласс, в котором можно провести границу между случаями разрешимости и неразрешимости свойства обратимости.

Будем называть бинарный клеточный автомат с переменной структурой линейным, если для любого фиксированного значения переменных основания его локальная функция переходов является линейной функцией. Обозначим класс двумерных бинарных линейных КАПС с полуплоскостным шаблоном соседства через $\text{CAV}^\wedge(2, \cdot)$.

Теорема 1. *В классе клеточных автоматов $\text{CAV}^\wedge(2, \cdot)$ свойство обратимости разрешимо.*

Обозначим класс двумерных бинарных линейных КАПС с бинарным основанием и Т-шаблоном соседства $(\mathbf{Z}^2, E_2, E_2, V^\top, \psi)$ через $\text{CAV}^\perp(2, 2)$.

Теорема 2. *В классе клеточных автоматов $\text{CAV}^\perp(2, 2)$ свойство обратимости алгоритмически неразрешимо.*

Для доказательства неразрешимости свойства обратимости в более богатых классах КА, чем $\text{CAV}^\perp(2, 2)$, оказывается удобной следующая конструкция. Пусть заданы два клеточных автомата σ_1 и σ_2 , различающиеся только локальными функциями перехода φ_1 и φ_2 . Построим по ним клеточный автомат с переменной структурой μ с бинарным основанием вида $(\mathbf{Z}^k, E_n, E_2, V, \psi)$, где

$$\psi((x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)) = \begin{cases} \varphi_1(x_0, \dots, x_m), & \text{если } y_i = 0 \text{ для всех } i = 0, 1, \dots, m, \\ \varphi_2(x_0, \dots, x_m) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Результат применения подобной операции будем называть внешним произведением КА и обозначать $\sigma_1 \otimes \sigma_2$.

Теорема 3. *Свойство обратимости неразрешимо в классе внешних произведений вида $\sigma \otimes \sigma_I$, где $\sigma \in \text{CAV}^\perp(2, 2)$.*

Теорема 1 позволяет предположить, что свойство обратимости разрешимо в классах КА с шаблонами, близкими к полуплоскостному. Как оказалось, уже в простейшем случае это предположение оказывается неверным.

С помощью преобразований КА, сохраняющих свойство обратимости, из теоремы 2 получено следующее утверждение. Обозначим $\text{CA}^\Gamma(n)$ множество двумерных КА с n состояниями ячейки и Γ -шаблоном соседства V^Γ .

Теорема 4. *В классе $\text{CA}^\Gamma(16)$ свойство обратимости алгоритмически неразрешимо.*

Обозначим через $\text{BCA}(K)$ класс бинарных клеточных автоматов (БКА) с локальными функциями перехода, принадлежащими некоторому классу Поста K (см. [3]). Назовем нетривиальным БКА, локальная функция перехода которого существенно зависит как минимум от двух переменных.

Теорема 5. *Нетривиальные обратимые БКА содержатся в тех и только тех классах $\text{BCA}(K)$, для которых $K \supseteq L_4$.*

В [7] установлено, что конструктивного способа проверки обратимости класса $\text{BCA}(P_2)$ не существует. Следующее утверждение дает усиление этого результата.

Теорема 6. *Свойство обратимости неразрешимо в классе $\text{BCA}(K)$ тогда и только тогда, когда $K \supseteq D_1$.*

3. Бинарные линейные КАПС с полуплоскостным шаблоном соседства

В данном разделе будет рассмотрен разрешимый случай обратимости для класса двумерных бинарных линейных клеточных автоматов с переменной структурой. В рассматриваемом классе решающим фактором для наличия алгоритма распознавания обратимости является свойство шаблона соседства не иметь векторов с некоторым заданным направлением.

Из теоремы Мура–Майхилла следует, что обратимость КА эквивалентна сюръективности его глобальной функции переходов [1]. Замечательным свойством клеточных автоматов является тот факт, что это глобальное свойство может быть выражено в локальных терминах.

Назовем конфигурацию f блока B неконструируемой, если $\Phi|_B(g) \neq f$ для любой конфигурации $g \in E_n^{V(B)}$. Утверждение теоремы Мура–Майхилла состоит в том, что необратимость КА эквивалентна наличию неконструируемой конфигурации на некотором его блоке.

Пусть в некотором классе КА для некоторого семейства блоков можно указать алгоритм, распознающий наличие на блоках из этого семейства неконструируемых конфигураций. Тогда, по теореме Мура–Майхилла, этот алгоритм можно использовать для проверки клеточных автоматов из этого класса на необратимость. Заметим, что такой алгоритм всегда существует в любом конечном множестве блоков (это следует из того, что блок представляет собой конечное множество ячеек). Нетривиальный пример универсального бесконечного семейства блоков дает следующая лемма.

Лемма 1. *Существует алгоритм для распознавания наличия неконструируемых конфигураций на семействе блоков вида $B_v(l) = \{v, 2v, \dots, lv\}$, где фиксированный вектор v принадлежит множеству ячеек $\mathbb{Z}^k$, $l \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Для простоты можно считать, что вектор v представляет собой первый вектор стандартного базиса $(1, 0, 0, \dots, 0)$. Идея доказательства заключается в получении оценки для длины минимальной неконструируемой конфигурации. Ячейки вида sv будем обозначать через β_s . Пусть $f_{B_v(l)}^{-1}$ — множество прообразов конфигурации f блока $B_v(l)$. Через $f_{B_v(l)}^{-1}(\beta_s)$ обозначим множество ограничений конфигураций из $f_{B_v(l)}^{-1}$ на блок $V(\beta_s) \subset V(B_v(l))$. Заметим, что справедливость для некоторой ячейки $\beta_s \in B_v(l)$ равенства $f_{B_v(l)}^{-1}(\beta_s) = \emptyset$ эквивалентна неконструируемости конфигурации f .

Поставим в соответствие конфигурации f блока $B_v(l)$ набор множеств конфигураций $G(f, l) = (G_1, G_2, \dots, G_l)$ следующим образом. Пусть G_1 представляет собой прообраз ограничения конфигурации f на блок $V(\beta_1)$, то есть $G_1 = f_{B_v(l)}^{-1}(\beta_1)$.

В множество G_{i+1} , $i = 1, \dots, l-1$, включим те конфигурации g из множества конфигураций блока $V(\beta_{i+1})$, для которых $\Phi|_{V(\beta_{i+1})}(g)(\beta_{i+1}) = f(\beta_{i+1})$ и найдется последовательность конфигураций $g_1, g_2, \dots, g_s, \dots, g_i$, $g_s \in G_s$ такая, что $g_s \equiv g|_{V(\beta_s) \cap V(\beta_{i+1})}$, и $g_s \equiv g_{s'}|_{V(\beta_s) \cap V(\beta_{s'})}$ для любого $s \neq s'$, $s \leq i$, $s' \leq i$, (предполагается, что ограничения любых конфигураций на пустое множество ячеек совпадают).

Пусть конфигурация f блока $B_v(l)$ является неконструируемой. Тогда существует номер s , начиная с которого все элементы $G(f, l)$ являются пустыми множествами. Действительно, если это не так, то взяв любой элемент из G_l , можно доопределить его на весь блок $B_v(l)$ так, что получится прообраз конфигурации f .

Рассмотрим минимальный по длине блок $B_v(l)$, имеющий неконструируемую конфигурацию f . Допустим, что для некоторых $s, s' \in \{1, 2, \dots, l\}$, $s \neq s'$, справедливо равенство $G_s = G_{s'}$. Рассмотрим конфигурацию f' блока $B_v(l - |s - s'|)$, полученную выбрасыванием из f центральной части, соответствующей ячейкам $\{s + 1, s + 2, \dots, s'\}$. Как нетрудно видеть, f' также является неконструируемой, и длина блока, на котором она задана, меньше l . Следовательно, для минимальной по длине неконструируемой конфигурации $G_s \neq G_{s'}$ для всех $s \neq s'$.

Отметим, что мощность множества G_s не превосходит n^{m+1} , где n — число состояний ячейки КА, m — число векторов в шаблоне соседства. Общее число различных элементов в наборе не превосходит числа всех возможных множеств G_s , то есть $2^{n^{m+1}}$. По принципу ящиков Дирихле получаем, что существование неконструируемой конфигурации на счетном семействе блоков $B_v(l)$, $l \in \mathbb{N}$, эквивалентно существованию неконструируемой конфигурации на блоке $B_v(n^{m+1})$. Доказательство леммы закончено.

Заметим, что из леммы 1 следует разрешимость свойства обратимости для множества одномерных КА. Идея доказательства леммы почерпнута автором из [8], где построен один из алгоритмов для распознавания обратимости одномерных КА.

Как оказалось, для каждого двумерного бинарного линейного КАПС с полуплоскостным шаблоном можно указать класс одномерных блоков, отсутствие неконструируемых конфигураций на котором достаточно для того, чтобы КА был обратимым.

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем КАПС μ из класса $\text{CAV}^\wedge(2, \cdot)$. Рассмотрим некоторую его конфигурацию f . В силу того, что значения основания f не меняются в процессе функционирования, прообраз конфигурации f может отличаться от f только в значениях активного состояния ячеек. Заметим, что для тождественно нулевого состояния основания КАПС из $\text{CAV}^\wedge(2, \cdot)$ реализует отображение активных состояний ячеек, являющееся линейным клеточным автоматом. Следовательно, по лемме 9 (см. ниже) прообраз конфигурации f может иметь отличные от нуля состояния ячеек только на блоке $V(\text{supp}(f))$, где $\text{supp}(f)$ — множество ячеек α таких, что $f(\alpha) \neq 0$.

Приведем конечную систему уравнений

$$A_f(g|_{V(\text{supp}(f))}) = f|_{V(\text{supp}(f))} \quad (1)$$

для определения активных состояний прообраза g конфигурации f . В силу выбора КА μ эта система уравнений будет линейной. Как нетрудно видеть, необратимость КАПС μ эквивалентна существованию конфигурации, для которой такая система уравнений является вырожденной.

Рассмотрим прямую $L = \{wx \mid x \in \mathbb{R}\}$, где w — вектор с целочисленными координатами из определения полуплоскостного шаблона.

Введем отношение эквивалентности на множестве всех ячеек: будем считать $\alpha_1 \sim \alpha_2$, если координаты ортогональных проекций α_1 и α_2 на прямую L совпадают. Построим соответствие между полученным множеством классов и множеством целых чисел, причем классу, содержащему ячейку $0 \in \mathbf{Z}^k$ присвоим номер 0, а остальные классы пронумеруем в порядке возрастания координаты проекции их элементов на L . Номером ячейки будем называть номер класса, к которому она принадлежит.

Переупорядочим переменные системы уравнений (1) таким образом, чтобы активным состояниям ячейки прообраза с большим номером соответствовал больший индекс. В силу полуплоскостной структуры шаблона соседства, матрица системы (1) примет вид блочно-верхнетреугольной. Заметим, что каждый блок на диагонали будет соответствовать множеству ячеек с одинаковым номером.

Вырожденность блочно-верхнетреугольной системы линейных уравнений эквивалентна наличию вырожденного квадратного блока на диагонали матрицы. Предположим, что система (1) вырождена. Выберем вырожденный блок $\mathcal{B}$ на диагонали матрицы, переменные которого соответствуют ячейкам некоторого блока B КА μ с наибольшим возможным номером. Рассмотрим систему

$$A'_f X = Y \quad (2)$$

переменные которой соответствуют состоянию ячеек блока $V(B)$.

В силу ее вырожденности существует правая часть Y_0 , такая, что система (2) не имеет решения. Покажем, что конфигурация f_{Y_0} блока $V(B)$, значение основания которой равно значению основания ограничения f на $V(B)$, а значение состояния соответствует Y_0 , будет неконструируемой.

Приведем невырожденные блоки системы (2) к диагональному виду и применим обратный ход метода Гаусса к столбцам системы, не входящих в блок $\mathcal{B}$. Матрица системы A'_f преобразуется к виду

$$\begin{pmatrix} (B) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что, несмотря на то, что вся система решения не имеет, ее ограничение, состоящее из переменных, не входящих в блок B , невырождено. То есть неконструируемая конфигурация, существующая на блоке с ячейками, соответствующими значениям переменных системы (2), будучи ограничена на ячейки B , также является неконструируемой.

В силу двумерности пространства и целочисленности вектора w , блок B можно вложить в некоторый блок вида $B_v(l)$, где $(v, w) = 0$. То есть из необратимости КА следует наличие блока вида $B_v(l)$, на котором определена неконструируемая конфигурация.

Обратно, пусть на блоке $B_v(l)$ определена неконструируемая конфигурация. Как уже было установлено, в этом случае КА μ является необратимым.

Итак, доказано, что необратимость КА эквивалентна наличию неконструируемых конфигураций на блоке вида $B_v(l)$. Рассмотрим множество целочисленных векторов $\hat{V}$ таких, что для $v \in \hat{V}$ справедливо равенство $(v, w) = 0$. Выберем в этом множестве вектор v_1 минимальной длины. Нетрудно показать, что для любого $v \in \hat{V}$ справедливо равенство $v = nv_1$, где n — целое число. Применяя лемму 1 к семейству блоков $B_{v_1}(l)$, получаем утверждение теоремы. Доказательство закончено.

4. Бинарные линейные КАПС с Т-шаблоном соседства

Как оказалось, уже в случае бинарного основания добавление к полуплоскостному шаблону всего одного вектора сильно портит свойства множества обратимых линейных КАПС.

В данном разделе, если явно не указано противное, будем подразумевать, что рассматриваемые клеточные автоматы имеют Т-шаблон соседства, который переупорядочен следующим образом:

$$\begin{aligned} V_l^\top &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \dots, v_{2l+2}\} \\ &= \{(1, 1), (0, -1), (-1, 1), (0, 1), (2, 1), (-2, 1), \dots, (l, 1), (-l, 1)\}. \end{aligned}$$

Для наглядности векторы v_1, v_2, v_3, v_4 будем обозначать $v_{\nearrow}, v_{\downarrow}, v_{\nwarrow}, v_{\uparrow}$. Аналогичные индексы будем использовать и для переменных локальной функции перехода. Состояния в данном разделе рассматриваются безотносительно к конкретному КА как функции из множества $E_n^{\mathbb{Z}^2}$.

При работе с КАПС удобно использовать язык локальных ограничений [1]. Здесь мы будем пользоваться только локальными ограничениями с базовым блоком в виде окрестности ячейки КА. Для простоты далее мы будем употреблять термин локальное ограничение в указанном узком смысле.

Локальным ограничением (ЛО) F на состояния клеточного автомата назовем некоторое непустое множество конфигураций блока $V(0)$, содержащее тождественно нулевую конфигурацию. Будем говорить, что ячейка α состояния $g \in E_n^{\mathbb{Z}^2}$ удовлетворяет ЛО F , если $g|_{V(\alpha)} \in F$. Состояние g удовлетворяет локальному ограничению F , если каждая его ячейка удовлетворяет F .

Заметим, что тождественно нулевая конфигурация удовлетворяет любому ЛО. Конфигурацию g назовем V -связанной, если для любой ячейки α такой, что $g(\alpha) \neq 0$, найдется ячейка β , $g(\beta) \neq 0$, такая, что либо $\alpha \in V(\beta)$, либо $\beta \in V(\alpha)$. Любую конфигурацию можно разбить на конечное число V -связанных компонент и рассматривать каждую из них как отдельную конфигурацию. Нетрудно показать, что если ненулевая конфигурация удовлетворяет ЛО F , то и любая ее компонента V -связанности удовлетворяет F .

Вектор-разбиением локального ограничения F будем называть набор непустых попарно не пересекающихся множеств $(F_0, F_1, \dots, F_s)$ такой, что $F = \bigcup_{i=0}^s F_i$ и нулевая конфигурация содержится в F_0 . Ячейка состояния удовлетворяет вектор-разбиению ЛО $(F_0, F_1, \dots, F_s)$, если она удовлетворяет ЛО F .

Ориентирующим локальным ограничением $\vec{F}$ назовем вектор-разбиение ЛО F вида $(F_0, F_{\nearrow}, F_{\downarrow}, F_{\nwarrow}, F_{\uparrow})$. Пусть задано состояние g . Ориентацией g с помощью $\vec{F}$ назовем орграф $\vec{F}(g)$, вершинами которого являются ячейки, удовлетворяющие ЛО $\vec{F}$, а ребра строятся по следующему правилу:

если $g|_{V(\alpha)} \in F_{\kappa}$ и $g|_{V(\alpha+v_{\kappa})} \in F$, то ориентированное ребро $(\alpha, \alpha + v_{\kappa})$ принадлежит орграфу $\vec{F}(g)$, где $\kappa \in \{\nearrow, \downarrow, \nwarrow, \uparrow\}$.

Лемма 2. Существует ориентирующее локальное ограничение $\vec{F}$ со следующими свойствами.

- (1) У любой V -связной конфигурации, удовлетворяющей F , множество ячеек с ненулевыми состояниями представляет собой дискретный прямоугольник размера $(2l + h_2) \times (8 + 2h_2)$, $h_1, h_2 \in \mathbb{N}$, со сторонами, параллельными осям координат.

Рис. 2. Модельная V -связная конфигурация, удовлетворяющая ограничению $\vec{F}$. Обозначена одна из окрестностей ячейки ($l = 2$).

- (2) Для каждой ячейки α состояния g , удовлетворяющего F , либо $g(\alpha) = 0$, либо $g|_{V(\alpha)} \notin F_0$.
- (3) Орграф $\vec{F}(g)$ содержит цикл тогда и только тогда, когда некоторая V -связная подконфигурация g удовлетворяет F .

Доказательство. На рис. 2 приведена конфигурация, удовлетворяющая искомому ограничению $\vec{F}$, с обозначенной ориентацией. Данный рисунок определяет ограничение $\vec{F}$ в том смысле, что оно содержит те и только те конфигурации, которые являются ограничениями конфигурации, изображенной на рисунке. Несложно установить, что оно удовлетворяет всем свойствам, указанным в лемме.

Поставим в соответствие ориентирующему ЛО $\vec{F}$ бинарный линейный клеточный автомат с переменной структурой $\mu_{\vec{F}} = (\mathbb{Z}^2, E_2, E_n, V^\top, \psi_{\vec{F}})$, где функция $\psi_{\vec{F}}$ на состоянии окрестности ячейки $(\bar{x}, f)$, $\bar{x} = (x_0, x_{\nearrow}, x_{\downarrow}, x_{\nwarrow}, x_{\uparrow}, x_5, \dots, x_{2l+2})$, $f \in E_n^{V(0)}$,

определяется следующим образом:

$$\psi_{\vec{F}}(\bar{x}, f) = \begin{cases} x_0 \oplus x_\kappa, & \text{если } f \in F_\kappa, \kappa \in \{\nearrow, \downarrow, \nwarrow, \uparrow\}, \\ x_0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 3. *Клеточный автомат $\mu_{\vec{F}}$ обратим тогда и только тогда, когда ориентация любой конфигурации из $E_n^{\mathbb{Z}^2}$ с помощью $\vec{F}$ не содержит конечного ориентированного цикла.*

Доказательство. Рассмотрим две системы линейных уравнений над полем $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1, \\ x_1 \oplus x_2 &= a_2, \\ x_2 \oplus x_3 &= a_3, \\ &\dots \\ x_{h-1} \oplus x_h &= a_h \end{aligned} \tag{3}$$

и

$$\begin{aligned} x_h \oplus x_1 &= a_1, \\ x_1 \oplus x_2 &= a_2, \\ x_2 \oplus x_3 &= a_3, \\ &\dots \\ x_{h-1} \oplus x_h &= a_h. \end{aligned} \tag{4}$$

Матрица системы (3) является ниже-треугольной с единицами на главной диагонали, следовательно, система (3) является невырожденной. Заметим, что у однородной системы, соответствующей системе (4), имеется два решения $(0, 0, \dots, 0)$ и $(1, 1, \dots, 1)$. Следовательно, система (4) вырождена. Наличие конечного ориентированного цикла в ориентации конфигурации g означает, что значения состояний некоторых ячеек в ней образуют систему (4), то есть, прообразов у конфигурации с нулевым состоянием и состоянием основания, равным g , будет как минимум два. Доказательство закончено.

В дальнейшем нам будет удобно использовать одну неразрешимую проблему, касающуюся одномерных КА.

Лемма 4. *Не существует алгоритма, который бы по одномерному клеточному автомату с ближайшим шаблоном соседства $\sigma = (\mathbb{Z}^1, E_n, V^+, \varphi)$ определял, переводит ли он в процессе функционирования конфигурацию, имеющую одну ячейку в ненулевом состоянии, в тождественно нулевую конфигурацию.*

Доказательство. Сведем эту проблему к неразрешимой проблеме переводимости пустой ленты в пустую для машин Тьюринга. Будем считать, что состояниями σ являются пары, первая компонента которых кодирует ситуацию наличия или отсутствия головки в клетке и ее состояние, а вторая кодирует состояние ленты. Определим локальную функцию переходов так, чтобы она задавала функционирование машины Тьюринга. Переопределим значение локальной функции переходов на наборе, соответствующем наличию головки в ячейке в конечном состоянии, стоящей над пустой клеткой ленты, на ноль. Искомое сведение получено.

Доказательство теоремы 2. Сведем проблему обратимости для клеточного автомата из класса $CAV^+(2, 2)$ к проблеме переводимости для КА.

Расположим конфигурации, возникающие в процессе функционирования КА σ_1 из леммы 4, одну над другой в строчки двумерной таблицы. Заметим, что каждый элемент (i, j) таблицы может быть вычислен по элементам $(i - 1, j + 1)$, $(i, j + 1)$, $(i + 1, j + 1)$. Рассмотрим ограничение по длине и высоте такой таблицы. Если КА σ_1 переводит единичную конфигурацию в нулевую, то существует конечная прямоугольная таблица τ для этого вычисления, у которой на боковых и нижней стороне находятся клетки с нулевыми значениями. Заметим, что если τ существует, то все таблицы, содержащие τ , тоже будут содержать нули на границе (кроме единственной клетки на первой строчке с единицей).

Будем рассматривать строчки в таких таблицах как состояния некоторого КА. В соседних строчках будем размещать состояния, одно из которых получается из другого в процессе функционирования. Тогда проблему существования конечной таблицы можно выразить в терминах существования конфигурации $g \in E_{n_1}^{\mathbb{Z}^2}$, удовлетворяющей некоторому ЛО F_τ . Действительно, для этого достаточно включить в F_τ те и только те конфигурации, для которых состояние ячейки равно значению локальной функции переходов σ_1 на наборе из трех значений ее верхних соседних ячеек.

Пусть $\vec{F}$ — ориентирующее локальное ограничение из леммы 2 на пространстве $E_{13}^{\mathbb{Z}^2}$. Рассмотрим двойное пространство состояний $(E_{n_1} \times E_{13})^{\mathbb{Z}^2}$, и ориентирующее ЛО $\vec{F}_\tau = (F'_0, F'_{\nearrow}, F'_\downarrow, F'_{\nwarrow}, F'_\uparrow)$ на нем такое, что пара $(f_1, f_2) \in F'_\kappa$, $\kappa \in \{\nearrow, \downarrow, \nwarrow, \uparrow\}$ тогда и только тогда, когда $f_1 \in F$, $f_2 \in F_\kappa$, а F'_0 содержит пары $(0, f_1)$, $f_1 \in F$.

Заметим, что для ЛО $\vec{F}_\tau$ выполняются все свойства из леммы 2, и, кроме того, проблема распознавания существования V -связной конфигурации, удовлетворяющей $\vec{F}_\tau$, является неразрешимой.

Закодируем значения состояний ячеек $E_{n_1} \times E_{13}$ с помощью бинарного кода, обладающего следующими свойствами.

1. Все слова в коде имеют одинаковую длину s .
2. Существует алгоритм для выделения из любого подслова кода всех кодовых слов, входящих в него целиком.
3. Существует алгоритм для проверки, может ли данное слово длины большей s являться подсловом некоторого кода.

Существование такого кода следует из результатов, приводимых в книге [4]. Рассмотрим локальное ограничение $\vec{F}_\tau^* = (F_0^*, F_{\nearrow}^*, F_{\downarrow}^*, F_{\nwarrow}^*, F_{\uparrow}^*)$ на бинарные состояния, заданное на T -шаблоне диаметра $3s$, построенное по ЛО $\vec{F}_\tau$ таким образом, что ему удовлетворяют только конфигурации, представляющие собой закодированные конфигурации, удовлетворяющие $\vec{F}_\tau$, и если ячейка лежит на кодовом слове, не закодированная окрестность которого принадлежит F'_κ , $\kappa \in \{0, \nearrow, \downarrow, \nwarrow, \uparrow\}$, то состояние окрестности самой ячейки принадлежит F_κ^* .

Построим по ЛО $\vec{F}_\tau^*$ бинарный линейный КАПС $\mu_{\vec{F}_\tau^*}$. В силу леммы 3 $\mu_{\vec{F}_\tau^*}$ обратим тогда и только тогда, когда σ_1 проблема переводимости имеет отрицательный ответ. В силу конструктивности построений, получаем, что свойство обратимости для КАПС вида $\mu_{\vec{F}_\tau^*}$ неразрешимо, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим клеточный автомат σ из класса, построенного при доказательстве теоремы 2. Покажем, что клеточный автомат $\sigma \otimes \sigma_I$ обратим тогда и только тогда, когда обратим σ .

Множество состояний внешнего произведения $\sigma \otimes \sigma_I$ представляет собой множество троек (x_1, y_1, y_2) , $x_1, y_1, y_2 \in E_2$, где x_1 — активное состояние σ , а y_1 — основание σ .

Предположим, что КА σ необратим. Следовательно, у него существует неконструируемая конфигурация f . Нетрудно видеть, что конфигурация $(f, 0)$ КА $\sigma \otimes \sigma_I$, у которой первые две компоненты состояния совпадают с f , а третья компонента тождественно нулевая, является неконструируемой конфигурацией КА $\sigma \otimes \sigma_I$.

Предположим, что КА σ обратим. Допустим, что у $\sigma \otimes \sigma_I$ есть конфигурация f с более чем одним прообразом. Из построения КА $\sigma \otimes \sigma_I$ следует, что для определения значений активных состояний ограничения прообраза этой конфигурации на некоторый блок может быть выписана система уравнений вида (4). Следовательно, проекция конфигурации f на первые две компоненты состояний ячеек будет конфигурацией КА σ с более чем одним прообразом, что противоречит обратимости σ , то есть из обратимости σ вытекает обратимость $\sigma \otimes \sigma_I$. Доказательство закончено.

5. Клеточные автоматы с Γ -шаблоном соседства

По аналогии с утверждением теоремы 1 можно выдвинуть гипотезу, что свойство обратимости разрешимо во всех классах КА с полуплоскостными шаблонами и фиксированным числом состояний ячейки. Как оказалось, эта гипотеза неверна уже в простейшем случае Γ -шаблона.

Пусть заданы два клеточных автомата, действующих на одном и том же множестве состояний $E_n^{\mathbb{Z}^k}$. Для них можно определить операцию композиции, индуцируемую операцией композиции их основных функций переходов. Далее потребуется один частный случай такой композиции, при котором свойство обратимости сохраняется.

Рассмотрим клеточный автомат σ_v , который сдвигает свое состояние на вектор $v \in \mathbb{Z}^k$. Формально $\sigma_v = (\mathbb{Z}^k, E_n, V_1, \varphi_1)$, где $V_1 = (v)$, $\varphi_1(\alpha_0, \alpha_1) = \alpha_1$. Пусть задан КА $\sigma = (\mathbb{Z}^k, E_n, V, \varphi)$ и $v \in V = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, $v = v_i$. Тогда композиция $\sigma_v \circ \sigma$ — клеточный автомат $\sigma' = (\mathbb{Z}^k, E_n, V', \varphi')$, где $V' = (-v, v_1 - v, v_2 - v, \dots, v_{i-1} - v, v_{i+1} - v, \dots, v_m)$ и $\varphi'(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m) = \varphi(\alpha_i, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m)$.

Заметим, что число векторов в шаблоне соседства при этом остается прежним и окрестность ячейки получившегося КА отличается от окрестности ячейки исходного КА сдвигом на вектор v . Операцию композиции КА $\sigma = (\mathbb{Z}^k, E_n, V, \varphi)$ с клеточным автоматом σ_v , $v \in V$, будем называть собственным сдвигом окрестности ячейки.

Лемма 5. *Свойство обратимости клеточных автоматов инвариантно относительно операции собственного сдвига окрестности ячейки.*

Доказательство. По теореме Мура–Майхилла свойство обратимости для клеточного автомата эквивалентно сюръективности его основной функции переходов. Как нетрудно видеть, основная функция переходов КА σ_v является биекцией. Следовательно, композиция КА σ и σ_v обратима тогда и только тогда, когда σ обратим.

Введем еще одну операцию, которая позволяет строить новые обратимые КА. Рассмотрим ее в случае двумерного пространства ячеек.

Пусть заданы два вектора $w, d \in \mathbb{Z}^2$ такие, что любая ячейка $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ может быть представлена их целочисленной комбинацией $\alpha = \alpha_w w + \alpha_d d$, $\alpha_w, \alpha_d \in \mathbb{Z}$. Разобьем $\mathbb{Z}^2$

на пары ячеек (α, β) такие, что $\alpha_d = \beta_d$, $\alpha_w = 2n$, $\beta_w = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим функцию $p: (\mathbb{Z}^2)^2 \mapsto \mathbb{Z}^2$, которая паре ячеек (α, β) ставит в соответствие ячейку $nw + \alpha_d d$.

По данному КА $\sigma = (\mathbb{Z}^2, E_n, V, \varphi)$ определим клеточный автомат σ' , который получается склейкой двух ячеек КА σ с помощью функции p . Формально он описывается четверкой $\sigma' = (\mathbb{Z}^2, (E_n)^2, V', (\varphi_1, \varphi_2))$, где $(E_n)^2 = (c_1, c_2)$, $c_1, c_2 \in E_n$, c_1 соответствует состоянию ячейки α , c_2 — состоянию β , V' — шаблон соседства, соответствующий окрестности ячейки 0, полученной проекцией p объединения множеств $V(0)$ и $V(0) + w$, функции φ_1 и φ_2 существенно зависят от значений первой и второй компонент пар (c_1, c_2) соответственно и получаются из φ добавлением несущественных переменных так, чтобы функционирование ячейки $aw + bd$ соответствовало функционированию пары $(2aw + bd, (2a + 1)w + bd)$.

Операцию построения по паре векторов w, d и клеточному автомату σ нового КА σ' указанным выше способом будем называть операцией (w, d) -группировки ячеек.

Лемма 6. *Свойство обратимости клеточных автоматов инвариантно относительно операции (w, d) -группировки ячеек.*

Доказательство. Рассмотрим отображение Π , которое ставит в соответствие состоянию клеточного автомата σ состояние КА σ' . Нетрудно видеть, что Π является биекцией множеств конфигураций КА σ и σ' , причем $\Pi^{-1}\Phi'\Pi(c) = \Phi(c)$, где Φ и Φ' — основные функции переходов σ и σ' , c — конфигурация σ . Следовательно, обратимость клеточного автомата σ эквивалентна обратимости σ' .

Для заданного шаблона соседства V рассмотрим множество векторов вида $\hat{V} = \{n_1 v_1 + n_2 v_2 + \dots + n_m v_m \mid v_i \in V, n_i \in \mathbb{N}, i \in 1, \dots, m\}$. Пусть это множество инвариантно относительно действия невырожденного линейного оператора $A: \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^k$. Определим по КА $\sigma = (\mathbb{Z}^k, E_n, V, \varphi)$ новый клеточный автомат $\sigma_A = (\mathbb{Z}^k, E_n, A(V), \varphi)$. Назовем операцию подобного порождения клеточных автоматов операцией целочисленной деформации. Так же, как и лемма 5, доказывается следующее утверждение.

Лемма 7. *Свойство обратимости клеточных автоматов инвариантно относительно операции целочисленной деформации.*

Доказательство теоремы 4. Для доказательства теоремы 4 достаточно к клеточному автомату из класса $\text{CAV}^\perp(2, 2)$ сначала применить лемму 5 (перенести ячейку вверх по окрестности на единицу, число состояний от этого не изменится), потом лемму 6 (склеить две вертикально расположенные ячейки, число состояний увеличится до 16) и результат деформировать в Γ -шаблон (лемма 7, число состояний не изменится). Теорема доказана.

6. Бинарные КА с локальной функцией переходов из класса Поста

При изучении процесса функционирования клеточного автомата естественным образом возникает понятие информационного конуса [1], представляющего собой функцию зависимости состояния ячейки от начального состояния КА, проиндексированную моментами времени. Для фиксированного момента времени информационный конус является суперпозицией локальных функций перехода. Множество информационных конусов представляет собой некоторую логику, которая композиционно (и даже суперпозиционно) замкнута. Эта логика, итеративно развиваясь во времени, определяет логику поведения любого

фрагмента КА, а в пределе и всего КА. Тем самым логика ячейки выступает в качестве порождающего элемента для логики всего КА. В двузначном случае Постом описаны все замкнутые логики. Естественно рассмотреть расслоение всех клеточных автоматов на типы, соответствующие классам Поста, и явление обратимости изучать с точностью до указанного расслоения.

Для понятий, связанных с функциями алгебры логики, мы будем использовать терминологию, принятую в книге [3]. Доказательству фактов этого параграфа предположим одно важное замечание, существенно упрощающее изложение.

Пусть свойство обратимости разрешимо в классе $BCA(K)$. Тогда для любого класса K' , содержащегося в K , в классе $BCA(K')$ оно тоже разрешимо. Причем для распознавания обратимости в $BCA(K')$ можно использовать тот же алгоритм, что и в $BCA(K)$. Пусть теперь свойство обратимости не разрешимо в классе $BCA(K)$. Тогда оно не может быть разрешимо и в любом более богатом классе $BCA(K')$, $K \subseteq K'$.

Из вышесказанного следует, что для описания всех случаев достаточно указать наиболее богатые разрешимые и наиболее бедные неразрешимые классы.

Далее нам потребуется несколько простых фактов об обратимых бинарных клеточных автоматах. Для полноты изложения приведем их с доказательствами.

Предложение 1. Если КА $\sigma = (\mathbf{Z}^k, E_2, V, \varphi)$ обратим, то число наборов, на которых функция φ принимает значение 1, совпадает с числом наборов, на которых φ принимает значение 0.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.1.3 из [1], которая, как нетрудно убедиться, допускает следующую переформулировку в терминах обратимых КА.

Теорема 7 ([1]). Клеточный автомат σ является обратимым тогда и только тогда, когда для любой конфигурации f любого ее блока B число конфигураций g блока $V(B)$, удовлетворяющих соотношению $\Phi|_B(g) = f$, равно $n^{|V(B) \setminus B|}$, где $|V(B) \setminus B|$ — число ячеек блока $V(B) \setminus B$.

Рассмотрим блок, состоящий из одной ячейки α . В соответствии с утверждением теоремы получаем, что число прообразов конфигурации $f(\alpha) = 1$ совпадает с числом прообразов конфигурации $f(\alpha) = 0$, откуда следует справедливость утверждения.

Предложение 2. Если КА $\sigma = (\mathbf{Z}^k, E_2, V, \varphi)$ обратим, то существует набор $\bar{\alpha}$, в котором только одна компонента равна единице, такой, что $\varphi(\bar{\alpha}) = 1$.

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим конфигурацию f , содержащую ровно одну ячейку в состоянии 1. Заметим, что $\sigma(\bar{0}) = \sigma(f) \equiv 0$, где $\bar{0}$ — тождественно равная нулю конфигурация. Следовательно, КА σ не является обратимым.

Предложение 3. Если КА $\sigma = (\mathbf{Z}^k, E_2, V, \varphi)$ обратим и $\varphi(1, \dots, 1) = 1$, то КА $\sigma^* = (\mathbf{Z}^k, E_2, V, \varphi^*)$, где функция φ^* двойственна к φ , также является обратимым.

Доказательство. В силу условия $\varphi^*(0, \dots, 0) = 0$, то есть четверка $(\mathbf{Z}^k, E_2, V, \varphi^*)$ действительно является клеточным автоматом. В соответствии с теоремой Мура–Майхилла [1], клеточный автомат является обратимым тогда и только тогда, когда его глобальная функция переходов Φ сюръективна.

Рассмотрим биективное отображение множества состояний $\iota: E_2^k \mapsto E_2^k$, определяемое соотношением $\iota(f)(\alpha) = f(\alpha) + 1 \pmod{2}$. Как нетрудно видеть, глобальная функция переходов Φ^* КА σ^* допускает представление $\Phi^* = \iota \Phi \iota$, то есть из сюръективности функции Φ вытекает сюръективность Φ^* и обратимость КА σ^* .

Рис. 3. Распределение обратимых КА по классам Поста

Предложение 4. Если КА $\sigma = (\mathbf{Z}^k, E_2, V, \varphi)$ обратим и $\varphi(1, \dots, 1) = 1$, то существует набор $\bar{\alpha}$, в котором только одна компонента равна нулю, такой, что $\varphi(\bar{\alpha}) = 0$.

Доказательство. Справедливость этого предложения устанавливается применением предложения 2 к КА σ^* из предложения 3.

Лемма 8. Клеточный автомат с локальной функцией переходов φ , принадлежащей одному из классов Поста A_1 , F_4^2 , F_8^2 , является обратимым тогда и только тогда, когда функция $\varphi \in O_1$.

Доказательство. Пусть КА σ обратим, φ принадлежит классу монотонных функций A_1 . В силу предложения 2 найдется набор $\bar{\alpha}$ с одной единичной компонентой такой, что $\varphi(\bar{\alpha}) = 1$. В силу монотонности для любого набора $\bar{\alpha}' \geq \bar{\alpha}$ справедливо равенство $\varphi(\bar{\alpha}') = 1$. Заметим, что число таких наборов составляет ровно половину числа всех наборов. В силу предложения 1 получаем, что для наборов $\bar{\alpha}'' \not\geq \bar{\alpha}$ $\varphi(\bar{\alpha}'') = 0$, то есть функция $\varphi(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \equiv \alpha_i$, где i — номер позиции, на которой в наборе $\bar{\alpha}$ стоит единица.

Рассмотрим случай $\varphi \in F_4^2$, в котором любые два набора, на которых функция φ обращается в 0, имеют общую нулевую компоненту. По определению класса F_4^2 , $\varphi(1, 1, \dots, 1) = 1$. В силу предложения 4 найдется набор $\bar{\alpha}$, имеющий ровно один нуль (на позиции с номером i), такой, что $\varphi(\bar{\alpha}) = 0$. Заметим, что больше одного такого набора существовать не может (иначе бы они имели общий 0, что противоречиво). В силу того, что $\varphi \in F_4^2$, множество ее нулей содержится в множестве наборов, i -я компонента которых равна 0. Из предложения 1 следует, что эти множества совпадают, то есть $\varphi(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \equiv \alpha_i$.

Пусть теперь $\varphi \in F_8^2$ (любые два набора, на которых функция φ обращается в 1, имеют общую единичную компоненту). В силу предложения 2 найдется набор $\bar{\alpha}$, имеющий ровно одну единицу (на позиции с номером i), такой, что $\varphi(\bar{\alpha}) = 1$, причем, по определению класса F_8^2 , такой набор только один. В силу того, что $\varphi \in F_8^2$, множество ее нулей содержится в множестве наборов, i -я компонента которых равна 1. Из предложения 1 следует, что эти множества совпадают, то есть $\varphi(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \equiv \alpha_i$. Лемма доказана.

Далее нам понадобится свойство, характерное для бинарных клеточных автоматов с линейной функцией перехода. Речь идет о том, что множество ненулевых конфигураций у них инвариантно относительно действия основной функции переходов [1]. Заметим, что ненулевое состояние, не являющееся конфигурацией, может являться прообразом тождественно нулевой конфигурации.

Лемма 9. Если локальная функция переходов φ бинарного клеточного автомата σ является линейной и не тождественно нулевой, то прообразом тождественно нулевой конфигурации является только тождественно нулевая конфигурация.

Доказательство. По условию $\varphi \neq 0$. Если φ существенно зависит не более чем от одной переменной, то утверждение леммы, очевидно, выполнено.

Пусть φ существенно зависит как минимум от двух переменных. Удалим из шаблона соседства все векторы, относящиеся к несущественным переменным, и исключим эти переменные из φ . Выберем в полученном шаблоне соседства вектор максимальной длины w . Без ограничения общности будем считать, что $w = v_1$. Введем отношение эквивалентности на множестве всех ячеек: будем считать, что $\alpha_1 \sim \alpha_2$, если координаты ортогональных проекций α_1 и α_2 на прямую $L = \{wx \mid x \in \mathbf{R}\}$ совпадают. Множество $\mathbf{Z}^k$ распадается на

классы эквивалентности, причем их число будет счетным, так как множество $\mathbf{Z}^k$ счетно. Построим соответствие между полученным множеством классов и множеством целых чисел, причем классу, содержащему ячейку $0 \in \mathbf{Z}^k$ присвоим номер 0, а остальные классы пронумеруем в порядке возрастания координаты проекции их элементов на L . Далее номером ячейки будем называть номер класса, к которому она принадлежит.

Предположим, что бинарный клеточный автомат σ переводит некоторую конфигурацию f в тождественно нулевую. Множество A ячеек α , для которых $f(\alpha) \neq 0$, не пусто и конечно. Пусть α' — ячейка с наименьшим номером в множестве A . Тогда для ячейки $\alpha'' = \alpha' - v_1$ выполняется равенство $\varphi(f(\alpha''), f(\alpha'' + v_1), f(\alpha'' + v_2), \dots, f(\alpha'' + v_m)) = \varphi(0, 1, 0, \dots, 0) = 1$, что противоречит тому, что конфигурация f переводится в тождественно нулевую. Доказательство закончено.

Лемма 10. *Любой клеточный автомат $\sigma = (\mathbf{Z}^k, E_2, V, \varphi)$ с локальной функцией переходов φ , принадлежащей множеству $L_1 \setminus O_3$, является обратимым.*

Доказательство. Определим операцию суммирования на множестве состояний клеточного автомата. Обозначим через $\oplus$ отображение $E_2^{\mathbf{Z}^k} \times E_2^{\mathbf{Z}^k} \mapsto E_2^{\mathbf{Z}^k}$, результат применения которого к $f_1, f_2 \in E_2^{\mathbf{Z}^k}$ равен $\oplus(f_1, f_2)(\alpha) = f_1(\alpha) + f_2(\alpha) \pmod{2}$. В рассматриваемом классе клеточных автоматов справедливо равенство $\oplus(\sigma(f_1), \sigma(f_2)) = \sigma(\oplus(f_1, f_2))$. Допустим, что КА σ необратим. Тогда существуют две различные конфигурации f_1 и f_2 такие, что $\sigma(f_1) \equiv \sigma(f_2)$. Обозначим f_3 конфигурацию $\oplus(f_1, f_2)$. Как нетрудно видеть, конфигурация f_3 отлична от нулевой и $\sigma(f_3) \equiv 0$. Но наличие такой конфигурации противоречит лемме 9. Из полученного противоречия следует отсутствие конфигураций с не единственным прообразом у σ , что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 5. Из результатов Поста [3] следует, что любой замкнутый класс булевых функций либо содержит класс линейных самодвойственных функций, либо он содержится в одном из классов M , F_4^2 , F_8^2 (см. рис. 3). Таким образом, утверждение теоремы следует из лемм 8 и 10.

Лемма 11. *Свойство обратимости неразрешимо в классе $\text{BCA}(D_1)$.*

Доказательство. Смоделируем в смысле [1] внешнюю композицию из теоремы 2 так, чтобы ни для одного из моделирующих наборов не получилось так, что его инверсия — тоже моделирующий набор. Потом доопределим локальную функцию переходов так, чтобы на двойственных наборах она была двойственной. Получим, что на двойственных наборах будет моделироваться КА, двойственный к исходному. Нетрудно убедиться, что он обладает теми же свойствами, что и исходный. На наборах же, не являющихся частями моделирующих конфигураций, определим локальную функцию переходов как сохраняющую состояния ячейки. Полученная локальная функция переходов будет самодвойственной. Фактически, построенный КА будет представлять собой внешнюю композицию из теоремы 3, из чего следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 6. В соответствии с теоремой 5, классы с неразрешимым свойством обратимости обязаны содержать множество $\text{BCA}(L_4)$. По лемме 10 во всех линейных классах свойство обратимости разрешимо. Из результатов Поста следует, что не охваченными оказались только классы, содержащие $\text{BCA}(D_1)$ (см. рис. 3). Но из леммы 11 вытекает, что в них свойство обратимости неразрешимо. Доказательство закончено.

7. Заключение

В работе доказана неразрешимость обратимости в классе $CAV^{\perp}(2, 2)$. Заметим, что из этого случая следует неразрешимость во всех классах, содержащих бесконечное число не полуплоскостных шаблонов, в каждом из которых можно выделить множество векторов, концы которых образуют дискретный отрезок с возрастающей длиной. Можно показать, что в некотором смысле почти любой класс двумерных КА является именно таким. Также из полученного результата следует неразрешимость в классах с числом элементов основания, большим двух.

При исследовании КАПС затрагивался только бинарный линейный случай. Однако, справедливость утверждений работы сохраняется и в многозначном случае. Для того чтобы можно было оперировать с линейными функциями, надо зафиксировать некоторое кольцо с конечным числом элементов. В случае, когда это кольцо будет полем (как рассмотренное $\mathbb{Z}_2$), доказательство результатов работы переносится с точностью до обозначений. Если же в кольце имеются нетривиальные делители нуля, то алгоритм для распознавания обратимости несколько усложняется, неразрешимый же случай остается без изменений.

Также хочется обратить внимание на технику, примененную для класса $CA^{\Gamma}(16)$. С помощью несложной, но довольно громоздкой ее модификации можно получить доказательство неразрешимости в классах $CA^{\Gamma}(4(3 + s))$, $s \in \mathbb{N}$. Идея этой модификации заключается в определении еще одного варианта внешнего произведения для моделирующего класса, позволяющего аддитивно добавлять состояния к первой компоненте пары состояний. Однако в рамках предложенного подхода не удалось доказать неразрешимость обратимости для класса $CA^{\Gamma}(17)$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю В. Б. Кудрявцеву, без помощи и поддержки которого результаты, составляющие содержание данной работы, не были бы получены автором.

Список литературы

1. Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Болотов А. А., *Основы теории однородных структур*. Наука, Москва, 1990.
2. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
3. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., *Функции алгебры логики и классы Поста*. Наука, Москва, 1966.
4. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Высшая школа, Москва, 2002.
5. Кучеренко И. В., О числе обратимых однородных структур. *Дискретная математика* (2003) **15**, №2, 123–127.
6. Кучеренко И. В., О свойстве обратимости бинарных клеточных автоматов. В сб.: *Труды XXVI Конференции молодых ученых*. Механико-матем. ф-т МГУ, Москва, 2004, с. 155–158.
7. Кучеренко И. В., О разрешимости обратимости клеточных автоматов. *Интеллектуальные системы* (2003) **8**, №1–4, 465–482.
8. Amoroso S., Patt Y. N., Decision procedures for surjectivity and injectivity of parallel maps for tessellation structures. *J. Computer and System Sci.* (1972) **6**, №5, 448–464.
9. Kari J., Reversibility of 2D cellular automata is undecidable. *Physica D* (1994) **45**, 379–385.

10. Toffoli T., Computation and construction universality of reversible cellular automata. *J. Computer and System Sci.* (1977) **15**, №2, 213–231.
11. Sutner K., Linear cellular automata and de Bruijn automata. In: *Cellular automata: a parallel model* (Delorme M., Mazoyer J., eds.). Kluwer, Dordrecht, 1998, pp. 303–319.
12. Durand B., Inversion of 2D cellular automata: some complexity results.. *Theoretical Computer Sci.* (1994) **134**, №2, 387–401.

Статья поступила 22.11.2005.