Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Джозефи, Л. Кимболл, В. Р. Стебловская, А. В. Нагаев, М. Пасниевский,
Алгоритмический подход к несамофинансируемому хеджированию на неполном
рынке в дискретном времени, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 3, 140–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm971>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:57:52

Алгоритмический подход к несамофинансируемому хеджированию на неполном рынке в дискретном времени

© 2007 г. Н. Джозефи, Л. Кимболл, В. Стебловская,
А. В. Нагаев, М. Пасниевский

Мы представляем алгоритм, генерирующий динамическую несофинансируемую стратегию хеджирования на неполном рынке, соответствующую критерию, связанному с инвестором. Оптимизация представляет собой двухшаговый процесс, который сначала определяет допустимые параметры модели, отвечающие рыночной цене хеджируемого опциона. На втором шаге используются различные функции качества для бутстрэп-выборки остатков модели, чтобы из допустимого множества параметров модели выбрать оптимальные значения. Результаты представлены для опционов, которые продаются на Нью-Йоркской фондовой бирже.

Работа поддержана Исследовательским грантом Bentley College Enterprise Risk Management.

1. Введение

Формирование цен и хеджирование финансовых активов на неполном рынке является очень популярной темой исследований в финансовой математике. Один из возможных способов формулировки модели неполного рынка в постановке с дискретным временем состоит в предположении о том, что относительные изменения (скачки) курса акции могут принимать более двух значений, в отличие от классической биномиальной модели Кокса–Росса–Рубинштейна. В работах [1], [2] и [3] изучался неполный рынок, на котором скачки курса акции имели мультиномиальное распределение. В работе [1] изучался интервал безарбитражных цен опциона, а в [2] [3] обсуждаются вопросы минимизации риска при формировании цен и хеджировании.

Мультиномиальная модель была затем обобщена на случай, когда скачки курса акции имеют распределение, сосредоточенное на конечном интервале, а рассматриваемый опцион имеет выпуклую платежную функцию. В [4] были получены верхние и нижние границы безарбитражных цен европейского платежного обязательства, которое имеет выпуклые выплаты. Серия работ А. В. Нагаева с соавторами (см. [5], [6], [7]) посвящена асимптотическому поведению остатков для суперхеджа с минимальными затратами. Остатки возникают, как результат применения несофинансируемой динамической стратегии хеджирования продавца опциона. Эта стратегия была введена и обсуждалась в [5].

Существенная часть исследований по формированию цен и хеджированию опционов на неполных рынках посвящена конструированию самофинансируемых стратегий

торговли, которые удовлетворяют, во-первых, условию безарбитражности, а во-вторых, условиям на норму прибыли и риски портфеля. Набор статей, имеющих дело с трением на рынке, риском дефицита и квадратичным хеджированием (каждое из которых приводит к неполноте рынка), можно найти в опубликованном некоторое время назад сборнике [8].

Менее распространенным является исследование несомофинансируемых стратегий торговли в тех же самых экономических обстоятельствах. Энциклопедическая монография [9], а также работа [10] проливают свет на формирование цен финансовых активов при наличии потребления: модель, которая аналогична исследуемой в данной работе. Мы предпринимаем начальную попытку алгоритмического исследования несомофинансируемых стратегий, описанных в [5]. При этом исследуется поведение на небольших интервалах времени остаточных значений, соответствующих динамической несомофинансируемой стратегии, долгосрочное поведение которых изучалось А. В. Нагаевым с соавторами.

В предположении, что скачки изучаемого процесса курса акции независимы и имеют одинаковое распределение, мы используем как реальные данные, так и процесс бутстрэп-симуляций для создания алгоритма построения динамической несомофинансируемой хеджирующей стратегии. Полученная стратегия хеджирования приводит к последовательности остатков с улучшенным критерием риска инвестора по сравнению с другими возможными стратегиями хеджирования. На изучаемый процесс скачков курса акции не накладывается никаких дополнительных предположений, кроме предположения о том, что соответствующие распределения имеют ограниченный носитель. Алгоритмический подход, аналогичный использованию нами бутстрэп-симуляций, но с другим теоретическим обоснованием и другими целями, изложен в [11].

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. В разделе 2 формулируется финансовая модель в дискретном времени. В разделе 3 излагается понятие остаточных значений стратегии суперхеджирования с минимальными затратами. В разделе 4 обсуждаются несомофинансируемые хеджирующие стратегии и порожденные ими последовательности остатков. В разделе 5 дается описание алгоритма. Применение алгоритма и иллюстративные результаты представлены в разделе 6. Результаты по оценке качества алгоритма описываются в разделе 7. Наконец, в разделе 8 приводятся некоторые замечания, а в разделе 9 указываются направления возможных дальнейших исследований.

2. Финансовая модель в дискретном времени и интервал безарбитражных цен

Следуя теории, разработанной в [5], мы рассматриваем финансовую модель в дискретном времени, которая состоит из следующих двух основных активов и производной ценной бумаги.

- (1) Безрисковая облигация с фиксированной процентной ставкой r , цена которой изменяется от начального значения $b_0 > 0$ в момент времени $t = 0$ до значения b_k в момент времени $t = k$ следующим образом:

$$b_k = b_0(1 + r)^k.$$

- (2) Рискованная акция, цена которой изменяется от начального значения s_0 в момент времени $t = 0$ до значения s_k в момент времени $t = k$ следующим образом:

$$s_k = s_0 \xi_1 \xi_2 \dots \xi_k.$$

При этом предполагается, что $\xi_k = s_k/s_{k-1}$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, а носитель этого распределения является ограниченным интервалом $[D, U]$. Никаких других предположений о распределении величин ξ_k не делается.

- (3) Производная ценная бумага (европейский опцион) с выпуклой платежной функцией f .

Заметим, что для безарбитражности этого рынка необходимо выполнение условия

$$D < 1 + r < U. \quad (1)$$

Указанный рынок в дискретном времени является неполным. Неполнота рынка проявляется в том, что существует открытый интервал $(\underline{x}_k, \bar{X}_k)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, безарбитражных цен опциона. Можно показать (см., например, [4] и [5]), что конечные точки интервала задаются следующими формулами:

$$\bar{X}_k(U, D) = g_k(U, D, s_k), \quad (2)$$

$$\underline{x}_k(U, D) = (1 + r)^{-(n-k)} f(s_k(1 + r)^{n-k}), \quad (3)$$

где f — выпуклая платежная функция опциона, n — число периодов до момента исполнения опциона, s_k — цена акции в момент k , а g_k определяются следующим образом:

$$g_k(U, D, s) = (1 + r)^{-(n-k)} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (p(U, D))^j (1 - p(U, D))^{n-k-j} f(sU^j D^{n-k-j}), \quad (4)$$

$$p(U, D) = (1 + r - D)/(U - D), \quad (5)$$

здесь $\binom{n-k}{j}$ — биномиальный коэффициент.

Для продавца опциона верхняя граница $\bar{X}_k(U, D)$ является границей между областью, в которой риск распределяется между продавцом и покупателем опциона (если цена продажи опциона меньше, чем $\bar{X}_k(U, D)$), и областью с потенциальным доходом от арбитража (если цена продажи опциона равна или больше, чем $\bar{X}_k(U, D)$).

3. Остатки при минимальных затратах на суперхеджирование

Примем теперь точку зрения продавца опциона, который хочет хеджировать потенциальные обязательства при исполнении проданного опциона. Предположим, что опцион с выпуклой платежной функцией f продан в момент $k = 0$ по цене $\bar{X}_0(U, D)$, равной верхней границе интервала безарбитражных цен. Продавец опциона использует сумму $\bar{X}_0(U, D)$ для покупки портфеля, состоящего из γ_0 акций и β_0 облигаций с тем, чтобы хеджировать короткую позицию опциона. В каждый момент времени $t = k$, $k = 1, \dots, n-1$, продавец перераспределяет содержание портфеля, формируя свою динамическую стратегию продаж (γ_k, β_k) , $k = 0, 1, \dots, n-1$.

А. В. Нагаев в [5] показал (основываясь на аргументах выпуклости), что если величины γ_k и β_k выбраны в соответствии с формулами

$$\gamma_k(U, D) = \frac{g_{k+1}(U, D, s_k U) - g_{k+1}(U, D, s_k D)}{s_k(U - D)}, \quad (6)$$

$$\beta_k(U, D) = \frac{Ug_{k+1}(U, D, s_k D) - Dg_{k+1}(U, D, s_k U)}{(1 + r)b_k(U - D)}, \quad (7)$$

где g_k определено в (4), то динамическая стратегия торговли (γ_k, β_k) , $k = 0, \dots, n - 1$, является суперхеджирующей стратегией с минимальными затратами, а стоимость соответствующего ей портфеля в каждый момент времени $t = k$ не меньше, чем стоимость опциона в этот момент. Последнее утверждение стоит обсудить более детально.

Предположим, что в каждый момент времени k продавец опциона ликвидирует портфель, сконструированный в предыдущем периоде $[k - 1, k)$, и использует выручку для конструкции нового портфеля на текущий период $[k, k + 1)$. Как следует из формул (6), (7), стоимость ликвидации портфеля из предыдущего периода задается формулой

$$\begin{aligned} v_k(U, D) &= \gamma_{k-1}(U, D)s_k + \beta_{k-1}(U, D)b_k \\ &= \frac{U - \xi_k}{U - D}g_k(U, D, s_{k-1}D) + \frac{\xi_k - D}{U - D}g_k(U, D, s_{k-1}U). \end{aligned} \quad (8)$$

С другой стороны, средства необходимые для покупки нового формируемого портфеля, или затраты на поддержание, задаются формулой

$$\bar{X}_k(U, D) = g_k(U, D, s_{k-1}\xi_k). \quad (9)$$

Разность между ценой ликвидации (8) и затратами на поддержание (9) равна остаточному значению δ_k , задаваемому формулой

$$\delta_k(U, D) = \frac{U - \xi_k}{U - D}g_k(U, D, s_{k-1}D) + \frac{\xi_k - D}{U - D}g_k(U, D, s_{k-1}U) - g_k(U, D, s_{k-1}\xi_k). \quad (10)$$

Поскольку мы предположили, что $D \leq \xi_k \leq U$, из выпуклости платежной функции f следует, что остатки неотрицательны:

$$\delta_k(U, D) \geq 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (11)$$

При таком поведении каждой реализации процесса курса акций $\{s_k\}$ соответствует реализация последовательности неотрицательных остатков $\{\delta_k(U, D)\}$, которые изымаются после каждой ликвидации портфеля перед формированием суперхеджа на следующий период времени. Аккумулированное значение изъятых остатков на момент исполнения опциона, которое мы называем остатком при суперхеджировании с минимальными затратами, задается формулой

$$\Delta_n(U, D) = \delta_1(U, D)(1 + r)^{n-1} + \delta_2(U, D)(1 + r)^{n-2} + \dots + \delta_n(U, D). \quad (12)$$

4. Несамофинансируемые хеджирующие стратегии и их остатки

Начнем этот раздел с конструирования величин $\bar{x}_k(u, d)$, задаваемых формулами

$$\bar{x}_k(u, d) = g_k(u, d, s_k), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (13)$$

где g_k определено в (4), s_k — курс акции в момент k , а u и d — такая пара чисел, что

$$D \leq d \leq 1 + r \leq u \leq U. \quad (14)$$

Следующее предложение доказывается непосредственно.

Предложение 1. Пусть f — выпуклая функция. Функция $\bar{x}_k(u, d)$ отображает множество пар (u, d) , удовлетворяющих неравенствам (14) на интервал цен $[\underline{x}_k(U, D), \bar{X}_k(U, D)]$, определенный равенствами (2) и (3). Если $(u, d) = (U, D)$, то $\bar{x}_k(u, d) = \bar{X}_k(U, D)$, а если $(u, d) = (1 + r, 1 + r)$, то $\bar{x}_k(u, d) = \underline{x}_k(U, D)$.

Из приведенного предложения вытекает, что при любом выборе чисел d и u , удовлетворяющих неравенствам

$$D < d < 1 + r < u < U \quad (15)$$

величины (13) попадают внутрь интервала безарбитражных цен

$$\underline{x}_k(U, D) < \bar{x}_k(u, d) < \bar{X}_k(U, D), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (16)$$

И наоборот, для каждой безарбитражной рыночной цены опциона существует хотя бы одна соответствующая пара (u, d) , удовлетворяющая неравенствам (15). Значение $\bar{x}_k(u, d)$ будем называть рациональной ценой опциона.

Предположим, что опцион с выпуклой платежной функцией f был продан в момент времени $k = 0$ по цене x_0 . Тогда средства x_0 отождествляются с рациональной ценой опциона $\bar{x}_0(u, d)$. Иными словами,

$$x_0 = \bar{x}_0(u, d). \quad (17)$$

Для любой пары (u, d) , удовлетворяющей неравенствам (17), продавец опциона использует средства x_0 в качестве начального значения для формирования динамической портфельной стратегии

$$(\gamma_k(u, d), \beta_k(u, d)), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (18)$$

где $\gamma_k(u, d)$ и $\beta_k(u, d)$ определяются соотношениями (6) и (7) соответственно, в которых параметры U, D , определяющие границы, заменены значениями u, d . Приведенной портфельной стратегии соответствует последовательность остатков

$$\delta_k(u, d), \quad k = 1, \dots, n, \quad (19)$$

где $\delta_k(u, d)$ определено соотношением (10), в котором U, D заменено на u, d . Непосредственно проверяется, что

- $\delta_k(u, d) > 0$, если $d < \xi_k < u$,
- $\delta_k(u, d) = 0$, если $\xi_k = d$ или $\xi_k = u$,
- $\delta_k(u, d) < 0$, если $D < \xi_k < d$ или $u < \xi_k < U$.

Для осуществления динамической портфельной стратегии, определенной в (18), инвестору в каждый момент времени $k = 1, \dots, n$ нужно либо изъять остаток (19) в процессе ликвидации портфеля в том случае, если $\delta_k(u, d) > 0$, либо добавить соответствующие

средства, если $\delta_k(u, d) < 0$. Локальные остатки $\delta_k(u, d)$ порождают аккумулированный остаток, определяемый по формуле

$$\Delta_n(u, d) = \delta_1(u, d)(1+r)^{n-1} + \delta_2(u, d)(1+r)^{n-2} + \dots + \delta_n(u, d). \quad (20)$$

Как следует из приведенной выше характеристики величин δ_k , аккумулированный остаток, определенный в (20), отличается от остатка при суперхеджировании с минимальными затратами, определенного в (12). А. В. Нагаев в [5, 6, 7] подробно исследовал асимптотические свойства остатка при суперхеджировании с минимальными затратами (12) (или безрискового дохода инвестора в его терминологии). В неопубликованной работе А. В. Нагаева эти результаты были обобщены на асимптотические свойства аккумулированного остатка (20). В данной работе исследуется краткосрочное поведение аккумулированного остатка и его роль при практическом построении хеджирующей стратегии в рассматриваемой модели.

Замечание 1. Мы хотим подчеркнуть, что динамическая портфельная стратегия, сконструированная в (18), вообще говоря, не является самофинансируемой. Кроме того, хотя стратегия осуществляет только приблизительное хеджирование короткой позиции опциона, тем не менее, для простоты, мы сохраняем за ней название хеджирующей стратегии.

При заданной рыночной цене опциона x_0 , теоретически, можно выбрать любую из бесконечного числа пар (u, d) , удовлетворяющих неравенствам (17). Однако инвестор, который будет осуществлять предложенную нами хеджирующую стратегию, захочет выбрать значения d и u таким образом, чтобы соответствующая последовательность остатков обладала дополнительными желаемыми характеристиками риска и нормы прибыли. Построение нашего алгоритма сводится к выбору значений параметров модели d и u , связанных с характеристиками риска и нормы прибыли соответствующей последовательности остатков.

В оставшейся части статьи предполагается, что платежная функция f опциона соответствует европейскому опциону покупки, то есть

$$f(s) = (s - K)_+, \quad (21)$$

где K — цена исполнения опциона. Кроме того, в наших расчетах мы будем использовать значение $r = 0$ для безрисковой процентной ставки. Последнее предположение оправдывается результатами наших численных экспериментов, подтверждающих, что реальные изменения значения r мало влияют на результаты для рассматриваемого в данной работе случая опционов с небольшим сроком исполнения.

5. Минимизация риска на (u, d) контурах

Предлагается двухшаговый алгоритм для выбора оптимальной пары (u, d) . На первом шаге производится редукция множества рассматриваемых пар (u, d) , обеспечивающая соответствие рыночному значению. На втором шаге из этого редуцированного множества выбирается пара (u, d) , которая оптимизирует одно из заданных связанных с инвестором статистических свойств последовательности остатков.

5.1. Контур соответствия рыночной цене

Первый шаг предлагаемой процедуры минимизации риска состоит в выборе множества таких пар (u, d) , которые согласуются с заданной рыночной ценой опциона.

Каждая пара (u, d) единственным образом определяет портфельную стратегию, которая зависит от реализаций процессов стоимостей акции и облигации. В начальный момент времени $t = 0$ портфельная стратегия, задаваемая парой (u, d) , определяет начальный портфель, состоящий из $\beta_0(u, d)$ облигаций и $\gamma_0(u, d)$ акций, где значения $\beta_0(u, d)$ и $\gamma_0(u, d)$ определены соотношениями (7) и (6) с $k = 0$, $U = u$ и $D = d$. В момент $t = 0$ затраты на поддержание этого начального портфеля равны

$$g_0(u, d, s_0) = (1 + r)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (p(u, d))^j (1 - p(u, d))^{n-j} (s_0 u^j d^{n-j} - K)_+, \quad (22)$$

где $p(u, d)$ задается соотношением (5), в котором вместо U, D подставлено u, d , а s_0 — это цена акции в момент $t = 0$. Чтобы получить соответствие выбранных пар (u, d) рыночной цене опциона, нужно положить затраты $g_0(u, d, s_0)$ равными рыночной цене x_0 опциона в момент $t = 0$, то есть положить

$$g_0(u, d, s_0) = x_0.$$

В то время как выбор пары (u, d) единственным образом определяет затраты на поддержание портфеля, выбор значения затрат на поддержание портфеля определяет лишь контур пар (u, d) , поскольку имеется много портфелей с одинаковыми затратами на поддержание. Этот контур состоит из множества

$$\Sigma = \{(u, d) : c_0(u, d) = c^*\}, \quad c^* = x_0/s_0, \quad (23)$$

где c_0 — поверхность нормированных значений (см. рис. 1)

$$c_0(u, d) = \frac{g_0(u, d, s_0)}{s_0} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (p(u, d))^j (1 - p(u, d))^{n-j} (u^j d^{n-j} - R)_+, \quad (24)$$

$$R = \frac{K}{s_0}.$$

Численно мы используем программу построения контура для подсчета конечного числа пар (u, d) , удовлетворяющих соотношению (23). Именно это множество пар используется на втором шаге нашего алгоритма.

5.2. Критерий выбора, связанный с инвестором

Второй шаг двухшагового алгоритма состоит в выборе единственной пары (u, d) из контура соответствия рыночной цене Σ , задаваемого соотношением (23), которая оптимизирует один из фиксированных критериев риска инвестора. Каждая пара (u, d) из контура соответствия рыночной цене Σ определяет динамическую портфельную стратегию хеджирования. Для заданного процесса курса акции $\{s_k\}$, портфели, определяемые парой (u, d) , приводят к последовательности остатков $\delta_k(u, d)$, которые представляют собой остаточный доход или потери инвестора (подробнее см. раздел 4). Эта последовательность является экономической мерой последствия выбора параметров модели (u, d) и соответствующего этим параметрам динамического хеджирующего портфеля.

Имеется несколько критериев, которые превращают эту последовательность в скалярную меру риска инвестора. Каждый из критериев отражает разные аспекты отношения продавца опциона к риску. Мы рассмотрим три таких критерия для выбора единственной пары (u, d) .

Рис. 1. Поверхность значений и контуры

- Максимизировать вероятность положительности аккумулированного остатка:

$$\max_{(u,d) \in \Sigma} \mathbf{P}(\Delta_n(u, d) > 0). \quad (25)$$

- Минимизировать ожидаемый дефицит:

$$\min_{(u,d) \in \Sigma} \mathbf{E}(\text{дефицит}) = \min_{(u,d) \in \Sigma} \mathbf{E}(\max_{1 \leq k \leq n} (-\delta_k(u, d))). \quad (26)$$

- Максимизировать ожидаемый аккумулированный доход:

$$\max_{(u,d) \in \Sigma} \mathbf{E}(\Delta_n(u, d)) \quad (27)$$

Первый критерий (25) интерпретирует положительный аккумулированный остаток как прибыль, и выбирает пару (u, d) , которая имеет наибольшую вероятность получения прибыли. При отсутствии арбитража большие значения аккумулированного остатка с большой вероятностью не достигаются. Однако имеется возможность, что инвестор получит небольшую положительную прибыль. Решение этой задачи оптимизации дает соответствующую рыночной цене опциона хеджирующую стратегию, которая максимизирует вероятность положительности аккумулированной прибыли.

Второй критерий (26) отражает желание инвестора минимизировать максимальное за время действия опциона количество дополнительных средств, необходимых в каждый единичный период для переформирования портфеля. Отрицательный остаток $\delta_k(u, d)$ соответствует недостатку средств, для переформирования портфеля в момент k . Наибольшее по абсолютной величине отрицательное значение остатка $\delta_k(u, d)$ — это наибольшее значение дефицита средств. Оптимизация по этому критерию приводит к хеджирующему портфелю с минимальными ожидаемыми дополнительными вложениями за единичный период.

Последний критерий (27) максимизирует ожидаемый аккумулированный остаток, который соответствует полной чистой прибыли от использования динамического портфеля, построенного по выбранной паре (u, d) . В работе [5] было показано, что ожидаемый аккумулированный доход асимптотически постоянен на контуре постоянных рациональных цен. Поэтому можно ожидать, что при больших n разности значений ожидаемого аккумулированного дохода для разных пар (u, d) на нашем контуре постоянных рациональных цен будут минимальны. Как показывают эмпирические результаты, при малых значениях n возможны рыночные контуры с непостоянным ожидаемым аккумулированным доходом.

Таким образом мы имеем следующую ситуацию. Фиксируем пару (u, d) контура соответствия рыночной цене (23). Каждый потенциальный временной ряд цен акции $\{s_k\}$, $k = 1, \dots, n$ определяет последовательность остатков $\{\delta_k(u, d)\}$, $k = 1, \dots, n$. Конкретный выбор критерия риска сводит последовательность $\{\delta_k(u, d)\}$ к единственному скалярному значению риска. Чтобы оценить применимость пары (u, d) к выбранной мере риска мы симулируем некоторое число временных рядов цен акции и получаем соответствующую выборку скалярных значений риска. Соответствующая выборочная статистика (среднее значение или вероятность желаемого события) подсчитывается по выборке и представляется как значение полезности соответствующей пары (u, d) . Поведение выборочной статистики при изменении пары (u, d) на контуре соответствия рыночной цене определяет оптимальный выбор пары (u, d) .

6. Реализация алгоритма и численные результаты

В этом параграфе мы представляем реализацию нашего двухшагового алгоритма для построения оптимальной хеджирующей стратегии, основанной на критериях риска, описанных в параграфе 5.2.

После этого приводится иллюстрация результатов применением алгоритма к реальным рыночным данным.

6.1. Двухшаговый алгоритм

Выбор оптимальной пары (u, d) производится за два шага.

- Редукция совокупности пар (u, d) на контур соответствия рыночной цене (23), отвечающий объявленной рыночной цене.
- Применение рангового критерия к а бутстрэп-оценочной статистике последовательности остатков.

Численная процедура, которую нужно описать, реализуется на компьютерном языке R (см. www.R-project.org). Вычисления проводятся следующим образом.

1. На языке R применяется функция выделения контура на поверхности нормированных значений, задаваемой соотношением (24). Контур, определяемые соотношением (23) с $r = 0$, выделяются, как изображено на рис. 1. Выбирается контур, отвечающий рыночной цене опциона x_0 . Обычно программа выдает от 80 до 100 пар (u, d) на контуре соответствия рыночной цене.
2. Реальные данные цены акции используются для построения последовательности дневных скачков цены акции. Скачки разделяются на группы по числу дней, разделяющих последовательные цены: скачки следующего дня (например скачок цены с понедельника на вторник) и скачки в конце недели (например скачок цены с пятницы на понедельник) образуют большинство скачков. Имеется также небольшое количество скачков в праздничные дни в середине недели, а также скачки цены, когда в конце недели бывает более двух выходных. Типичный процесс цены акции и процесс скачков изображены на рис. 2.
3. Выбирается каждая из групп скачков следующего дня и конца недели с подстановкой, чтобы образовать бутстрэп-последовательности скачков (за четыремь скачками следующего дня следует скачок конца недели, и это повторяется столько недель, сколько нужно бутстрэп-данных). Каждая последовательность скачков единственным образом определяет последовательность цен акции. Некоторое множество бутстрэп-процессов скачков и цен изображено на рис. 3.
4. Для каждой пары (u, d) на выбранном контуре подсчитывается последовательность остатков δ_k для каждой бутстрэп-последовательности значений цены акции. Последовательность остатков для бутстрэп-выборки с 30 днями до исполнения изображена на рис. 4.
Распределение соответствующих агрегированных остатков приведено на рис. 5.
5. Каждый из критериев применяется к бутстрэп-выборкам последовательностей остатков и получается оценка соответствующей статистики (ожидаемого значения или вероятности).

Рис. 2. Процесс цены акции и процесс скачков цены

Рис. 3. Бутстрэп-процессы цены акции

Рис. 4. Распределение локальных остатков (δ_k)

6. Выбирается пара (u, d) с наилучшим значением критерия. Таким образом получают три оптимальные пары (u, d) , по одной для каждого из трех описанных ранее критериев.

6.2. Иллюстративные результаты

В этом параграфе мы приводим результаты, полученные применением методов оценки риска, изложенных в предыдущих параграфах. Численные результаты были получены для 19 опционов покупки, которые продавались на Нью-Йоркской фондовой бирже, и у которых датой погашения было 15 октября 2004 года. Характеристики опционов приведены в табл. 1. Для каждого опциона учитывались следующие данные: цена исполнения, дата исполнения, реальные данные цены акции и реальные данные цены опциона. Более 500 ежедневных цен акции были учтены и использовались для построения бутстрэп выборки процесса скачков цены акции. Данные о рыночной цене опциона за период в 40 дней до даты исполнения были учтены и использованы для выбора контуров соответствия рыночной цене (как это описано в разделе 5.1) для разных времен исполнения. Рыночная цена опциона за n дней до исполнения использовалась для выбора соответствующего контура для каждого из рассматриваемых значений n .

При выборе контура соответствия рыночной цене получается примерно 80 пар (u, d) , каждая из которых соответствует потенциальному хеджирующему портфелю. Для каж-

Рис. 5. Распределение агрегированных остатков (Δ_n)

Таблица 1. Опционы, используемые при анализе данных

Название компании	Опцион	Число дней (n) до исполнения	Цена акции	Метка на оси
Exxon Mobil	XOM+JV	30	45	xomjv30
Exxon Mobil	XOM+JV	20	45	xomjv20
Exxon Mobil	XOM+JV	10	45	xomjv10
Exxon Mobil	XOM+JI	30	45	xomji30
Exxon Mobil	XOM+JI	20	45	xomji20
Walmart	WMT+JJ	30	50	wmt30
Walmart	WMT+JJ	20	50	wmt20
Walmart	WMT+JJ	7	50	wmt07
Microsoft	MSFT+MSQ	30	25	msftMsq30
Microsoft	MSFT+MSQ	20	25	msftMsq20
Microsoft	MSFT+MSQ	10	25	msftMsq10
Microsoft	MSFT+MQF	30	25	msftMqf30
Intel	INTC+JE	30	25	intc30
Intel	INTC+JE	20	25	intc20
Intel	INTC+JE	10	25	intc10
General Electric	GE+JF	30	30	ge30
Bank of America	BAC+JV	30	42,50	bac30
Bank of America	BAC+JV	20	42,50	bac20
Bank of America	BAC+JV	10	42,50	bac10

Таблица 2. Оптимальные результаты по Exxon-Mobil при $n = 30$ дням до исполнения

Критерий риска	Оптимальное (u, d)	Значение целевого функционала
$P(\Delta_n) > 0$	(1,0112, 0,9792)	1,0
$E(\text{дефицит})$	(1,0146, 0,9834)	-0,0042
$E(\Delta_n)$	(1,0100, 0,9961)	0,2066

Таблица 3. Оптимальные результаты по Walmart при $n = 30$ дням до исполнения

Критерий риска	Оптимальное (u, d)	Значение целевого функционала
$P(\Delta_n) > 0$	(1,0156, 0,9897)	1,0
$E(\text{дефицит})$	(1,0140, 0,9889)	-0,0548
$E(\Delta_n)$	(1,0076, 0,9804)	0,3097

дого хеджирующего портфеля вычисляются значения критериев (25)–(27) выбирается оптимальный портфель. В табл. 2 представлены результаты для опциона Exxon-Mobil при $n = 30$ дням до исполнения. Алгоритм генерирует хеджирующий портфель, для которого вероятность положительности дохода равна единице. Это согласуется с теоретическим результатом, полученным в разделе 4. Если последовательность скачков отношений последовательных цен акции ξ_k попадает внутрь интервала (u, d) , то это гарантирует положительность локальных остаточных доходов. Оптимальное значение ожидаемого дефицита, по существу, равно нулю. Для этих конкретных данных значение целевого функционала вдоль контура изменяется не очень существенно. Преимущество использования алгоритма проявляется при подсчете ожидаемого дефицита, когда оптимальное значение ожидаемого дефицита примерно в три раза меньше, чем для других возможных значений дефицита.

В таблицах 3–5 представлены результаты по опциону Walmart. Рассматривая результаты, мы видим, что при $n = 30$ и $n = 20$ дням до исполнения для оптимальной пары (u, d) с вероятностью 1,0 получаются маленькие положительные значения агрегированного дохода. Интересно отметить, что для всех пар (u, d) на контуре вероятность положительности агрегированного дохода изменяется от, приблизительно, 0,6 до 1,0 при $n = 30$ и $n = 20$, и приблизительно от 0,3 до 0,99 при $n = 7$. Другими словами, следуя стратегии, сгенерированной алгоритмом, инвестор может увеличить вероятность хоть и малого, но положительного дохода, от значения 0,3 до значения 0,99.

Аналогичные результаты получаются для значений других критериев при сравнении значения, отвечающего оптимальному хеджирующему портфелю со значениями, отвечающими другим хеджирующим портфелям, соответствующим другим парам (u, d) на контуре. В частности, при рассмотрении данных по Walmart с $n = 30$ днями до исполнения, значение ожидаемого дефицита $E(\max(-\delta_k(u, d)))$ изменяется от -0,0548 (см. второй столбец табл. 3) до приблизительно -0,4. Для некоторых хеджирующих стратегий

Таблица 4. Оптимальные результаты по Walmart при $n = 20$ дням до исполнения

Критерий риска	Оптимальное (u, d)	Значение целевого функционала
$P(\Delta_n) > 0$	(1,0171, 0,9901)	1,0
$E(\text{дефицит})$	(1,0136, 0,9878)	-0,0355
$E(\Delta_n)$	(1,0052, 0,9718)	0,2372

Таблица 5. Оптимальные результаты по Walmart при $n = 7$ дням до исполнения

Критерий риска	Оптимальное (u, d)	Значение целевого функционала
$P(\Delta_n) > 0$	(1,0238, 0,9882)	0,99
$E(\text{дефицит})$	(1,0178, 0,9857)	-0,0018
$E(\Delta_n)$	(1,0068, 0,9747)	0,0215

Таблица 6. Оптимальные результаты по Intel при $n = 30$ дням до исполнения

Критерий риска	Оптимальное (u, d)	Значение целевого функционала
$P(\Delta_n) > 0$	(1,0140, 0,9640)	0,8
$E(\text{дефицит})$	(1,0130, 0,9616)	-0,0378
$E(\Delta_n)$	(1,0127, 0,9608)	0,0429

дефицит более чем в 7 раз превосходит оптимальное значение. Значение ожидаемого агрегированного дохода $E(\Delta_n(u, d))$ изменяется приблизительно от 0 до 0,3. Эти результаты показывают важность следования хеджирующей стратегии, предлагаемой алгоритмом.

Сравнивая табл. 3–5, можно видеть, что оптимальное значение целевого функционала как для критерия вероятности, так и для критерия дефицита не изменяются существенным образом, при изменении времени до исполнения опциона. Это не так для критерия ожидаемого агрегированного дохода. Значение, соответствующее $n = 30$, более чем в 10 раз превосходит значение, соответствующее $n = 7$. Различие можно объяснить тем фактом, что при возрастании времени до исполнения опциона появляется больше возможностей для извлечения хотя бы маленького, но положительного дохода при каждом $k = 1, 2, \dots, 30$.

Если рассмотреть результаты, полученные для опциона Intel при $n = 30$, $n = 20$ и $n = 10$ и представленные в табл. 6–8, то нельзя увидеть такого же изменения значения ожидаемого агрегированного дохода. Однако в этом случае больше всего с изменением времени до исполнения опциона изменяется вероятность получения положительного дохода, которая возрастает от 0,8 до 0,93, когда n убывает от $n = 30$ до $n = 10$. Очевидно, что поведение оптимальных значений целевых функционалов различно для разных опционов.

7. Численные результаты оценки качества алгоритма

Качество нашего алгоритма минимизации риска можно оценить, сравнив для каждого из наших критериев его значение для оптимального хеджирующего портфеля, полученного с помощью алгоритма, с соответствующими значениями для других хеджирующих портфелей, отвечающих другим парам, лежащим на контуре соответствия рыночной цене. Расчет значений критериев проводится для траектории будущих цен акции, которые

Таблица 7. Оптимальные результаты по Intel при $n = 20$ дням до исполнения

Критерий риска	Оптимальное (u, d)	Значение целевого функционала
$P(\Delta_n) > 0$	(1,0193, 0,9624)	0,83
$E(\text{дефицит})$	(1,0182, 0,9600)	-0,0098
$E(\Delta_n)$	(1,0197, 0,9632)	0,0253

Таблица 8. Оптимальные результаты по Intel при $n = 10$ дням до исполнения

Критерий риска	Оптимальное (u, d)	Значение целевого функционала
$P(\Delta_n) > 0$	(1,0339, 0,9600)	0,93
$E(\text{дефицит})$	(1,0130, 0,9616)	-0,0034
$E(\Delta_n)$	(1,0127, 0,9608)	0,0475

Рис. 6. Данные по цене акции

Рис. 7. Значения дефицита для 19 опционов

не использовались при подгонке модели. Для выделения будущих цен акции мы делим собранные данные на два множества. Во-первых, множество реальных значений цены акции, которое используется для подгонки модели (данные для подгонки модели, или ДПМ). Во-вторых, множество из n значений, где n — число дней до исполнения опциона. Эти n значений интерпретируются как будущие значения цен акции (данные для оценки качества алгоритма, или ДОК). На рис. 6 представлено множество данных по цене акции Bank of America, начиная с 15 октября 2002 года и кончая 15 октября 2004 года. Для оценки качества оптимального хеджирующего портфеля, полученного с помощью алгоритма минимизации риска, для опциона, у которого осталось $n = 30$ дней до исполнения, в качестве ДПМ берутся цены акции с 15 октября 2002 года до 1 сентября 2004 года (выделены серым цветом), а в качестве ДОК используются цены акции с 1 сентября до 15 октября 2004 года. Значения ДОК более детально представлены в нижней части рис. 6.

Для оценки качества алгоритма мы становимся на точку зрения инвестора, использующего хеджирующий портфель, основанный на оптимальной паре (u, d) , полученной применением алгоритма, минимизирующего риск. В качестве цены акции и зафиксированной цены опциона на начальный момент времени берутся соответствующие цены на 2 сентября 2004 года. Для опциона, у которого осталось n дней до исполнения, значения ДОК используются для подсчета остаточных значений $\delta_k(u, d)$, $k = 1, \dots, n$ и для

Рис. 8. Значения аккумулированных остатков для 19 опционов

вычисления аккумулированного остаточного значения $\Delta_n(u, d)$ для всех выбранных пар (u, d) , лежащих на контуре соответствия рыночной цене.

Результаты применения алгоритма были проверены на 19 представительных опционах. Результаты вычисления аккумулированных остатков и значений дефицита для всех 19 опционов представлены на рис. 7 и 8. Каждая точка на 19 строчках рисунка соответствует аккумулированному остатку (или значению дефицита) для конкретной пары (u, d) , лежащей на контуре соответствия рыночной цене, для опциона, указанного на оси y . Более детальное описание опционов дано в табл. 1. Оптимальные значения Δ_n и δ_k , отвечающие выбранному оптимальному хеджирующему портфелю, полученному с помощью алгоритма, отмечены жирными ромбиками.

Результаты, полученные для хеджирующего портфеля, выбранного с помощью алго-

ритма, очень благоприятны. Как видно из рис. 8, 18 из 19 аккумулярованных остаточных значений совпадают с правым концом возможных значений. Для данных по дефициту, изображенных на рис. 7, примерно 14 из 19 значений очень близки к наименьшим значениям дефицита, полученным с помощью симуляций.

8. Выводы

Мы разработали алгоритм, который строит несомофинансируемые хеджирующие стратегии на неполном рынке, каждая из которых соответствует определенному критерию риска инвестора. Алгоритм дает возможность оценить экономические последствия выбора конкретной хеджирующей стратегии на неполном рынке. Двухшаговый алгоритм оптимизирует соответственно одно из трех статистических свойств локального остаточного дохода или дефицита.

Алгоритм был проверен на примере нескольких опционов, которые продаются на Нью-Йоркской фондовой бирже. Результаты показывают, что использование портфельной стратегии, полученной с помощью алгоритма, является выгодным для инвестора. Оно улучшает значение критерия риска инвестора в несколько раз (до десяти) по сравнению с другими неоптимальными портфельными стратегиями хеджирования.

9. Будущие исследования

В данной работе мы исследовали несомофинансируемые хеджирующие стратегии для краткосрочного европейского опциона покупки (call option), для которого время исполнения n не превышает 30 дней. Наш алгоритм строит краткосрочные портфельные стратегии, каждая из которых оптимизирует один из трех критериев, связанных с интересами инвестора. Это исследование было стимулировано теоретическими результатами, полученными в работах А. В. Нагаева с соавторами (см. [5], [6], [7]), в которых изучалось долгосрочное (при больших значениях n) поведение аккумулярованных остатков.

В работах [5], [6] и [7] изучались асимптотические свойства так называемого безрискового дохода инвестора $\Delta_n(U, D)$ (определяемого в (12) при граничных значениях параметров U и D). В [5] рассматривался случай независимых одинаково распределенных скачков цены акции, в [6] предполагалось, что скачки представляют собой дискретную цепь Маркова, а в [7] изучался случай независимых, но не обязательно одинаково распределенных скачков. Во всех трех случаях, с помощью соответствующей диффузионной аппроксимации, были получены асимптотические формулы для среднего значения аккумулярованных остатков в терминах параметров исходной модели.

В одной неопубликованной работе А. В. Нагаев рассматривает аккумулярованные остатки для случая параметров u и d не лежащих на границе и удовлетворяющих соотношению (14) (так называемый доход инвестора связанный с риском). В этом случае, при предположении независимости и одинаковой распределенности скачков цены акции, получена асимптотическая формула для среднего аккумулярованного остатка и установлена асимптотическая связь (при стремлении к бесконечности времени исполнения опциона n) между $E(\Delta_n)$ и затратами на поддержание $g_0(u, d, s_0)$.

Данную статью можно рассматривать, как начало исследования краткосрочного поведения аккумулярованных остатков. Здесь мы предполагаем, что скачки отношения цен акции являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, и соответствующим образом строим нашу процедуру бутстрэп-симуляции. В дальнейшем

мы планируем исследовать вопрос о том, какие изменения получатся, если сделать более реальные предположения о скачках цен акции, используя методы анализа временных рядов и продвинутое методы подгонки (например, вероятностные модели, основанные на процессах Леви). Мы планируем также распространить наши исследования на другие производные ценные бумаги с выпуклой функцией выплат. Дополнительным направлением будущих исследований является численная проверка асимптотических формул, полученных А. В. Нагаевым с соавторами, в частности, выявление последствий на асимптотические результаты конечности числа шагов до исполнения.

Мы посвящаем эту работу нашему коллеге Александру Викторовичу Нагаеву. Александр обладал великолепной математической интуицией, был глубоко творческой личностью и был истинным другом. Он трагически погиб в 2005 году, и нам очень его не хватает.

Список литературы

1. Tessitore G., Zabczyk J., Pricing options for multinomial models. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* (1996) **44**, №3, 363–380.
2. Wolczynska G., An explicit formula for option pricing in discrete incomplete markets. *Intern. J. Theoret. Appl. Finance* (1998) **1**, №2, 283–288.
3. Hammarlid O., On minimizing risk in incomplete markets. *Intern. J. Theoret. Appl. Finance* (1998) **1**, №2, 227–233.
4. Рюшендорф Л., On upper and lower prices in discrete time models. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова* (2002) **237**, 134–139.
5. Nagaev A., Nagaev S., Asymptotics of riskless profit under selling of discrete time call options. *Appl. Math.* (2003) **30**, №2, 173–191.
6. Nagaev A. V., Nagaev S. V., Kunst R., *A diffusion approximation to the Markov chain model of the financial market and the expected riskless profit under selling of call and put options*, Preprint 164, Economics Series. Institute for Advanced Studies, Vienna, 2005.
7. Nagaev A. V., Nagaev S. V., Kunst R., *A diffusion approximation to the riskless profit under selling of discrete time call options: Non-identically distributed jumps*, Preprint 164, Economics Series. Institute for Advanced Studies, Vienna, 2005.
8. Jouini M. M. E., Cvitanic J., *Option pricing, interest rates and risk management*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
9. Ширяев А. Н., *Основы стохастической финансовой математики*, **1, 2**. ФАЗИС, Москва, 1998.
10. Мельников А. В., Волков С. Н., Нечаев М. Л., *Математика финансовых обязательств*. ГУ ВШЭ, Москва, 2001.
11. Sarykalin S., Uryasev S., Pricing derivative securities in incomplete markets. In: *Proc. 36th Conf. on Winter Simulation*. IEEE, Piscataway, NJ, 2004, pp. 1586–1588.

Статья поступила 15.09.2006.