Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Л. Николаев, Г. Ю. Софронов, Многократные оптимальные правила остановки для суммы независимых случайных величин, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 4, 42–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm976>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 07:59:45

Многократные оптимальные правила остановки для суммы независимых случайных величин

© 2007 г. М. Л. Николаев, Г. Ю. Софронов

Рассматриваются многократные оптимальные правила остановки для конечной последовательности независимых случайных величин длины N . Требуется найти оптимальное правило, которое максимизирует ожидаемую сумму k , $1 < k < N$, наблюдений. Получены оптимальное правило остановки и цена игры. Данный результат может быть использован в задачах о продаже, а также при решении задач экологии поведения.

Работа выполнена при поддержке программы президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ-4129.2006.1. Второй автор также благодарит за поддержку Australian Research Council, грант DP0556631.

1. Введение

Пусть $y_1, y_2, \dots, y_N$ — последовательность независимых случайных величин. Эти случайные величины наблюдаются последовательно, и необходимо решить, когда остановиться. Наше решение остановиться зависит лишь от наблюдений, которые уже сделаны, но не зависит от будущего, которое еще не известно. После k , $k \geq 2$, остановок в моменты $m_1, m_2, \dots, m_k$, $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k \leq N$, получаем выигрыш

$$Z_{m_1, m_2, \dots, m_k} = y_{m_1} + y_{m_2} + \dots + y_{m_k}. \quad (1)$$

Задача состоит в нахождении процедуры, которая максимизирует ожидаемый выигрыш. Предлагаются два следующих применения этой модели, в задаче продажи и в задачах экологии поведения.

Во-первых, случайная величина y_n может быть интерпретирована как стоимость некоторого актива (например, дома) в момент n . Тогда рассматривается задача продажи k идентичных объектов в течение определенного времени N , с одним предложением цены в каждый момент n и без возможности возвращения к прошлым предложениям цены.

Во-вторых, можно использовать эту модель для анализа некоторых задач экологии поведения таких, как последовательный выбор партнера или оптимальный выбор места питания. Действительно, у некоторых видов активные особи (как правило, самки) последовательно встречаются с различными пассивными особями (обычно самцами) в течение одного сезона (см. [2], [8]). Заметим также, что особь может последовательно выбирать более одного места питания. Итак, рассматриваемая случайная величина y_n может быть интерпретирована как качество объекта (потенциального партнера или места питания),

который появляется в момент n . Активная особь может либо принять объект (в этом случае один выбор сделан), либо отвергнуть и продолжить наблюдения (при этом невозможно вернуться к отвергнутому объекту). Имеется возможность сделать k выборов. Задача заключается в нахождении процедуры, максимизирующей выигрыш (1).

2. Некоторые результаты из теории оптимальных правил остановки

Пусть $y_1, y_2, \dots$ — последовательность случайных величин с известным совместным распределением. Эти случайные величины мы наблюдаем последовательно, останавливаясь где-либо по своему усмотрению. Если мы останавливаемся в момент времени m_1 после наблюдений $(y_1, \dots, y_{m_1})$, то начинаем наблюдать другую последовательность $y_{m_1, m_1+1}, y_{m_1, m_1+2}, \dots$ (зависящую от $(y_1, \dots, y_{m_1})$) и решаем задачу оптимальной остановки новой последовательности. Если сделано i остановок в моменты $m_1, m_2, \dots, m_i$, $1 \leq i \leq k-1$, то наблюдаем последовательность случайных величин $y_{m_1, \dots, m_i, m_i+1}, y_{m_1, \dots, m_i, m_i+2}, \dots$, распределение которой зависит от $(y_1, \dots, y_{m_1}, y_{m_1, m_1+1}, \dots, y_{m_1, m_2}, \dots, y_{m_1, \dots, m_i})$. Наше решение остановиться в моменты $m_i, i = 1, 2, \dots, k$, зависит лишь от уже наблюдавшихся значений случайной последовательности, но не зависит от будущих значений. После $k, k \geq 2$, остановок получаем выигрыш

$$Z_{m_1, \dots, m_k} = g_{m_1, \dots, m_k}(y_1, \dots, y_{m_1, m_1+1}, \dots, y_{m_1, \dots, m_k}),$$

где $g_{m_1, \dots, m_k}$ — известная функция. Задача состоит в нахождении правила остановки, которое максимизирует ожидаемый выигрыш.

Более формально, будем считать заданными

- (1) вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$;
- (2) неубывающую последовательность σ -подалгебр $\{\mathcal{F}_{m_1, \dots, m_{i-1}, m_i}, m_i > m_{i-1}\}$ σ -алгебры $\mathcal{F}$ такую, что $\mathcal{F}_{m_1, \dots, m_{i-1}} \subseteq \mathcal{F}_{m_1, \dots, m_i} \subseteq \mathcal{F}_{m_1, \dots, m_{i-1}, m_i+1}$ при каждом $i = 1, 2, \dots, k$ и наборе целых чисел $0 \equiv m_0 < m_1 < \dots < m_{i-1}$;
- (3) случайный процесс $\{Z_{m_1, \dots, m_{k-1}, m_k}, \mathcal{F}_{m_1, \dots, m_{k-1}, m_k}, m_k > m_{k-1}\}$ для фиксированных целых $m_1, \dots, m_{k-1}, 1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_{k-1}$.

В случае неформальной постановки, сделанной в начальном абзаце этого раздела, σ -алгебра $\mathcal{F}_{m_1, \dots, m_i} = \sigma(y_1, \dots, y_{m_1}, y_{m_1, m_1+1}, \dots, y_{m_1, m_2}, \dots, y_{m_1, m_2, \dots, m_i})$.

Приведем определения и теоремы из [4]–[7].

Определение 1. Набор целочисленных случайных величин $(\tau_1, \dots, \tau_i)$, $1 \leq i \leq k$, назовем правилом i -кратной остановки, если он удовлетворяет следующим условиям:

- (а) $1 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_i < \infty$ ($\mathbf{P}$ -п.н.),
- (б) $\{\omega: \tau_1 = m_1, \dots, \tau_j = m_j\} \in \mathcal{F}_{m_1, \dots, m_j}$ при всех $m_j > m_{j-1} > \dots > m_1 \geq 1$, $j = 1, 2, \dots, i$.

Правило k -кратной остановки будем называть правилом многократной остановки.

В работе используются следующие обозначения:

$$(\lambda)_i = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i), \quad (\lambda)_1 = \lambda_1, \quad \mathbf{E}_{(m)_i} \xi = \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}_{(m)_i}),$$

$$A_{(m)_i} \xi = \mathbf{E}_{(m)_i} \left(\sup_{m_{i+1}} \mathbf{E}_{(m)_{i+1}} (\dots (\sup_{m_{k-1}} \mathbf{E}_{(m)_{k-1}} \xi) \dots) \right).$$

Следующее условие необходимо для существования всех рассматриваемых математических ожиданий:

$$(A^+) \quad \mathbf{E}(\sup_{m_1} A_{(m)_1} (\sup_{(m)_k} Z_{(m)_k})) < \infty.$$

Полагаем, что условие (A^+) выполняется для $Z_{(m)_k}$.

Пусть S_m — класс многократных правил остановки $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ таких, что $\tau_1 \geq m$ (**P**-п.н.).

Определение 2. Функция $v_m = \sup_{\tau \in S_m} \mathbf{E} Z_\tau$ называется m -ценой игры. В частности, если $m = 1$, то $v = v_1$ называется ценой игры.

Определение 3. Многократное правило остановки $\tau^* \in S_m$ называется оптимальным многократным правилом остановки в S_m , если $\mathbf{E} Z_{\tau^*}$ существует и $\mathbf{E} Z_{\tau^*} = v_m$.

Вышеупомянутое условие (A^+) обеспечивает конечность v_m и существование $\mathbf{E} Z_\tau$ для всех $\tau \in S_m$. Задача состоит в нахождении оптимального правила многократной остановки и m -цены игры v_m .

Последовательности $\{V_{(m)_i}\}$ и $\{X_{(m)_i}\}$, $i = 1, 2, \dots, k$, необходимы при построении многократных правил остановки τ^* . Пусть $T_{(m)_i}$ — класс i -кратных правил остановки $(\tau)_i = (\tau_1, \dots, \tau_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, с $\tau_1 = m_1, \dots, \tau_{i-1} = m_{i-1}$, $\tau_i \geq m_i$ (**P**-п.н.). Пусть $T_{(m)_1} \equiv T_{m_1}$ обозначает класс всех моментов остановки τ_1 таких, что $\tau_1 \geq m_1$ (**P**-п.н.). Полагаем $X_{(m)_k} = Z_{(m)_k}$ и определяем обратной индукцией по i от $i = k$

$$V_{(m)_i} = \text{ess} \sup_{(\tau)_i \in T_{(m)_i}} \mathbf{E}_{(m)_i} X_{(\tau)_i},$$

$$X_{(m)_{i-1}} = \mathbf{E}_{(m)_{i-1}} V_{(m)_{i-1}, m_{i-1}+1}, \quad i = k, k-1, \dots, 1, \quad (2)$$

где $X_0 = 0$.

Замечание 1. Отметим, что большинство утверждений ниже будет справедливо с точностью до событий вероятности нуль. Далее мы не будем упоминать об этом.

Выясним теперь некоторые свойства последовательностей $\{V_{(m)_i}\}$ и $\{X_{(m)_i}\}$. Из результатов общей теории оптимальных правил остановки (см., например, [1], [3]) следует, что $V_{(m)_i}$ удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$V_{(m)_i} = \max\{X_{(m)_i}, \mathbf{E}_{(m)_i} V_{(m)_{i-1}, m_{i-1}+1}\}.$$

Следующая теорема дает условия существования и структуру оптимального правила многократной остановки в S_m .

Теорема 1. Пусть выполнено условие (A^+) . Положим

$$\tau_i^* = \inf\{m_i > m_{i-1} : V_{(m)_i} = X_{(m)_i}\}$$

для $i = 1, 2, \dots, k$ на множестве $D_{i-1} = \{\omega : \tau_1^* = m_1, \dots, \tau_{i-1}^* = m_{i-1}\}$, где предполагается, что $\tau_i^*(\omega) = \infty$ на $\{\omega : \tau_{i-1}^*(\omega) = \infty\}$, $m_0 = m - 1$, и $D_0 = \Omega$. В этом случае, если случайный вектор $\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_k^*)$ конечен с вероятностью 1, то $\tau^* \in S_m$ является оптимальным правилом многократной остановки.

Следующая теорема дает характеристику m -цены v_m через последовательность $\{V_m\}$.

Теорема 2. Если выполнено условие (A^+) , то $v_m = \mathbf{E}V_m$.

Рассмотрим конечный случай. Пусть $\{Z_{(m)_k}, 1 \leq m_1 \leq N_1, m_1 < m_2 < N_2(m_1), \dots, m_{k-1} < m_k \leq N_k(m_1, \dots, m_{k-1})\}$ — семейство случайных величин, где $N_1, N_i(\cdot), i = 2, \dots, k$, — натуральные числа. Как и в общей теории правил остановки (см. [1]), определим последовательность $V_{(m)_i}$ обратной индукцией из рекуррентных уравнений

$$V_{(m)_{i-1}, N_i(m_1, \dots, m_{i-1})} = X_{(m)_{i-1}, N_i(m_1, \dots, m_{i-1})}, \quad (3)$$

$$V_{(m)_i} = \max\{X_{(m)_i}, \mathbf{E}_{(m)_i} V_{(m)_{i-1}, m_i+1}\} \quad (4)$$

для $1 \leq m_1 \leq N_1, \dots, m_{i-1} < m_i \leq N_i(m_1, \dots, m_{i-1})$. Как и ранее, $X_{(m)_k} = Z_{(m)_k}$.

Используя теорему 1, определим оптимальное правило многократной остановки τ^* . Из теоремы 2 и равенств (3), (4) получаем значение v_m .

3. Основной результат

Рассмотрим нашу первоначальную задачу. В работе [4] был рассмотрен пример, в котором получено оптимальное правило многократной остановки τ^* и значение цены игры v в случае, когда $y_1, y_2, \dots, y_N$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с равномерным распределением $U(0, 1)$. Следующая теорема обобщает данный результат.

Теорема 3. Пусть $y_1, y_2, \dots, y_N$ — последовательность независимых случайных величин с известными функциями распределения $F_1, F_2, \dots, F_N$, $Z_{(m)_k}$ определяется, как в (1), $v^{L,l}$ — цена игры с l , $l \leq k$, остановками и L , $L \leq N$, шагами. Если существуют $\mathbf{E}y_1, \mathbf{E}y_2, \dots, \mathbf{E}y_N$, то цена игры $v = v^{N,k}$, где

$$v^{n,1} = \mathbf{E}(\max\{y_{N-n+1}, v^{n-1,1}\}), \quad 1 \leq n \leq N,$$

$$v^{0,1} = -\infty,$$

$$v^{n,k-i+1} = \mathbf{E}(\max\{v^{n-1,k-i} + y_{N-n+1}, v^{n-1,k-i+1}\}), \quad k-i+1 \leq n \leq N,$$

$$v^{k-i,k-i+1} = -\infty, \quad i = k-1, \dots, 1.$$

Положим

$$\tau_1^* = \min\{m_1: 1 \leq m_1 \leq N-k+1, y_{m_1} \geq v^{N-m_1,k} - v^{N-m_1,k-1}\},$$

$$\tau_i^* = \min\{m_i: \tau_{i-1}^* < m_i \leq N-k+i, y_{m_i} \geq v^{N-m_i,k-i+1} - v^{N-m_i,k-i}\}, \quad i = 2, \dots, k-1,$$

$$\tau_k^* = \min\{m_k: \tau_{k-1}^* < m_k \leq N, y_{m_k} \geq v^{N-m_k,1}\},$$

тогда $\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_k^*)$ — оптимальное правило многократной остановки.

Доказательство. Из (4) и независимости $y_1, \dots, y_N$ получаем, что

$$\begin{aligned} V_{(m)_k} &= \max\{X_{(m)_k}, \mathbf{E}_{(m)_k} V_{(m)_{k-1}, m_k+1}\} = \max\{y_{m_1} + \dots + y_{m_k}, \mathbf{E}_{(m)_k} V_{(m)_{k-1}, m_k+1}\} \\ &= \max\{y_{m_k}, v^{N-m_k,1}\} + y_{m_1} + \dots + y_{m_{k-1}}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$v^{N-m_k+1,1} = \mathbf{E}_{(m)_{k-1}, m_k-1}(\max\{y_{m_k}, v^{N-m_k,1}\}) = \mathbf{E}(\max\{y_{m_k}, v^{N-m_k,1}\})$$

для $m_{k-1} < m_k < N$ и

$$v^{N-m_k+1,1} = v^{1,1} = \mathbf{E}y_N$$

для $m_k = N$, $v^{0,1} = -\infty$. Действительно, из (3) следует, что $V_{(m)_{k-1},N} = X_{(m)_{k-1},N}$.

Используя (2) и (5), получаем, что

$$\begin{aligned} X_{(m)_{k-1}} &= \mathbf{E}_{(m)_{k-1}} V_{(m)_{k-1},m_{k-1}+1} \\ &= \mathbf{E}_{(m)_{k-1}} (\max\{y_{m_{k-1}+1}, v^{N-m_{k-1}-1,1}\} + y_{m_1} + \dots + y_{m_{k-1}}) \\ &= \mathbf{E}(\max\{y_{m_{k-1}+1}, v^{N-m_{k-1}-1,1}\}) + y_{m_1} + \dots + y_{m_{k-1}} \\ &= v^{N-m_{k-1},1} + y_{m_1} + \dots + y_{m_{k-1}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (4) и (6) получаем, что

$$\begin{aligned} V_{(m)_{k-1}} &= \max\{X_{(m)_{k-1}}, \mathbf{E}_{(m)_{k-1}} V_{(m)_{k-2},m_{k-1}+1}\} \\ &= \max\{v^{N-m_{k-1},1} + y_{m_1} + \dots + y_{m_{k-1}}, \mathbf{E}_{(m)_{k-1}} V_{(m)_{k-2},m_{k-1}+1}\} \\ &= \max\{v^{N-m_{k-1},1} + y_{m_{k-1}}, v^{N-m_{k-1},2}\} + y_{m_1} + \dots + y_{m_{k-2}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} v^{N-m_{k-1}+1,2} &= \mathbf{E}_{(m)_{k-2},m_{k-1}-1} (\max\{v^{N-m_{k-1},1} + y_{m_{k-1}}, v^{N-m_{k-1},2}\}) \\ &= \mathbf{E}(\max\{v^{N-m_{k-1},1} + y_{m_{k-1}}, v^{N-m_{k-1},2}\}) \end{aligned}$$

для $m_{k-2} < m_{k-1} < N-1$ и

$$v^{N-m_{k-1}+1,2} = v^{2,2} = \mathbf{E}y_{N-1} + \mathbf{E}y_N$$

для $m_{k-1} = N-1$, $v^{1,2} = -\infty$.

Как и выше,

$$\begin{aligned} X_{(m)_{k-2}} &= \mathbf{E}_{(m)_{k-2}} V_{(m)_{k-2},m_{k-2}+1} \\ &= \mathbf{E}_{(m)_{k-2}} (\max\{v^{N-m_{k-2}-1,1} + y_{m_{k-2}+1}, v^{N-m_{k-2}-1,2}\} + y_{m_1} + \dots + y_{m_{k-2}}) \\ &= \mathbf{E}(\max\{v^{N-m_{k-2}-1,1} + y_{m_{k-2}+1}, v^{N-m_{k-2}-1,2}\}) + y_{m_1} + \dots + y_{m_{k-2}} \\ &= v^{N-m_{k-2},2} + y_{m_1} + \dots + y_{m_{k-2}}. \end{aligned}$$

Таким же образом получаем, что

$$\begin{aligned} V_{(m)_i} &= \max\{X_{(m)_i}, \mathbf{E}_{(m)_i} V_{(m)_{i-1},m_i+1}\} \\ &= \max\{v^{N-m_i,k-i} + y_1 + \dots + y_{m_i}, \mathbf{E}_{(m)_i} V_{(m)_{i-1},m_i+1}\} \\ &= \max\{v^{N-m_i,k-i} + y_{m_i}, v^{N-m_i,k-i+1}\} + y_{m_1} + \dots + y_{m_{i-1}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} v^{N-m_i+1,k-i+1} &= \mathbf{E}_{(m)_{i-1},m_i-1} (\max\{v^{N-m_i,k-i} + y_{m_i}, v^{N-m_i,k-i+1}\}) \\ &= \mathbf{E}(\max\{v^{N-m_i,k-i} + y_{m_i}, v^{N-m_i,k-i+1}\}) \end{aligned}$$

для $m_{i-1} < m_i < N - k + i$ и

$$v^{N-m_i+1, k-i+1} = v^{k-i+1, k-i+1} = \mathbf{E}y_{N-k+i} + \dots + \mathbf{E}y_N$$

для $m_i = N - k + i$, $v^{k-i, k-i+1} = -\infty$, $i = k - 2, k - 1, \dots, 2$.

Аналогично,

$$\begin{aligned} X_{(m)_{i-1}} &= \mathbf{E}_{(m)_{i-1}} V_{(m)_{i-1}, m_{i-1}+1} \\ &= \mathbf{E}_{(m)_{i-1}} (\max\{v^{N-m_{i-1}-1, k-i} + y_{m_{i-1}+1}, v^{N-m_{i-1}-1, k-i+1}\} + y_{m_1} + \dots + y_{m_{i-1}}) \\ &= \mathbf{E}(\max\{v^{N-m_{i-1}-1, k-i} + y_{m_{i-1}+1}, v^{N-m_{i-1}-1, k-i+1}\}) + y_{m_1} + \dots + y_{m_{i-1}} \\ &= v^{N-m_{i-1}, k-i+1} + y_{m_1} + \dots + y_{m_{i-1}}, \quad i = k - 2, k - 1, \dots, 2. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} V_{m_1} &= \max\{X_{m_1}, \mathbf{E}_{m_1} V_{m_1+1}\} = \max\{v^{N-m_1, k-1} + y_{m_1}, \mathbf{E}_{m_1} V_{m_1+1}\} \\ &= \max\{v^{N-m_1, k-1} + y_{m_1}, v^{N-m_1, k}\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} v^{N-m_1+1, k} &= \mathbf{E}_{m_1} (\max\{v^{N-m_1, k-1} + y_{m_1}, v^{N-m_1, k}\}) \\ &= \mathbf{E}(\max\{v^{N-m_1, k-1} + y_{m_1}, v^{N-m_1, k}\}) \end{aligned}$$

для $1 \leq m_1 < N - k + 1$ и

$$v^{N-m_1+1, k} = v^{k, k} = \mathbf{E}y_{N-k+1} + \dots + \mathbf{E}y_N$$

для $m_1 = N - k + 1$, $v^{k-1, k} = -\infty$.

Учитывая теорему 2, получаем, что $v = v^{N, k}$.

Теперь, используя теорему 1, (5), (7), (8) и (9), получаем оптимальное правило многократной остановки $\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_k^*)$, где

$$\begin{aligned} \tau_1^* &= \min\{m_1: 1 \leq m_1 \leq N - k + 1, y_{m_1} \geq v^{N-m_1, k} - v^{N-m_1, k-1}\}, \\ \tau_i^* &= \min\{m_i: \tau_{i-1}^* < m_i \leq N - k + i, y_{m_i} \geq v^{N-m_i, k-i+1} - v^{N-m_i, k-i}\}, \quad i = 2, \dots, k - 1, \\ \tau_k^* &= \min\{m_k: \tau_{k-1}^* < m_k \leq N, y_{m_k} \geq v^{N-m_k, 1}\}. \end{aligned}$$

Это и завершает доказательство.

4. Примеры

Рассмотрим два примера, в которых конкретизируются распределения $F_1, F_2, \dots, F_N$. Пусть $y_1, y_2, \dots, y_N$ — последовательность независимых случайных величин, где $y_n = \xi_n - c_n$, $\{c_n\}$, $n = 1, 2, \dots, N$, — известная последовательность неотрицательных чисел (плата за наблюдение), $\{\xi_n\}$, $n = 1, 2, \dots, N$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Полагаем, что распределения ξ_n или равномерное, или нормальное, и для каждого случая мы получим решение задачи многократной оптимальной остановки.

Пример 1 (равномерное распределение). Пусть $\xi_1, \dots, \xi_N$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение $U(a, b)$ на отрезке $[a, b]$, $a < b$ — фиксированные числа. Из теоремы 3 следует, что

$$\begin{aligned} v^{n,1} &= \mathbf{E}(\max\{y_{N-n+1}, v^{n-1,1}\}) = \mathbf{E}(\max\{\xi_{N-n+1} - c_{N-n+1}, v^{n-1,1}\}) \\ &= \mathbf{E}(\max\{\xi_{N-n+1}, v^{n-1,1} + c_{N-n+1}\}) - c_{N-n+1} \\ &= \int_a^b \max\{x, v^{n-1,1} + c_{N-n+1}\} (b-a)^{-1} dx - c_{N-n+1} \\ &= \int_a^{d_1} d_1 (b-a)^{-1} dx + \int_{d_1}^b x (b-a)^{-1} dx - c_{N-n+1} \\ &= \frac{(v^{n-1,1} + c_{N-n+1} - a)^2}{2(b-a)} + \frac{a+b}{2} - c_{N-n+1}, \end{aligned}$$

где $d_1 = v^{n-1,1} + c_{N-n+1}$, $1 \leq n \leq N$, $v^{0,1} = a - c_N$.

Аналогично,

$$\begin{aligned} v^{n,k-i+1} &= \mathbf{E}(\max\{v^{n-1,k-i} + y_{N-n+1}, v^{n-1,k-i+1}\}) \\ &= \mathbf{E}(\max\{v^{n-1,k-i} + \xi_{N-n+1} - c_{N-n+1}, v^{n-1,k-i+1}\}) \\ &= \mathbf{E}(\max\{\xi_{N-n+1}, v^{n-1,k-i+1} - v^{n-1,k-i} + c_{N-n+1}\}) + v^{n-1,k-i} - c_{N-n+1} \\ &= \int_a^b \max\{x, d_2\} (b-a)^{-1} dx + v^{n-1,k-i} - c_{N-n+1} \\ &= \int_a^{d_2} d_2 (b-a)^{-1} dx + \int_{d_2}^b x (b-a)^{-1} dx + v^{n-1,k-i} - c_{N-n+1} \\ &= \frac{(v^{n-1,k-i+1} - v^{n-1,k-i} + c_{N-n+1} - a)^2}{2(b-a)} + \frac{a+b}{2} + v^{n-1,k-i} - c_{N-n+1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} d_2 &= v^{n-1,k-i+1} - v^{n-1,k-i} + c_{N-n+1}, & k-i+1 \leq n \leq N, \\ v^{k-i,k-i+1} &= a + (k-i)(a+b)/2 - (c_{N-k+i} + \dots + c_N), & i = k-1, \dots, 1. \end{aligned}$$

В табл. 1 представлены значения цены игры $v^{L,l}$ с l , $l \leq 7$, остановками и L , $L \leq 8$, шагами при $c_n = 0$, $a = 0$, $b = 1$.

Если $N = 8$, $l = 3$, то ожидаемый выигрыш $v = v^{8,3} = 2,2105$. Оптимальное правило остановки $\tau^* = (\tau_1^*, \tau_2^*, \tau_3^*)$, где

$$\begin{aligned} \tau_1^* &= \min\{m_1: 1 \leq m_1 \leq 6, y_{m_1} \geq v^{8-m_1,3} - v^{8-m_1,2}\}, \\ \tau_2^* &= \min\{m_2: \tau_1^* < m_2 \leq 7, y_{m_2} \geq v^{8-m_2,2} - v^{8-m_2,1}\}, \\ \tau_3^* &= \min\{m_3: \tau_2^* < m_3 \leq 8, y_{m_3} \geq v^{8-m_3,1}\}. \end{aligned}$$

Например, если мы наблюдаем следующую последовательность $\{y_n, n = 1, \dots, 8\}$:

$$0,9501, \quad 0,2311, \quad 0,6068, \quad 0,4860, \quad 0,8913, \quad 0,7621, \quad 0,4565, \quad 0,0185,$$

Таблица 1. Цена игры для равномерного распределения $U(0, 1)$

L	$v^{L,1}$	$v^{L,2}$	$v^{L,3}$	$v^{L,4}$	$v^{L,5}$	$v^{L,6}$	$v^{L,7}$
0	0,0000						
1	0,5000	0,5000					
2	0,6250	1,0000	1,0000				
3	0,6953	1,1953	1,5000	1,5000			
4	0,7417	1,3203	1,7417	2,0000	2,0000		
5	0,7751	1,4091	1,9091	2,2751	2,5000	2,5000	
6	0,8004	1,4761	2,0341	2,4761	2,8004	3,0000	3,0000
7	0,8203	1,5287	2,1318	2,6318	3,0287	3,3203	3,5000
8	0,8364	1,5712	2,2105	2,7568	3,2105	3,5712	3,8364

то

$$m_1 = 1 \quad (\text{потому что } y_1 = 0,9501 \geq v^{7,3} - v^{7,2} = 2,1318 - 1,5287 = 0,6031),$$

$$m_2 = 5 \quad (\text{потому что } y_5 = 0,8913 \geq v^{3,2} - v^{3,1} = 1,1953 - 0,6953 = 0,5000),$$

$$m_3 = 6 \quad (\text{потому что } y_6 = 0,7621 \geq v^{2,1} = 0,6250).$$

Это дает выигрыш $0,9501 + 0,8913 + 0,7621 = 2,6035$.

Пример 2 (нормальное распределение). Пусть $\xi_1, \dots, \xi_N$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$ с функцией плотности

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

где $\mu \in (-\infty, \infty)$, $\sigma > 0$ — фиксированные числа.

Как и ранее, из теоремы 3 получаем, что

$$\begin{aligned} v^{n,1} &= \mathbf{E}(\max\{y_{N-n+1}, v^{n-1,1}\}) = \mathbf{E}(\max\{\xi_{N-n+1} - c_{N-n+1}, v^{n-1,1}\}) \\ &= \mathbf{E}(\max\{\xi_{N-n+1}, v^{n-1,1} + c_{N-n+1}\}) - c_{N-n+1}. \end{aligned}$$

Продолжая равенство, находим, что

$$\begin{aligned} v^{n,1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \max\{x, v^{n-1,1} + c_{N-n+1}\} g(x) dx - c_{N-n+1} \\ &= \int_{-\infty}^{d_1} d_1 g(x) dx + \int_{d_1}^{\infty} x g(x) dx - c_{N-n+1} \\ &= d_1 \Phi\left(\frac{d_1 - \mu}{\sigma}\right) + \left(\sigma \varphi\left(\frac{d_1 - \mu}{\sigma}\right) + \mu \Phi\left(-\frac{d_1 - \mu}{\sigma}\right)\right) - c_{N-n+1} \\ &= \left(\sigma \varphi\left(\frac{d_1 - \mu}{\sigma}\right) + (d_1 - \mu) \Phi\left(\frac{d_1 - \mu}{\sigma}\right)\right) + \mu - c_{N-n+1} \\ &= \sigma \psi\left(\frac{v^{n-1,1} + c_{N-n+1} - \mu}{\sigma}\right) + \mu - c_{N-n+1}, \end{aligned}$$

где

$$\psi(x) = \varphi(x) + x \Phi(x),$$

Таблица 2. Цена игры для нормального распределения $N(0, 1)$

L	$v^{L,1}$	$v^{L,2}$	$v^{L,3}$	$v^{L,4}$	$v^{L,5}$	$v^{L,6}$	$v^{L,7}$
0	$-\infty$						
1	0,0000	$-\infty$					
2	0,3989	0,0000	$-\infty$				
3	0,6297	0,6297	0,0000	$-\infty$			
4	0,7904	1,0287	0,7904	0,0000	$-\infty$		
5	0,9127	1,3198	1,3198	0,9127	0,0000	$-\infty$	
6	1,0108	1,5478	1,7187	1,5478	1,0108	0,0000	$-\infty$
7	1,0924	1,7344	2,0380	2,0380	1,7344	1,0924	0,0000

$\varphi(x)$ — функция плотности стандартного нормального распределения, $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального распределения, $d_1 = v^{n-1,1} + c_{N-n+1}$, $1 \leq n \leq N$, $v^{0,1} = -\infty$.

Аналогично,

$$\begin{aligned}
v^{n,k-i+1} &= \mathbf{E}(\max\{v^{n-1,k-i} + y_{N-n+1}, v^{n-1,k-i+1}\}) \\
&= \mathbf{E}(\max\{v^{n-1,k-i} + \xi_{N-n+1} - c_{N-n+1}, v^{n-1,k-i+1}\}) \\
&= \mathbf{E}(\max\{\xi_{N-n+1}, v^{n-1,k-i+1} - v^{n-1,k-i} + c_{N-n+1}\}) + v^{n-1,k-i} - c_{N-n+1}.
\end{aligned}$$

Продолжая равенство, находим, что

$$\begin{aligned}
v^{n,k-i+1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \max\{x, d_2\} g(x) dx + v^{n-1,k-i} - c_{N-n+1} \\
&= \int_{-\infty}^{d_2} d_2 g(x) dx + \int_{d_2}^{\infty} x g(x) dx + v^{n-1,k-i} - c_{N-n+1} \\
&= d_2 \Phi\left(\frac{d_2 - \mu}{\sigma}\right) + \left(\sigma \varphi\left(\frac{d_2 - \mu}{\sigma}\right) + \mu \Phi\left(-\frac{d_2 - \mu}{\sigma}\right)\right) + v^{n-1,k-i} - c_{N-n+1} \\
&= \sigma \varphi\left(\frac{d_2 - \mu}{\sigma}\right) + (d_2 - \mu) \Phi\left(\frac{d_2 - \mu}{\sigma}\right) + \mu + v^{n-1,k-i} - c_{N-n+1} \\
&= \sigma \psi\left(\frac{v^{n-1,k-i+1} - v^{n-1,k-i} + c_{N-n+1} - \mu}{\sigma}\right) + \mu + v^{n-1,k-i} - c_{N-n+1},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
d_2 &= v^{n-1,k-i+1} - v^{n-1,k-i} + c_{N-n+1}, & k-i+1 \leq n \leq N, \\
v^{k-i,k-i+1} &= -\infty, & i = k-1, \dots, 1.
\end{aligned}$$

В табл. 2 представлены значения цены $v^{L,l}$ с $l, l \leq 7$, остановками и $L, L \leq 7$, шагами при $c_n = 0$, $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

Если $N = 7$, $l = 2$, то ожидаемый выигрыш $v = v^{7,2} = 1,7344$. Оптимальное многократное правило остановки $\tau^* = (\tau_1^*, \tau_2^*)$ имеет структуру, где

$$\begin{aligned}
\tau_1^* &= \min\{m_1: 1 \leq m_1 \leq 6, y_{m_1} \geq v^{7-m_1,2} - v^{7-m_1,1}\}, \\
\tau_2^* &= \min\{m_2: \tau_1^* < m_2 \leq 7, y_{m_2} \geq v^{7-m_2,1}\}.
\end{aligned}$$

В частности, если мы наблюдаем следующую последовательность $\{y_n, n = 1, \dots, 7\}$:

$$-0,1364, \quad 0,1139, \quad 1,0668, \quad 0,0593, \quad -0,0956, \quad -0,8323, \quad 0,2944,$$

то

$$m_1 = 3 \quad (\text{потому что } y_3 = 1,0668 \geq v^{4,2} - v^{4,1} = 1,0287 - 0,7904 = 0,2383),$$

$$m_2 = 7 \quad (\text{потому что } y_7 = 0,2944 \geq v^{0,1} = -\infty).$$

Это дает выигрыш $1,0668 + 0,2944 = 1,3612$.

Список литературы

1. Чао И., Роббинс Г., Сигмунд Д., *Теория оптимальных правил остановки*. Наука, Москва, 1977.
2. Gabor C. R., Halliday T. R., Sequential mate choice by multiply mating smooth newts: females become more choosy. *Behavioral Ecology* (1997) **8**, 162–166.
3. Haggstrom G., Optimal stopping and experimental design. *Ann. Math. Statist.* (1966) **37**, 7–29.
4. Николаев М. Л., Обобщенные последовательные процедуры. *Литов. матем. сб.* (1979) **19**, №3, 35–44.
5. Николаев М. Л., О критерии оптимальности обобщенной последовательной процедуры. *Литов. матем. сб.* (1981) **21**, №3, 75–82.
6. Николаев М. Л., Оптимальные правила многократной остановки. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (1998) **5**, №2, 309–348.
7. Николаев М. Л., Об оптимальной многократной остановке марковских последовательностей. *Теория вероятностей и ее применения* (1998) **43**, №2, 374–382.
8. Pitcher T. E., Neff B. D., Rodd F. H., Rowe L., Multiple mating and sequential mate choice in guppies: females trade up. *Proc. Royal Soc. B: Biological Sci.* (2003) **270**, 1623–1629.

Статья поступила 14.03.2007.