Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Шаповалов, Цикловая структура случайного неоднородного гиперграфа на докритическом этапе эволюции, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 4, 52–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm977>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:29:36

Цикловая структура случайного неоднородного гиперграфа на докритическом этапе эволюции

© 2007 г. А. В. Шаповалов

Рассматривается случайный неоднородный гиперграф с n вершинами и $M = M(n)$ ребрами, причем $M_i = M_i(n)$ ребер состоят из i вершин,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_i/M = c_i, \quad c_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, m, \\ c_0 + c_1 + \dots + c_m = 1, \quad M = M_0 + M_1 + \dots + M_m.$$

Выбор вершин для каждого ребра осуществляется случайно, равномерно из n возможных по схеме с возвращением. При условии, что

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{n} < \left(\sum_{i=2}^m c_i i(i-1) \right)^{-1},$$

показано, что вероятность того, что случайный гиперграф состоит из гипердеревьев и компонент с одним циклом, стремится к единице при $n \rightarrow \infty$. Аналогичные результаты для случайных графов и случайных однородных гиперграфов были получены ранее.

1. Введение

Эволюцией случайного гиперграфа, имеющего n вершин и M ребер, называется изменение его асимптотической структуры при $n, M \rightarrow \infty$ с ростом отношения M/n . В [10] было выяснено, что цикловая структура случайного графа при $n \rightarrow \infty$, $M \sim cn$, $0 < c < 1/2$ достаточно проста: со стремящейся к единице вероятностью он состоит из деревьев и компонент с одним циклом. При прохождении отношением $M(n)/n$ точки $1/2$ вышеуказанное свойство цикловой структуры утрачивается и происходит скачок размера наибольшей компоненты. Соотношение $1/2$ для случайного графа было названо критической точкой.

В работе выявлена аналогичная критическая точка эволюции случайного неоднородного гиперграфа и показано, что на докритическом этапе его эволюции со стремящейся к единице вероятностью он состоит из гипердеревьев (то есть связных гиперграфов без циклов) и компонент с одним циклом. Результаты такого вида для случайных графов имеются, в частности, в работах [3, 4, 5, 9, 10], для случайных однородных гиперграфов — в [1, 7]. Определения из теории гиперграфов можно найти в [2, 6, 7, 8].

2. Теорема о цикловой структуре случайного неоднородного гиперграфа

Изучаемый случайный гиперграф имеет n вершин и M ребер. Рангом ребра будем называть число инцидентных ему вершин. Пусть $m \geq 2$, и заданы константы $c_0, c_1, \dots, c_m$ такие, что $0 \leq c_0 < 1$, $0 \leq c_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, $c_0 + \dots + c_m = 1$. Множество реализаций случайного гиперграфа $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$, где $\bar{M} = (M_0, M_1, \dots, M_m)$, состоит из гиперграфов с множеством вершин X и M ребрами, из которых M_i имеют ранг i , $i = 0, 1, \dots, m$, $m \geq 1$, $|X| = n$, $M_0 + M_1 + \dots + M_m = M$. Вершины в ребрах неупорядочены, ребра с одинаковыми рангами различимы (или упорядочены, занумерованы). Выбор i вершин для каждого ребра ранга i , $i = 1, 2, \dots, m$, осуществляется независимо, случайно и равновероятно из n вершин по схеме с возвращением. Вероятности всех реализаций одинаковы и равны $\prod_{i=1}^m \binom{n+i-1}{i}^{-M_i}$.

Свойства случайного гиперграфа изучаются при $n \rightarrow \infty$, когда числа ребер зависят от n следующим образом: $M = M(n)$, $M_i = 0$ при $c_i = 0$ и $M_i \sim c_i M$ при $c_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Далее все асимптотические формулы приводятся при $n \rightarrow \infty$, используются обозначения $(n)_k = n(n-1)\dots(n-k+1)$, $[x]$ — целая часть числа x .

Гиперграф называется **I-графом**, если он имеет l_i ребер ранга i , $i = 0, 1, \dots, m$, где $\mathbf{I} = (l_0, l_1, \dots, l_m)$ (см. [8]). Для **I-графов** будем полагать, что $l_0 + l_1 + \dots + l_m = l$. Ребра рассматриваемых гиперграфов являются мультимножествами. Если в ребре имеется ровно $r \geq 1$ вершин x_i , то число r будем называть кратностью вершины x_i в этом ребре. Будем говорить, что ребро простое, если в нем все вершины имеют кратность единица, и особое в противном случае. Простой цепью будем называть гиперграф, образованный последовательностью ребер $Y_1, \dots, Y_t$, в которой все ребра простые и имеют ранг два или больше, пары ребер Y_i, Y_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, t-1$, имеют по одной общей вершине, пара Y_1, Y_t — не более одной общей вершины, остальные пары ребер не имеют общих вершин. Простым циклом будем называть цепь вышеуказанного вида при $t \geq 3$, в которой ребра Y_1, Y_t имеют одну общую вершину; **I-циклом** будем называть **I-граф**, являющийся простым циклом, содержащим цикл длины l . Почти все реализации случайного гиперграфа обладают (не обладают) свойством Q , если вероятность $\mathbf{P}(Q)$ этого свойства, равная сумме вероятностей реализаций случайного гиперграфа, обладающих свойством Q , стремится к единице (к нулю) при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 1. При условии, что

$$M \sim cn, \quad 0 < c < c^* = \frac{1}{c_2(2)_2 + c_3(3)_2 + \dots + c_m(m)_2}, \quad c_2 + \dots + c_m > 0, \quad (1)$$

почти все реализации случайного гиперграфа $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$ состоят из гипердеревьев и компонент с одним циклом.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда

$$M_j = [c_j M] = [cc_j n], \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad M_0 = M - M_1 - \dots - M_m. \quad (2)$$

Это позволит использовать соотношения $0 \leq M_j - [cc_j n] < 1$, $j = 1, 2, \dots, m$. Будем обозначать s_i число вершин в ребре Y_i , $s_{i,j}$ — число вершин в пересечении ребер Y_i и Y_j , $i \neq j$, — $s_{i,j,k}$ число вершин в пересечении ребер Y_i, Y_j и Y_k , где i, j, k — различные числа.

Рис. 1.

В соответствии с теоремой 1 работы [8] о пороговой функции класса конечных подграфов, можно сделать вывод, что любой фиксированный гиперграф с двумя и более циклами имеет пороговую функцию большего порядка, чем n . В необходимых случаях в доказательстве будем ограничиваться ссылкой на эту теорему.

В реализациях рассматриваемого случайного гиперграфа циклы могут быть образованы следующими гиперграфами: 1-цикл; пара ребер, пересекающихся по двум и более вершинам; особое ребро; простая цепь в сочетании с предыдущими гиперграфами.

Для доказательства теоремы последовательно рассмотрим пять видов подграфов, которые могут содержать компоненты с двумя или более циклами (более подробные описания этих подграфов приведены далее):

- (1) пары ребер, пересекающиеся по трем и более вершинам; ребро, в котором имеется вершина с кратностью не менее трех или не менее двух вершин имеют кратность не менее двух (рис. 1);
- (2) компонента, имеющая два подграфа следующих видов: пара ребер, пересекающихся по двум вершинам, или ребро, в котором одна вершина имеет кратность два, а остальные — кратность, равную единице;
- (3) подграф, имеющий не менее двух циклов и содержащий подграф только одного из двух приведенных в предыдущем пункте видов;
- (4) два цикла, соединенных простой цепью — пенсне (рис. 4);
- (5) простой цикл с простой перемычкой (рис. 5–7).

Покажем, что среднее значение случайной величины ζ , равной числу подграфов соответствующего вида, является бесконечно малой величиной, откуда с помощью неравенства Маркова сделаем вывод, что почти все реализации рассматриваемого случайного гиперграфа не имеют таких подграфов, то есть $\mathbf{P}(\zeta \geq 1) = o(1)$, так как

$$\mathbf{P}(\zeta \geq 1) \leq \mathbf{E}\zeta, \quad \mathbf{E}\zeta = o(1), \quad \zeta \geq 0.$$

На рисунках кратность вершины приводится в нижнем индексе: обозначение $\bullet_{\geq k}$ соответствует вершине, имеющей кратность не менее k , $k = 2, 3, \dots$, обозначение $\bullet_2$ соответствует вершинам, имеющим кратность 2.

Переходим к рассмотрению подграфов-компонент с двумя и более циклами.

1. Компоненты, содержащие пары ребер, пересекающиеся по трем и более вершинам, или ребро, в котором одна или несколько вершин имеют кратность не менее трех или не менее двух вершин имеют кратность не менее двух (см. рис. 1).

Подграф $H_1^{(1)}$ состоит из двух ребер, имеющих более двух общих вершин (ребра могут быть особыми). Подграф $H_1^{(2)}$ состоит из одного ребра, в котором по крайней мере одна

Рис. 2.

вершина имеет кратность не менее трех. В соответствии со следствиями 2 и 5 статьи [8] почти все реализации случайного гиперграфа в условиях теоремы не имеют таких подграфов.

Далее в доказательстве рассматриваются компоненты, не содержащие пар ребер, пересекающихся по трем и более вершинам, а также ребер, имеющих вершину с кратностью больше двух или две вершины с кратностями, большими единицы. В этих случаях любая пара ребер может иметь в пересечении не более двух вершин, а число различных вершин в каждом ребре (как элементов X) равно рангу этого ребра, либо на единицу меньше ранга этого ребра.

2. Рассмотрим компоненты, имеющие два подграфа следующих видов: пара ребер, пересекающихся по двум вершинам; особое ребро, в котором ровно одна вершина имеет кратность два, а остальные — кратность, равную единице.

Случай, когда в компоненте указанные подграфы двух видов либо не имеют общих вершин и соединены простой цепью, либо имеют ровно одну вершину в пересечении, рассматривается далее в п. 4 доказательства данной теоремы (гиперграфы $H_4^{(t)}$ при $t = 12, 13, \dots, 21$, см. рис. 4).

Тогда в этом пункте доказательства остается перебрать следующие варианты (см. рис. 2):

- два особых ребра вида 2 с двумя вершинами в пересечении (гиперграф $H_2^{(1)}$);
- одно простое и одно особое ребро вида 2 с двумя вершинами в пересечении (гиперграф $H_2^{(2)}$);
- подграф вида 1 и простое ребро, имеющее две общих вершины с одним из первых двух ребер (возможно несколько вариантов, один из них — $H_2^{(3)}$);

- особое ребро и подграф вида 1, имеющий не менее двух общих вершин с этим особым ребром (возможно несколько вариантов, один из них — $H_2^{(4)}$);
- два подграфа вида 1, имеющие непустое пересечение по вершинам (на рис. 2 представлен только один из нескольких возможных вариантов — $H_2^{(5)}$, в котором максимально возможное число вершин).

Отметим, что вершины с кратностью более единицы могут как принадлежать, так и не принадлежать пересечению ребер. На рис. 2 изображены варианты, когда они не принадлежат пересечениям ребер.

В соответствии с теоремой 1 статьи [8], почти все реализации рассматриваемого случайного гиперграфа не имеют подграфов, изоморфных перечисленным в этом пункте доказательства конечным гиперграфам (их конечное число), имеющим два или более циклов.

3. Перейдем к оценке числа компонент в реализациях случайного гиперграфа $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$, имеющих не менее двух циклов и содержащих либо пару пересекающихся по двум вершинам ребер (в терминологии п. 2 доказательства — подграф вида 1), либо особое ребро, в котором одна вершина имеет кратность два. С учетом предыдущей части доказательства можно ограничиться перебором вариантов, в которых особое ребро и каждое из ребер гиперграфа вида 1 имеет не более одной общей вершины с остальными ребрами.

На рис. 3 изображены гиперграфы, содержащие пару пересекающихся по двум вершинам ребер и содержащие ребро, в котором одна вершина имеет кратность два (за исключением вариантов, рассматриваемых в п. 4 доказательства).

3.1. Компонента связности имеет ребра $Y_1, \dots, Y_l$, образующие цикл длины l . При этом в образовании цикла участвуют все ребра: $s_{1,2} = 2$, $s_{i,i+1} = 1$, $i = 2, 3, \dots, l-2$, $s_{l,1} = 1$, $l \geq 3$. Остальные пары ребер не имеют общих вершин. Обозначим образуемый ребрами $Y_1, \dots, Y_l$ гиперграф $H_3^{(1)} = H_{3,l}^{(1)}$. Удаление из гиперграфа $H_3^{(1)}$ одного из ребер Y_1 или Y_2 , имеющих две общие вершины, разрывает цикл. Из определения $H_3^{(1)}$ следует, что $s_1 \geq 3$.

Теперь рассмотрим варианты, когда удаление из гиперграфа ребра Y_1 , имеющего две общие вершины с ребром Y_2 , не разрывает цикл. Компонента имеет простой цикл, образованный ребрами $Y_2, \dots, Y_l$. Ребра Y_1 и Y_2 имеют две общие вершины: $s_{1,2} = 2$, ребро Y_1 не имеет общих вершин с ребрами $Y_3, \dots, Y_{l-1}$. Разнообразие возможного количества общих вершин ребра Y_1 с ребрами Y_2 и Y_l может быть описано тремя различными вариантами.

3.2. $s_{1,3} = 0$, $s_{1,l} = s_{1,2,l} = 1$. Ребра $Y_1, \dots, Y_l$ образуют гиперграф $H_3^{(2)}$, $l \geq 4$.

3.3. $s_{1,3} = s_{1,l} = s_{1,2,3} = s_{1,2,l} = 1$. Ребра $Y_1, \dots, Y_l$ образуют гиперграф $H_3^{(3)}$, $l \geq 4$.

3.4. $s_{1,3} = s_{1,l} = 0$. Ребра $Y_1, \dots, Y_l$ образуют гиперграф $H_3^{(4)}$, $l \geq 4$.

3.5. Этот вариант (гиперграф $H_3^{(5)}$ на рис. 3) аналогичен рассмотренному выше варианту 3.1. Отличие заключается в том, что в пересечении ребер Y_1 и Y_2 не две вершины, а одна вершина, которая имеет в ребре Y_1 кратность 2, а в ребре Y_2 кратность 1 (это обозначается символом $\bullet_2\bullet$).

3.6. Этот вариант совпадает с предыдущим за исключением того, что ребра Y_1 и Y_2 пересекаются по вершине, имеющей кратность единица в обоих этих ребрах (гиперграф $H_3^{(6)}$ на рис. 3).

Рис. 3.

3.7. Подграф вида 1 (то есть пара ребер Y_{l-1}, Y_l , имеющих две вершины в пересечении: $s_{l,l-1} = 2$), либо особое ребро Y_l , имеющее вершину с кратностью два в нем, соединены простой цепью с простым циклом. Этот случай относится к подграфу вида пенсне и рассмотрен в п. 4 доказательства (варианты 4.3–4.6). Если длина соединяющей простой цепи равна нулю, то подграф вида 1 или особое ребро имеют ровно одну общую вершину с упомянутым простым циклом.

Пусть ранги ребер $Y_1, \dots, Y_l$ в гиперграфах $H_3^{(t)}$, $t = 1, 2, \dots, 6$, равны $s_1, s_2, \dots, s_l$ соответственно, $s_i \geq 2$, $i = 1, 2, \dots, l$. В этих гиперграфах число ребер не меньше 4, за исключением первого, пятого и шестого, для которых $l \geq 3$. Рассмотрим гиперграфы $H_3^{(t)}$, $t \in \{1, 5, 6\}$, при $l = 3, 4$ и $H_3^{(t)}$, $t \in \{2, 3, 4\}$, при $l = 4$. В соответствии с теоремой 1 статьи [8], почти все реализации $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$ не имеют подграфов, изоморфных вышеперечисленным гиперграфам, так как они конечны и имеют более одного цикла. Будем далее полагать, что в рассматриваемых гиперграфах $l \geq 5$.

Из приведенных определений следует, что в гиперграфе $H_3^{(1)}$ ранги $s_1 \geq 3$, $s_2 \geq 3$; в $H_3^{(2)}$ ранг $s_2 \geq 3$; в $H_3^{(4)}$ ранг $s_2 \geq 4$; в $H_3^{(5)}$ и $H_3^{(6)}$ ранг $s_1 \geq 3$; они имеют

$$k = \sum_{i=1}^l (s_i - 1) - 1 = \sum_{i=2}^m l_i (i - 1) - 1$$

вершин, где l_i — число ребер ранга i , $i = 2, \dots, m$; $l_2 + \dots + l_m = l$ — общее число ребер.

Для среднего значения случайной величины $\zeta(H_k^{(t)})$, равной числу $H_k^{(t)}$ -графов в реализациях $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$, справедлива следующая формула (здесь и далее $a(H_k^{(t)})$ — порядок группы автоморфизмов гиперграфа $H_k^{(t)}$):

$$\mathbf{E}\zeta(H_k^{(t)}) = \binom{n}{k} \frac{k!}{a(H_k^{(t)})} (M_2)_{l_2} \dots (M_m)_{l_m} \binom{n+1}{2}^{-l_2} \dots \binom{n+m-1}{m}^{-l_m}. \quad (3)$$

Действительно, $\binom{n}{k}$ — число различных вариантов выбора k вершин для подграфа, изоморфного $H_k^{(t)}$; $k!/a(H_k^{(t)})$ — число различных $H_k^{(t)}$ -графов на фиксированных k вершинах; $(M_i)_{l_i}$ — число вариантов выбора упорядоченных меток для ребер ранга i , $i = 2, \dots, m$; $\binom{n+1}{2}^{-l_2} \dots \binom{n+m-1}{m}^{-l_m}$ — нормирующий множитель.

В случае $H_3^{(1)}$ справедлива формула

$$a(H_3^{(1)}) = \delta(H_3^{(1)}) (s_1 - 3)! 2! (s_2 - 3)! \prod_{i=3}^l (s_i - 2)!.$$

Здесь произведение $(s_1 - 3)! 2! (s_2 - 3)! \prod_{i=3}^l (s_i - 2)!$ обусловлено возможностью перестановки вершин в ребрах, которые инцидентны только одному ребру, причем в первых двух ребрах их $s_1 - 3$ и $s_2 - 3$ соответственно, а в остальных — на 2 меньше ранга ребра. Множитель $2!$ отражает факт возможности отображения друг в друга двух вершин в пересечении первого и второго ребер. Величина $\delta(H_3^{(1)})$ определяется следующим образом:

$$\delta(H_3^{(1)}) = \begin{cases} 2, & \text{если } s_1 = s_2, s_{3+i} = s_{l-i}, i = 0, 1, \dots, \lfloor l - 2/2 \rfloor, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Она отражает факт возможного автоморфизма гиперграфа $H_3^{(1)}$, при котором ребра $Y_2, Y_3, \dots, Y_{l-1}, Y_l, Y_1$ отображаются в $Y_1, Y_l, Y_{l-1}, \dots, Y_3, Y_2$ соответственно. Это возможно тогда и только тогда, когда эти пары ребер имеют одинаковые ранги.

Учитывая, что $s_i \leq m$, получаем, что

$$a(H_3^{(1)}) \geq \frac{1}{(s_1 - 2)(s_2 - 2)} \prod_{i=1}^l (s_i - 2)! \geq \frac{1}{m^2} \prod_{i=2}^m ((i - 2)!)^{l_i}.$$

Аналогично убеждаемся, что для $t = 1, 2, \dots, 6$

$$a(H_3^{(t)}) \geq \frac{1}{m^2} \prod_{i=2}^m ((i - 2)!)^{l_i}.$$

Подставим эту формулу в выражения для средних значений случайных величин $\zeta(H_3^{(t)})$, $t = 1, 2, \dots, 6$, домножим на $l!/(l_2! \dots l_m!)$ и просуммируем по целым неотрицательным $l_2, \dots, l_m$, для которых $l_2 + \dots + l_m = l$. В результате получаем верхнюю оценку для средних значений случайных величин $\zeta_{3,l}^{(t)}$, равных числу $H_3^{(t)}$ -графов в реализациях $M \hat{G}_{n,\bar{M}}$ при всех возможных наборах $s_1, \dots, s_l$ рангов ребер $Y_1, \dots, Y_l$ для $t = 1, 2, \dots, 6$, равную

$$\mathbf{E} \zeta_{3,l}^{(t)} \leq m^2 (n)_k n^{\sum_{i=2}^m l_i} \sum_{l_2 + \dots + l_m = l} \frac{l!}{l_2! \dots l_m!} \frac{c^l ((2)_2 c_2)^{l_2} \dots ((m)_2 c_m)^{l_m}}{((n + 1)_2)^{l_2} \dots ((n + m - 1)_m)^{l_m}}.$$

Порядок величины n в последнем выражении равен -1 , так как

$$k + \sum_{i=2}^m l_i - \sum_{i=2}^m l_i i = -1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \zeta_{3,l}^{(t)} &\leq \frac{m^2}{n} \sum_{l_2 + \dots + l_m = l} \left(\frac{l!}{l_2! \dots l_m!} c^l ((2)_2 c_2)^{l_2} \dots ((m)_2 c_m)^{l_m} \right) \\ &= \frac{m^2}{n} c^l ((2)_2 c_2 + \dots + (m)_2 c_m)^l. \end{aligned}$$

Принимая во внимание условие (1), находим, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l \geq 5} \mathbf{E} \zeta_{3,l}^{(t)} &\leq \frac{m^2}{n} \sum_{l \geq 5} c^l ((2)_2 c_2 + \dots + (m)_2 c_m)^l \\ &= \frac{m^2 (c((2)_2 c_2 + \dots + (m)_2 c_m))^5}{n(1 - c((2)_2 c_2 + \dots + (m)_2 c_m))}. \end{aligned}$$

Тогда для случайной величины $\zeta_3^{(t)} = \sum_{l \geq 5} \zeta_{3,l}^{(t)}$ справедлива оценка

$$\mathbf{E} \zeta_3^{(t)} = O(1/n) = o(1), \quad t = 1, 2, \dots, 6.$$

Отсюда с помощью неравенства Маркова убеждаемся, что почти все реализации случайного гиперграфа $M \hat{G}_{n,\bar{M}}$ не имеют $H_3^{(t)}$ -графов для $t = 1, 2, \dots, 6$.

4. Рассмотрим случай, когда два независимых цикла соединены простой цепью. Гиперграф такого вида будем обозначать $H_4 = H_{4,l^{(1)},l^{(2)},l^{(3)}}$, где $l^{(1)}$ и $l^{(2)}$ — длины первого и второго циклов, соединенных цепью из $l^{(3)}$ ребер. Цикл длины $l^{(i)}$ состоит из ребер $Y_1^{(i)}, Y_2^{(i)}, \dots, Y_{l^{(i)}}^{(i)}$ с рангами $s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, \dots, s_{l^{(i)}}^{(i)}$, и имеет $l_j^{(i)}$ ребер ранга j , $j = 2, \dots, m$, $i = 1, 2$. Цепь состоит из ребер $Y_1^{(3)}, Y_2^{(3)}, \dots, Y_{l^{(3)}}^{(3)}$, имеющих ранги $s_1^{(3)}, s_2^{(3)}, \dots, s_{l^{(3)}}^{(3)}$, и имеет $l_j^{(3)}$ ребер ранга j , $j = 2, \dots, m$. Пусть $l^{(1)} + l^{(2)} + l^{(3)} = l$. Ребра $Y_1^{(3)}, Y_{l^{(3)}}^{(3)}$ инцидентны ребрам $Y_1^{(1)}, Y_{l^{(1)}}^{(1)}$ соответственно и имеют с ними по одной общей вершине. Гиперграфы имеют $k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^m l_j^{(i)}(j-1) - 1$ вершин. Будем обозначать также $s_{i,j}^{(k,t)}$ число вершин в пересечении ребер $Y_i^{(k)}$ и $Y_j^{(t)}$, $k = 1, 2, 3$, $t = 1, 2, 3$; $s_{i,j,v}^{(k,t,r)}$ число вершин в пересечении ребер $Y_i^{(k)}, Y_j^{(t)}$ и $Y_v^{(r)}$, $k = 1, 2, 3$, $t = 1, 2, 3$, $r = 1, 2, 3$.

Первый цикл и его соединение с цепью может иметь шесть различных вариантов (см. рис. 4).

1.1. Цикл простой, $l^{(1)} \geq 3$. Ребро $Y_1^{(3)}$ инцидентно в первом цикле только ребру $Y_1^{(1)}$: $s_{1,1}^{(1,3)} = 1$, $s_{2,1}^{(1,3)} = s_{l^{(1)},1}^{(1,3)} = 0$, $s_1^{(1)} \geq 3$.

1.2. Цикл простой, $l^{(1)} \geq 3$. Ребро $Y_1^{(3)}$ имеет в первом цикле одну общую вершину с ребрами $Y_1^{(1)}$ и $Y_{l_1}^{(1)}$: $s_{1,1}^{(1,1)} = s_{1,1}^{(1,3)} = s_{l^{(1)},1}^{(1,3)} = s_{1,l^{(1)},1}^{(1,1,3)} = 1$.

1.3. Цикл состоит из двух ребер с двумя общими вершинами, $l^{(1)} = 2$. Ребро $Y_1^{(3)}$ инцидентно в первом цикле только ребру $Y_1^{(1)}$: $s_{1,1}^{(1,3)} = 1$, $s_{2,1}^{(1,3)} = s_{l^{(1)},1}^{(1,3)} = 0$, $s_1^{(1)} \geq 3$.

1.4. Цикл состоит из двух ребер с двумя общими вершинами, $l^{(1)} = 2$. Ребро $Y_1^{(3)}$ имеет в первом цикле одну общую вершину с обоими образующими его ребрами $Y_1^{(1)}$ и $Y_2^{(1)}$: $s_{1,2}^{(1,1)} = s_{1,1}^{(1,3)} = s_{2,1}^{(1,3)} = s_{1,2,1}^{(1,1,3)} = 1$.

1.5. Цикл состоит из особого ребра $Y_1^{(1)}$, которое имеет вершину с кратностью два в этом ребре. Ребро $Y_1^{(3)}$ соединяющей циклы цепи пересекается с ребром $Y_1^{(1)}$ первого цикла по одной вершине, имеющей кратность один в ребре $Y_1^{(1)}$: $s_{1,2}^{(1,1)} = 1$, $l^{(1)} = 1$.

1.6. Цикл такой же, как и в предыдущем варианте, но ребро $Y_1^{(3)}$ пересекается с ребром $Y_1^{(1)}$ цикла по одной вершине, имеющей кратность два в ребре $Y_1^{(1)}$ цикла $s_{1,2}^{(1,1)} = 1$, $l^{(1)} = 1$.

Аналогичным образом можно описать разнообразие видов второго цикла и его соединения с цепью. Присвоим им номера 2.1, ..., 2.6 соответственно. Имеются следующие варианты сочетаний первого и второго циклов:

4.1	(1.1, 2.1)	4.8	(1.2, 2.3) вкл. (1.3, 2.2)	4.15	(1.3, 2.6) вкл. (1.6, 2.3)
4.2	(1.1, 2.2) вкл. (1.2, 2.1)	4.9	(1.2, 2.4) вкл. (1.4, 2.2)	4.16	(1.4, 2.4)
4.3	(1.1, 2.3) вкл. (1.3, 2.1)	4.10	(1.2, 2.5) вкл. (1.5, 2.2)	4.17	(1.4, 2.5) вкл. (1.5, 2.4)
4.4	(1.1, 2.4) вкл. (1.4, 2.1)	4.11	(1.2, 2.6) вкл. (1.6, 2.2)	4.18	(1.4, 2.6) вкл. (1.6, 2.4)
4.5	(1.1, 2.5) вкл. (1.5, 2.1)	4.12	(1.3, 2.3)	4.19	(1.5, 2.5)
4.6	(1.1, 2.6) вкл. (1.6, 2.1)	4.13	(1.3, 2.4) вкл. (1.4, 2.3)	4.20	(1.5, 2.6) вкл. (1.6, 2.5)
4.7	(1.2, 2.2)	4.14	(1.3, 2.5) вкл. (1.5, 2.3)	4.21	(1.6, 2.6)

Обозначим описываемые этими условиями гиперграфы $H_4^{(t)}$, $t = 1, 2, \dots, 21$. Во всех случаях $l^{(3)}$ может принимать значение ноль.

Для среднего значения случайной величины $\zeta(H_4^{(t)})$, равной числу $H_4^{(t)}$ -графов в реализациях $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$, справедлива формула (3).

Рис. 4.

Порядки групп автоморфизмов рассматриваемых гиперграфов могут быть разными. Приведем основные факторы, влияющие на значение числа автоморфизмов таких гиперграфов. Если выбранные k вершин переупорядочить $k!$ возможными способами, получим некоторый набор гиперграфов, среди которых имеются одинаковые. Следующие преобразования оставляют или могут оставлять в некоторых случаях гиперграф без изменений.

I. При перестановке вершин, инцидентных одному и только одному ребру и имеющих в нем кратность единица, получаем тот же гиперграф. Так, например, при всех $(s_j^{(3)} - 2)!$ перестановках $s_j^{(3)} - 2$ вершин, принадлежащих только простому ребру $Y_j^{(3)}$, входящему в соединяющую циклы цепь, гиперграф остается прежним. Поэтому во всех случаях в формулу для порядка группы автоморфизмов будет входить величина $\prod_{j=1}^{l^{(3)}} (s_j^{(3)} - 2)!$.

II. Если первый (второй) цикл имеет вид 1.2, 1.4 (2.2, 2.4), то по той же причине будет присутствовать множитель $\prod_{j=1}^{l^{(i)}} (s_j^{(i)} - 2)!$ при $i = 1$ ($i = 2$). Случаи циклов вида 1.1, 1.3 и 2.1, 2.3 отличаются тем, что в них ребра $Y_1^{(1)}$ и $Y_1^{(2)}$ имеют не $s_1^{(1)} - 2$ и $s_1^{(2)} - 2$ вершин, принадлежащих только этим ребрам, а на одно меньше. Поэтому в формуле для порядка группы автоморфизмов гиперграфа в этих случаях будут присутствовать величины $(s_1^{(i)} - 3)! \prod_{j=2}^{l^{(i)}} (s_j^{(i)} - 2)!$, $i = 1, 2$. Пятые варианты циклов дают множители вида $(s_1^{(i)} - 3)!$, шестые — $(s_1^{(i)} - 2)!$, $i = 1, 2$.

III. В случаях 1.1, 1.2, 1.4, 2.1, 2.2, 2.4 могут появляться коэффициенты вида $2!$, обусловленные симметричностью циклов. Так, если в случаях 1.1 и 2.1 $s_{j+1}^{(i)} = s_{l^{(i)}-j+1}^{(i)}$, $j = 1, 2, \dots, \lfloor l^{(i)}/2 \rfloor$, то при отображении ребер $Y_{j+1}^{(i)}, Y_{l^{(i)}-j+1}^{(i)}$, $j = 1, 2, \dots, \lfloor l^{(i)}/2 \rfloor$ друг в друга, а $Y_1^{(i)}$ в себя, получается изоморфный исходному гиперграф ($i = 1$ и $i = 2$). В случаях 1.2, 1.4, а также 2.2, 2.4, если $s_j^{(i)} = s_{l^{(i)}-j+1}^{(i)}$, $j = 1, 2, \dots, \lfloor l^{(i)}/2 \rfloor$, то при отображении ребер $Y_j^{(i)}, Y_{l^{(i)}-j+1}^{(i)}$, $j = 1, 2, \dots, \lfloor l^{(i)}/2 \rfloor$, друг в друга также получается изоморфный исходному гиперграф ($i = 1$ и $i = 2$).

В случаях 1.3, 2.3 всегда присутствует множитель $2!$, обусловленный возможностью перестановки двух общих вершин ребер цикла, после которой получается гиперграф, изоморфный исходному. Четвертые варианты циклов не дают такого множителя, так как одна вершина цикла инцидентна соединяющей циклы цепи, а вторая нет. Пятые и шестые варианты также не дают такого множителя.

IV. Еще одна возможность построения автоморфизмов возникает в случаях, когда циклы имеют одинаковые номера $1.i$ и $2.i$, $i = 1, \dots, 6$. Для этого соединяющая циклы цепь должна иметь симметричный набор рангов ребер: $s_j^{(3)} = s_{l^{(3)}-j+1}^{(3)}$, $j = 1, 2, \dots, \lfloor l^{(3)}/2 \rfloor$. В этом случае она перейдет в себя при отображении ребер $Y_j^{(3)}, Y_{l^{(3)}-j+1}^{(3)}$ друг в друга, $j = 1, 2, \dots, \lfloor (l^{(3)} + 1)/2 \rfloor$. Кроме того, циклы должны быть изоморфны друг другу (следовательно, длины циклов равны, $l^{(1)} = l^{(2)}$), причем для $i = 1, 3, 5, 6$ при изоморфизме ребра с первыми номерами могут перейти только друг в друга, так как только они инцидентны ребрам соединяющей их цепи, а для $i = 2, 4$ ребра с первыми номерами могут перейти также в ребра с последними номерами. В первом случае такое условие имеет вид $s_j^{(1)} = s_j^{(2)}$, $j = 1, 2, \dots, l^{(1)}$, или $s_{j+1}^{(1)} = s_{l^{(2)}-j+1}^{(2)}$, $j = 1, 2, \dots, l^{(1)} - 1$, $s_1^{(1)} = s_1^{(2)}$. Во втором случае должны быть выполнены соотношения $s_j^{(1)} = s_j^{(2)}$, $j = 1, 2, \dots, l^{(1)}$, или $s_j^{(1)} = s_{l^{(2)}-j+1}^{(2)}$, $j = 1, 2, \dots, l^{(1)}$. В третьем случае условие имеет вид $s_j^{(1)} = s_j^{(2)}$,

$j = 1, 2$. В четвертом случае условием автоморфизма такого рода является последнее из приведенных условий, либо $s_1^{(1)} = s_2^{(2)}$, $s_2^{(1)} = s_1^{(2)}$. В пятом и шестом случаях условие простое: $s_1^{(1)} = s_1^{(2)}$.

Если же в первом, втором и четвертом случаях, кроме вышеприведенных условий симметрии один из циклов симметричен в смысле приведенных в п. III условий (следовательно, и второй цикл тоже), то добавляется вариант автоморфизмов, когда циклы не только переходят друг в друга, но и имеется по два варианта выбора направления обхода циклов.

Других возможностей для построения автоморфизмов рассматриваемые гиперграфы не дают. Для получения верхних оценок приведенных в формуле (3) средних значений достаточно получить нижние оценки порядков групп автоморфизмов $a(H_4^{(t)})$, $t = 1, 2, \dots, 21$, рассматриваемых гиперграфов. Воспользуемся приведенными выше замечаниями об автоморфизмах гиперграфов. Так, для $H_4^{(1)}$

$$a(H_4^{(1)}) = \prod_{i=1}^2 \left((s_1^{(i)} - 3)! \prod_{j=2}^{l^{(i)}} (s_j^{(i)} - 2)! \right) \prod_{k=1}^{l^{(3)}} (s_k^{(3)} - 2)! \delta(H_4^{(1)}).$$

Здесь величина $\delta(H_4^{(1)})$ обусловлена приведенными в п. III и IV причинами, ее минимальное значение равно 1, максимальное значение равно 8. Аналогично получаем остальные формулы. Для получения одной оценки для всех случаев, учтем, что

$$\delta(H_4^{(t)}) \geq 1, \quad (s_j^{(i)} - 3)! \geq \frac{1}{m} (s_j^{(i)} - 2)!$$

во всех случаях, а коэффициенты $2!$ отбросим. Тогда для $t = 1, 2, \dots, 21$

$$a(H_4^{(t)}) \geq \frac{1}{m^2} \prod_{i=1}^{l^{(1)}} (s_i^{(1)} - 2)! \prod_{j=1}^{l^{(2)}} (s_j^{(2)} - 2)! \prod_{k=1}^{l^{(3)}} (s_k^{(3)} - 2)!,$$

причем длины циклов $l^{(1)}, l^{(2)}$ в некоторых случаях могут принимать только значения один или два, но для простоты при получении верхних оценок средних значений случайных величин $\zeta(H_4^{(t)})$ будем считать, что они положительны. Учитывая, что

$$\prod_{j=1}^{l^{(i)}} (s_j^{(i)} - 2)! = \prod_{j=2}^m ((j-2)!)^{l_j^{(i)}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

получаем оценку

$$a(H_4^{(t)}) \geq \frac{1}{m^2} \prod_{i=1}^3 \prod_{j=2}^m ((j-2)!)^{l_j^{(i)}}. \quad (4)$$

Подставляя эту оценку вместо $a(H_4^{(t)})$ в формулу (3) для средних значений случайных величин $\zeta(H_4^{(t)})$, получаем, что

$$\mathbf{E} \zeta(H_4^{(t)}) \leq m^2 k! \binom{n}{k} \frac{\prod_{j=2}^m \left((M_j)_{(l_j^{(1)} + l_j^{(2)} + l_j^{(3)})} \binom{n+j-1}{j}^{-l_j^{(1)} - l_j^{(2)} - l_j^{(3)}} \right)}{\prod_{i=1}^3 \prod_{j=2}^m ((j-2)!)^{l_j^{(i)}}}.$$

Каждому набору $l_2^{(i)}, l_3^{(i)}, \dots, l_m^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, характеризующему ранги ребер в трех частях гиперграфа $H_4^{(i)}$, соответствует $\prod_{i=1}^3 l^{(i)}! / (l_2^{(i)}! \dots l_m^{(i)}!)$ способов задания рангов ребер этого гиперграфа. Домножив правую часть последнего неравенства на эту величину и просуммировав по целым неотрицательным $l_j^{(i)}$, для которых $\sum_{j=2}^m l_j^{(i)} = l^{(i)}$, получим верхнюю оценку для случайных величин $\zeta_{4,l^{(1)},l^{(2)},l^{(3)}}^{(t)}$, равных числу $H_4^{(t)}$ -графов в реализациях $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$ при всех возможных наборах $s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, \dots, s_{l^{(i)}}^{(i)}$ рангов ребер $Y_1^{(i)}, Y_2^{(i)}, \dots, Y_{l^{(i)}}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, для которых длина первого цикла равна $l^{(1)}$, второго — $l^{(2)}$, соединяющей их цепочки — $l^{(3)}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\zeta_{4,l^{(1)},l^{(2)},l^{(3)}}}^{(t)} &\leq m^2(n)_k n^{\sum_{j=2}^m (l_j^{(1)} + l_j^{(2)} + l_j^{(3)})} \\
&\times \prod_{i=1}^3 \sum_{l_2^{(i)} + \dots + l_m^{(i)} = l^{(i)}} \left(\frac{l^{(i)}!}{l_2^{(i)}! \dots l_m^{(i)}!} \frac{c^{l^{(i)}} ((2)_2 c_2)^{l_2^{(i)}} \dots ((m)_2 c_m)^{l_m^{(i)}}}{((n+1)_2)^{l_2^{(i)}} \dots ((n+m-1)_m)^{l_m^{(i)}}} \right) \\
&= m^2(n)_k \prod_{i=1}^3 \left(\sum_{l_2^{(i)} + \dots + l_m^{(i)} = l^{(i)}} \frac{l^{(i)}!}{l_2^{(i)}! \dots l_m^{(i)}!} \frac{c^{l^{(i)}}}{(n+1)^{l_2^{(i)} + l_3^{(i)} + \dots + l_m^{(i)}}} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{((2)_2 c_2)^{l_2^{(i)}} \dots ((m)_2 c_m)^{l_m^{(i)}}}{((n+2)_1)^{l_3^{(i)}} ((n+3)_2)^{l_4^{(i)}} \dots ((n+m-1)_{m-2})^{l_m^{(i)}}} \right) \\
&= m^2(n)_k c^{l^{(1)} + l^{(2)} + l^{(3)}} \sum_{\substack{l_2^{(i)} + \dots + l_m^{(i)} = l^{(i)} \\ l_2^{(2)} + \dots + l_m^{(2)} = l^{(2)} \\ l_2^{(3)} + \dots + l_m^{(3)} = l^{(3)}}} \left(\prod_{i=1}^3 \frac{l^{(i)}!}{l_2^{(i)}! \dots l_m^{(i)}!} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{((2)_2 c_2)^{l_2^{(1)} + l_2^{(2)} + l_2^{(3)}} \dots ((m)_2 c_m)^{l_m^{(1)} + l_m^{(2)} + l_m^{(3)}}}{(n+1)^{\sum_{i=1}^3 (l_2^{(i)} + l_3^{(i)} + \dots + l_m^{(i)})} ((n+2)_1)^{\sum_{i=1}^3 l_3^{(i)}} \dots ((n+m-1)_{m-2})^{\sum_{i=1}^3 l_m^{(i)}}} \right).
\end{aligned}$$

Так как

$$k - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^m l_j^{(i)} (j-1) = -1,$$

порядок величины n в последнем выражении равен -1 . Поэтому при $n > k$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\zeta_{4,l^{(1)},l^{(2)},l^{(3)}}}^{(t)} &\leq \frac{m^2}{n} \prod_{i=1}^3 \sum_{l_2^{(i)} + \dots + l_m^{(i)} = l^{(i)}} \left(\frac{l^{(i)}!}{l_2^{(i)}! \dots l_m^{(i)}!} c^{l^{(i)}} ((2)_2 c_2)^{l_2^{(i)}} \dots ((m)_2 c_m)^{l_m^{(i)}} \right) \\
&= \frac{m^2}{n} \prod_{i=1}^3 \left(c^{l^{(i)}} ((2)_2 c_2 + \dots + (m)_2 c_m)^{l^{(i)}} \right). \tag{5}
\end{aligned}$$

Рис. 5.

Учитывая условие (1), находим, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{l^{(1)} \geq 1 \\ l^{(2)} \geq 1 \\ l^{(3)} \geq 0}} \mathbf{E} \zeta_{4, l^{(1)}, l^{(2)}, l^{(3)}}^{(t)} &\leq \frac{m^2}{n-1} \sum_{\substack{l^{(1)} \geq 1 \\ l^{(2)} \geq 1 \\ l^{(3)} \geq 0}} \prod_{i=1}^3 \left(c^{l^{(i)}} ((2)_2 c_2 + \dots + (m)_2 c_m)^{l^{(i)}} \right) \\ &= \frac{m^2}{n-1} \frac{(c((2)_2 c_2 + \dots + (m)_2 c_m))^2}{(1 - c((2)_2 c_2 + \dots + (m)_2 c_m))^3}. \end{aligned}$$

Тогда для случайной величины ζ_4 , равной числу рассмотренных в этом пункте доказательства 21 видов подграфов в реализациях случайного гиперграфа $M \hat{G}_{n, \bar{M}}$ при $n \rightarrow \infty$ справедлива оценка $\mathbf{E} \zeta_4 = O(1/n) = o(1)$. С помощью неравенства Маркова убеждаемся, что почти все реализации случайного гиперграфа $M \hat{G}_{n, \bar{M}}$ не имеют рассмотренных связанных подграфов с двумя циклами.

5. Рассмотрим теперь случай, когда в простом цикле есть простая цепь — перемычка. Гиперграфы $H_5 = H_{5, l^{(1)}, l^{(2)}, l^{(3)}}$ такого вида изображены на рис. 5–7. Исходный простой цикл состоит из двух цепей длины $l^{(1)}$ и $l^{(2)}$, образованных с использованием последовательностей ребер $Y_1^{(i)}, Y_2^{(i)}, \dots, Y_{l^{(i)}}^{(i)}$, имеющих ранги $s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, \dots, s_{l^{(i)}}^{(i)}$, $i = 1, 2$. Будем называть эти цепи первой и второй соответственно, а перемычку третьей цепью. Третья цепь состоит из ребер $Y_1^{(3)}, Y_2^{(3)}, \dots, Y_{l^{(3)}}^{(3)}$, имеющих ранги $s_1^{(3)}, s_2^{(3)}, \dots, s_{l^{(3)}}^{(3)}$ соответственно. Ее первое и последнее ребра инцидентны первым ребрам первой и второй цепочек и имеют с ними ровно по одной общей вершине.

Пусть $l^{(1)} + l^{(2)} + l^{(3)} = l$, $l_j^{(i)}$ — число ребер ранга j в i -й цепи, $j = 2, \dots, m$, $i = 1, 2, 3$. Тогда $\sum_{j=2}^m l_j^{(i)} = l^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, и у гиперграфа $k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^m l_j^{(i)} (j-1) - 1$ вершин.

Как и выше, будем обозначать $s_{i,j}^{(k,t)}$ число вершин в пересечении ребер $Y_i^{(k)}$ и $Y_j^{(t)}$, $k = 1, 2, 3$, $t = 1, 2, 3$, $s_{i,j,v}^{(k,t,r)}$ число вершин в пересечении ребер $Y_i^{(k)}$, $Y_j^{(t)}$ и $Y_v^{(r)}$, $k = 1, 2, 3$, $t = 1, 2, 3$, $r = 1, 2, 3$.

Рис. 6.

Будем полагать, что третья цепь имеет общие вершины только с первой цепью, за исключением случая $l^{(1)} = 1$. При $l^{(1)} \geq 2$ ребро $Y_1^{(3)}$ третьей цепи может быть инцидентно ребру $Y_1^{(1)}$ двумя различными способами.

1.1. Ребро $Y_1^{(3)}$ в первой цепи пересекается только с ребром $Y_1^{(1)}$: $s_{1,1}^{(1,3)} = 1, s_{2,1}^{(1,3)} = 0, s_1^{(1)} \geq 3$ (вариант 1.1 на рис. 5).

1.2. Ребро $Y_1^{(3)}$ имеет в первом цикле одну общую вершину с ребрами $Y_1^{(1)}$ и $Y_2^{(1)}$: $s_{1,1}^{(1,3)} = s_{2,1}^{(1,3)} = s_{1,2,1}^{(1,1,3)} = 1$ (вариант 1.2 на рис. 6).

В случае $l^{(1)} = 1$ возможны следующие варианты.

1.3. Третья цепь с первой цепью имеет единственную общую вершину, которая принадлежит только ребру $Y_1^{(1)}$, либо пересечению ребер $Y_1^{(1)}$ и $Y_2^{(1)}$, $l^{(3)} \geq 3$. Этот вариант уже учтен в четвертом пункте доказательства при рассмотрении гиперграфов типа пенсне, для которых длина соединяющей два цикла цепочки равна нулю (варианты 4.1, 4.2, 4.7).

1.4. Третья цепь имеет две общих вершины с первой цепью, которые принадлежат ребру $Y_1^{(1)}$: $l^{(1)} = 1, l^{(3)} \geq 2, s_1^{(1)} \geq 4$ (см. рис. 7).

Отметим, что варианты, когда на рис. 7 вершина в пересечении ребер $Y_1^{(1)}$ и $Y_1^{(3)}$ принадлежит $Y_{l(2)}^{(2)}$ и/или вершина в пересечении ребер $Y_{l(3)}^{(3)}$ и $Y_1^{(1)}$ принадлежит $Y_1^{(2)}$, описываются в случаях $l^{(1)} = 2$ и $l^{(2)} = 3$.

Аналогичным образом описываются два варианта инцидентности ребра $Y_{l(3)}^{(3)}$ и первой цепи при $l^{(1)} \geq 2$.

2.1. Ребро $Y_{l(3)}^{(3)}$ пересекается во второй цепи только с ребром $Y_{l(1)}^{(1)}$: $s_{l(1),l(3)}^{(1,3)} = 1, s_{l(1)-1,l(3)}^{(1,3)} = 0, s_{l(1)}^{(1)} \geq 3$ (вариант 2.1 на рис. 5).

2.2. Ребро $Y_{l(3)}^{(3)}$ имеет в первом цикле одну общую вершину с ребрами $Y_{l(1)}^{(1)}$ и $Y_{l(1)-1}^{(1)}$: $s_{l(1),l(3)}^{(1,3)} = s_{l(1)-1,l(3)}^{(1,3)} = s_{l(1),l(1)-1,l(3)}^{(1,1,3)} = 1$ (вариант 2.2 на рис. 6).

Из приведенных возможных вариантов инцидентности цепей достаточно рассмотреть следующие соотношения:

5.1	(1.1, 2.1)	5.3	(1.2, 2.2)
5.2	(1.1, 2.2) вкл. (1.2, 2.1)	5.4	(1.4)

вариант 1.4 инцидентности первой и третьей цепей

Рис. 7.

Для упрощения формул расширим диапазон значений длин цепей: $l^{(1)} \geq 1$, $l^{(2)} \geq 0$, $l^{(3)} \geq 1$.

Обозначим описываемые этими условиями гиперграфы $H_5^{(t)}$, $t = 1, 2, 3, 4$. Для среднего значения случайной величины $\zeta(H_5^{(t)})$, равной числу $H_5^{(t)}$ -графов в реализациях случайного гиперграфа, справедлива формула (3).

Выше уже рассматривались факторы, влияющие на значение числа автоморфизмов гиперграфов. Поэтому выпишем оценки для порядков $a(H_5^{(t)})$ групп автоморфизмов гиперграфа $H_5^{(t)}$, $t = 1, 2, 3$, дав необходимые пояснения. Для $H_5^{(1)}$

$$a(H_5^{(1)}) = (s_1^{(1)} - 3)! \prod_{j=2}^{l^{(1)}-1} (s_j^{(1)} - 2)! (s_{l^{(1)}}^{(1)} - 3)! \prod_{i=2}^3 \prod_{k=1}^{l^{(i)}} (s_k^{(i)} - 2)! \delta(H_5^{(1)}).$$

Здесь величина $\delta(H_5^{(1)})$ больше единицы в случаях, когда гиперграф обладает определенной симметрией: ребра третьей цепи при автоморфизмах могут оставаться на месте, либо (при выполнении ограничений на ранги ребер) друг в друга перейдут первое и последнее, второе и предпоследнее и так далее. В обоих случаях ребра первой и второй цепей могут переходить либо в ребра своей цепи, либо в ребра другой цепи (за исключением первого и последнего ребер первой цепи, которые либо остаются на месте, либо переходят друг в друга). Минимальное значение $\delta(H_5^{(1)})$ равно 1, максимальное 4. Аналогично получаем остальные формулы. Используя оценки

$$(s_j^{(i)} - 3)! \geq \frac{1}{m} (s_j^{(i)} - 2)!, \quad (s_1^{(1)} - 4)! \geq \frac{1}{m^2} (s_1^{(1)} - 2)!, \quad \delta(H_5^{(1)}) \geq 1,$$

убеждаемся, что для $t = 1, 2, 3, 4$

$$a(H_5^{(t)}) \geq \frac{1}{m^2} \prod_{i=1}^3 \prod_{j=1}^{l^{(i)}} (s_j^{(i)} - 2)! = \frac{1}{m^2} \prod_{i=1}^3 \prod_{j=2}^m ((j-2)!)^{l_j^{(i)}}.$$

Последняя формула совпадает с формулой (4), полученной для гиперграфов вида $H_4^{(t)}$. Так как при получении оценки (5) были использованы только формулы (3) и (4), которые справедливы как для гиперграфов $H_4^{(t)}$, так и $H_5^{(t)}$, можно воспользоваться уже проведенными выкладками для гиперграфов $H_4^{(t)}$ и в имеющейся верхней оценке (5) заменить случайные величины $\zeta_{4,l^{(1)},l^{(2)},l^{(3)}}^{(t)}$ на случайные величины $\zeta_{5,l^{(1)},l^{(2)},l^{(3)}}^{(t)}$ для $t = 1, 2, 3, 4$, равные числам $H_5^{(t)}$ -графов в реализациях $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$ при всех допустимых рангах $s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, \dots, s_{l^{(i)}}^{(i)}$ ребер $Y_1^{(i)}, Y_2^{(i)}, \dots, Y_{l^{(i)}}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, для которых длина первой цепи равна $l^{(1)}$, второй $l^{(2)}$, соединяющей их цепи $l^{(3)}$.

Учитывая, что минимальные значения длин $l^{(1)}, l^{(2)}, l^{(3)}$ цепей равны 1, 0, 1, получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n-1) \sum_{\substack{l^{(1)} \geq 1 \\ l^{(2)} \geq 0 \\ l^{(3)} \geq 1}} \mathbf{E} \zeta_{5,l^{(1)},l^{(2)},l^{(3)}}^{(t)} &< m^2 \sum_{\substack{l^{(1)} \geq 1 \\ l^{(2)} \geq 0 \\ l^{(3)} \geq 1}} \prod_{i=1}^3 (c^{l^{(i)}} ((2)_2 c_2 + \dots + (m)_2 c_m)^{l^{(i)}}) \\ &\leq m^2 \frac{(c((2)_2 c_2 + \dots + (m)_2 c_m))^2}{(1 - c((2)_2 c_2 + \dots + (m)_2 c_m))^3}. \end{aligned}$$

Тогда для случайной величины ζ_5 , равной числу рассмотренных в этом пункте доказательства видов подграфов в реализациях случайного гиперграфа $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$, при $n \rightarrow \infty$ справедлива оценка $\mathbf{E} \zeta_5 = O(1/n)$. С помощью неравенства Маркова убеждаемся, что почти все реализации случайного гиперграфа $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$ не имеют рассмотренных в этом пункте доказательства связных подграфов с двумя циклами.

Пять рассмотренных вариантов подграфов покрывают разнообразие компонент реализаций случайного гиперграфа $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$, имеющих более одного цикла. Таким образом, утверждение теоремы доказано при условии (2). Покажем, что в общем случае оно тоже верно.

Учитывая, что выполнено условие (1), можно выбрать коэффициент $c^{(0)}$, удовлетворяющий условию $c < c^{(0)} < c^*$. Тогда для случайного гиперграфа $M\hat{G}_{n,\bar{M}^{(0)}}$ при $\bar{M}^{(0)} = (M_0^{(0)}, M_1^{(0)}, M_2^{(0)}, \dots, M_m^{(0)})$, в котором $M^{(0)} = M_0^{(0)} + M_1^{(0)} + \dots + M_m^{(0)}$ ребер, $M_j^{(0)} = \lfloor c_j^{(0)} M^{(0)} \rfloor = \lfloor c^{(0)} c_j M^{(0)} \rfloor$, $j = 1, 2, \dots, m$, $M_0^{(0)} = M^{(0)} - M_1^{(0)} - \dots - M_m^{(0)}$, выполнены условия доказанного варианта теоремы и справедливо ее утверждение. В соответствии с определением $M_j, M_j^{(0)}$ в случайных гиперграфах $M\hat{G}_{n,\bar{M}}, M\hat{G}_{n,\bar{M}^{(0)}}$ для всех n , начиная с некоторого n_1 , выполняются неравенства $0 \leq M_j \leq M_j^{(0)}$, $j = 1, \dots, m$. Следовательно, вероятность наличия в реализациях $M\hat{G}_{n,\bar{M}}$ свойства Q , заключающегося в наличии компонент с двумя и более циклами, не больше вероятности наличия этого свойства в реализациях $M\hat{G}_{n,\bar{M}^{(0)}}$. Этот факт легко доказывается с привлечением понятия монотонного свойства (которое не исчезает при добавлении ребер к гиперграфам), которым и является Q . Результатами такого рода являются теорема 1.2 статьи [6] и теорема 1 главы II работы [9]. Характер изменения числа ребер ранга ноль не влияет на вероятность свойства Q , так как его наличие или отсутствие не зависит от таких ребер, а вероятности реализаций рассматриваемых случайных гиперграфов не зависят от их числа.

Утверждение теоремы доказано.

Список литературы

1. Ванцян А. Г., Эволюция случайных однородных гиперграфов. В сб.: *Вероятностные задачи дискретной математики*. МИЭМ, Москва, 1987, с. 126–131.
2. Зыков А. А., Гиперграфы. *Успехи матем. наук* (1974) **29**, №6, 89–154.
3. Колчин В. Ф., *Системы случайных уравнений*. МИЭМ, Москва, 1988.
4. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2004.
5. Степанов В. Е., Случайные графы. В сб.: *Вопросы кибернетики*. МГУ, Москва, 1973, с. 164–185.
6. Шаповалов А. В., О связности и пороговых функциях подграфов случайных однородных гиперграфов. *Дискретная математика* (1993) **5**, №3, 105–115.
7. Шаповалов А. В., О числе строго сбалансированных подграфов случайных однородных гиперграфов. *Дискретная математика* (1993) **5**, №4, 133–144.
8. Шаповалов А. В., Распределения чисел конечных подграфов в случайных неоднородных гиперграфах. *Дискретная математика* (2006) **18**, №3, 102–114.
9. Bollobás B., *Random graphs*. Academic Press, London, 1985.
10. Erdős P., Rényi A., On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* (1960) **5**, 17–61.

Статья поступила 10.06.2005.