Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Маренич, Н. С. Большакова, Число пересечений графа, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 4, 97–107

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm979>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:38:30

Число пересечений графа

© 2007 г. Е. Е. Маренич, Н. С. Большакова

Найдено выражение числа пересечений графа через минимальное число полных подграфов, образующих покрытие графа. Указанный результат позволяет единым методом получить известные свойства числа пересечений графа. Выделен класс графов, для которых число пересечений равно наименьшему числу клик, покрывающих граф. Доказано, что число пересечений полного r -дольного графа $r\bar{K}_2$ равно наименьшему n такому, что $r \leq \binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$. Ранее была известна асимптотика для числа пересечений графа $r\bar{K}_2$. Доказано, что число пересечений графа $r\bar{K}_2 + K_m$ равно наименьшему n такому, что $m + r \leq 2^{n-1}$, $r \leq \binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$. Найдены формулы для числа пересечений графов rC_4 , $r\text{Chain}(3)$, $r(C_4 + K_m)$, rW_5 .

1. Введение

Мы будем придерживаться терминологии, принятой в книге Харари [1]. В частности, $\Gamma = \Gamma(V, E)$ — граф с множеством вершин V и множеством ребер E . Обозначим $\bar{\Gamma}$ дополнение графа Γ , K_n полный граф с n вершинами, $\text{Chain}(n)$ простую цепь с n вершинами, C_n простой цикл с n вершинами.

Пусть никакие два графа $\Gamma_i = \Gamma(V_i, E_i)$ и $\Gamma_j = \Gamma(V_j, E_j)$, где $i \neq j$, не имеют общих вершин, $i, j = 1, 2, \dots, k$. Соединением графов $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ называется граф $\Gamma = \Gamma(V, E)$, который обозначается $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_k$ и имеет множество вершин $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, а множество ребер E определено следующими условиями:

- (1) любые вершины $a \in V_i, b \in V_j$ смежны в графе Γ , если $i \neq j$,
- (2) любые две вершины $a, b \in V_i$ смежны в графе Γ , если a, b смежны в графе Γ_i ,
- (3) никакие другие вершины не являются смежными в графе Γ .

Два графа $\Gamma(V_1, E_1)$ и $\Gamma(V_2, E_2)$ изоморфны, если между множествами V_1 и V_2 существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность. Если графы $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ изоморфны графу P , то пишем $\Gamma = kP$.

Пусть $r \geq 2$. Граф $\Gamma = \Gamma(V, E)$ называется полным r -дольным графом, если множество вершин V может быть разбито на r непустых подмножеств $V_1, V_2, \dots, V_r$ так, что никакие две вершины из одного подмножества не смежны, а любые две вершины из различных подмножеств смежны. Множества $V_1, V_2, \dots, V_r$ называются долями графа Γ . Если $|V_1| = n_1, |V_2| = n_2, \dots, |V_r| = n_r$, то граф Γ обозначается $K(n_1, n_2, \dots, n_r)$. Заметим, что

$$K(n_1, n_2, \dots, n_r) = \bar{K}_{n_1} + \bar{K}_{n_2} + \dots + \bar{K}_{n_r}.$$

Пусть $n_r \geq \dots \geq n_1 > 1$. Если в графе $K(n_1, n_2, \dots, n_r)$ существует s_i долей мощности i , где $i = 2, 3, \dots, n_r$, то

$$K(n_1, n_2, \dots, n_r) = s_2 \bar{K}_2 + s_3 \bar{K}_3 + \dots + s_{n_r} \bar{K}_{n_r}.$$

Граф колесо W_{m+1} определен равенством

$$W_{m+1} = C_m + K_1.$$

Для действительного числа a обозначим $[a]$ наибольшее целое, не превосходящее a , $]a[$ наименьшее целое, не меньшее a . Как обычно, множество натуральных чисел обозначаем $\mathbf{N}$.

Пусть U — конечное множество, 2^U — семейство всех подмножеств множества U . Граф Γ называется графом пересечений на множестве U , если существует инъекция $\varphi: V \rightarrow 2^U - \emptyset$ такая, что $\{a, b\} \in E$ равносильно $\varphi(a) \cap \varphi(b) \neq \emptyset$ для всех $a, b \in V$. Инъекцию φ будем называть кодированием графа пересечений Γ , а множество $\varphi(a)$ — кодом вершины a .

Следующая теорема, известная как теорема Марчевского, доказана в [2], она является первым результатом о графах пересечений.

Теорема 1. *Любой граф $\Gamma = \Gamma(V, E)$ есть граф пересечений.*

Числом пересечений графа Γ называется наименьшее число n такое, что граф Γ является графом пересечений на n -элементном множестве U . Обозначим $\text{pin}(\Gamma)$ число пересечений графа Γ .

Основные оценки числа пересечений графа приведены в следующей хорошо известной теореме (см. [1]).

Теорема 2. *Для графа $\Gamma = \Gamma(V, E)$ справедливы следующие утверждения.*

- (1) *Если граф $\Gamma = \Gamma(V, E)$ связан и $|V| \geq 3$, то $\text{pin}(\Gamma) \leq |E|$.*
- (2) *Если граф $\Gamma = \Gamma(V, E)$ связан и $|V| \geq 4$, то $\text{pin}(\Gamma) = |E|$ тогда и только тогда, когда граф Γ не содержит треугольников.*
- (3) *Если $|V| \geq 1$, то $\text{pin}(\Gamma) \geq \lceil \log_2(|V| - 1) \rceil$.*
- (4) *Если $|V| \geq 3$, то $\text{pin}(\Gamma) \leq \lfloor |V|^2/4 \rfloor$.*

Заметим, что утверждение 4 представляет собой теорема Эрдёша, Гудмана и Поша о числе пересечений графа [3].

Все утверждения последней теоремы 2 можно получить как следствие теории, рассмотренной в разделе 2.

В работе [4] была найдена асимптотика для числа пересечений полного r -дольного графа $r\bar{K}_2$. В данной работе с помощью теоремы Шонхейма доказано, что число пересечений графа $r\bar{K}_2$ равно наименьшему n такому, что $r \leq \binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$, число пересечений графа $r\bar{K}_2 + K_m$ равно наименьшему n такому, что $m + r \leq 2^{n-1}$, $r \leq \binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$. Последний результат был анонсирован в [5]. Найдены формулы для нахождения числа пересечений некоторых других графов.

Пусть $\Gamma(V, E)$ — граф и $A \subseteq V$. Обозначим $\langle A \rangle$ максимальный подграф графа Γ , множеством вершин которого является множество A . Две вершины смежны в $\langle A \rangle$ тогда

$$m = \begin{matrix} & u_1 \dots u_n \\ A_1 & \left(\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right) \\ \dots & \\ A_k & \end{matrix}, \quad {}^t m = \begin{matrix} & a_1 \dots a_k \\ U_1 & \left(\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right) \\ \dots & \\ U_n & \end{matrix}$$

Рис. 1. Схема двойственности

и только тогда, когда они смежны в Γ . Кликой графа называется любой максимальный полный подграф.

Если $\langle A \rangle$ — подграф графа Γ , то $\text{nin}(\langle A \rangle) \leq \text{nin}(\Gamma)$.

Будем говорить, что подграфы $\langle V_1 \rangle, \langle V_2 \rangle, \dots, \langle V_k \rangle$ покрывают граф Γ , если каждая вершина и каждое ребро графа Γ являются вершиной и ребром некоторого подграфа $\langle V_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Покрытие графа кликами изучалось в [6] и [7]. В данной работе выделен класс графов, для которых число пересечений равняется наименьшему числу клик, покрывающих граф.

Частично упорядоченное множество $\text{Bool}(U) = (2^U, \subseteq)$ называется булеаном множества U . Семейство A различных подмножеств множества U называется $\bar{R}$ -антицепью, если любые два множества, принадлежащие A , имеют непустое пересечение.

Семейство A подмножеств множества U называется фильтром булеана $\text{Bool}(U)$, если из условий $a \in A$ и $a \subseteq b$ следует, что $b \in A$. Каждая максимальная $\bar{R}$ -антицепь в булеане $\text{Bool}(U)$ является фильтром и содержит $2^{|U|-1}$ множеств. Отсюда следует, что

$$\text{nin}(K_m) = \lceil \log_2(m) \rceil + 1, \quad m \geq 1. \quad (1)$$

Каждая максимальная $\bar{R}$ -антицепь A однозначно определяется своими минимальными по отношению $\subseteq$ элементами.

2. Двойственность упорядоченных семейств множеств

Пусть $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_k)$ — упорядоченное семейство подмножеств n -элементного множества $U = \{u_1, \dots, u_n\}$. Определим матрицу инцидентности $m = (m_{ij})_{n \times n}$ упорядоченного семейства $\mathbf{A}$, где

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } u_j \notin A_i, \\ 1, & \text{если } u_j \in A_i. \end{cases}$$

Транспонированная матрица ${}^t m$ — матрица инцидентности некоторого n -элементного упорядоченного семейства $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$ подмножеств k -элементного множества $A = \{a_1, \dots, a_k\}$. Упорядоченное семейство $\mathbf{U}$ будем называть двойственным к упорядоченному семейству $\mathbf{A}$. Схематично построение семейства $\mathbf{U}$ изображено на рис. 1.

Упорядоченное семейство $\mathbf{A}$ двойственно к упорядоченному семейству $\mathbf{U}$. Поэтому упорядоченные семейства $\mathbf{A}$ и $\mathbf{U}$ взаимно двойственны.

В следующей лемме 1 приведены простейшие свойства двойственных упорядоченных семейств, имеющие простые доказательства, которые мы опустим.

Лемма 1. Пусть $\mathbf{A}$ — некоторое упорядоченное семейство подмножеств множества $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, $\mathbf{U}$ — двойственное упорядоченное семейство. Справедливы следующие утверждения.

- (1) Для всех $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ и всех $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$u_j \in A_i \iff a_i \in U_j.$$

- (2) Для всех $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

$$A_i = \emptyset \iff a_i \notin U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n.$$

- (3) Для всех $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

$$A_i \neq \emptyset \iff a_i \in U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n.$$

- (4) Для всех $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, k\}$ и всех $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$A_{i_1} = A_{i_2} \iff (a_{i_1} \in U_j \iff a_{i_2} \in U_j).$$

- (5) Для всех $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, k\}$ существует $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ такое, что

$$A_{i_1} \neq A_{i_2} \iff (a_{i_1} \in U_j \wedge a_{i_2} \notin U_j \vee a_{i_1} \notin U_j \wedge a_{i_2} \in U_j).$$

- (6) Для всех $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, k\}$ и всех $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$(A_{i_1} \cap A_{i_2} = \emptyset) \iff (\{a_{i_1}, a_{i_2}\} \not\subseteq U_j).$$

- (7) Для всех $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, k\}$ существует $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ такое, что

$$(A_{i_1} \cap A_{i_2} \neq \emptyset) \iff (\{a_{i_1}, a_{i_2}\} \subseteq U_j).$$

Упорядоченное семейство множеств $\mathbf{A}$ называется покрытием множества U , если $A_1 \cup \dots \cup A_k = U$.

Упорядоченное семейство $\mathbf{A}$ называется упорядоченным разделяющим семейством для множества U , если для любых двух элементов множества U существует множество в семействе $\mathbf{A}$, содержащее один элемент и не содержащее другой.

Упорядоченное семейство $\mathbf{A}$ называется $\subseteq$ -антицепью, если любые два различные множества семейства $\mathbf{A}$ не сравнимы по отношению $\subseteq$.

Из этих определений и леммы 1 следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{A}$ — упорядоченное семейство подмножеств множества U , $\mathbf{U}$ — двойственное упорядоченное семейство. Справедливы следующие утверждения.

- (1) $\mathbf{U}$ является семейством непустых множеств тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}$ — покрытие множества U .
- (2) $\mathbf{U}$ является семейством попарно различных множеств тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}$ — упорядоченное разделяющее семейство для множества U .

Утверждения леммы 1 и теоремы 3 остаются справедливыми и для бесконечных упорядоченных семейств подмножеств.

Двойственность устанавливает биективное соответствие между двойственными семействами упорядоченных множеств.

$$m = \begin{matrix} \varphi(v_1) \\ \dots \\ \varphi(v_k) \end{matrix} \begin{pmatrix} u_1 \dots u_n \\ \dots \\ \end{pmatrix}, \quad {}^t m = \begin{matrix} V_1 \\ \dots \\ V_n \end{matrix} \begin{pmatrix} v_1 \dots v_k \\ \dots \\ \end{pmatrix}.$$

Рис. 2. Схема двойственности

3. Покрытие графа полными подграфами

Число пересечений графа связано с наименьшим числом некоторых полных подграфов, покрывающих граф.

Теорема 4. Пусть $\Gamma = \Gamma(V, E)$ — граф. Число $n = \text{nin}(\Gamma)$ есть наименьшее число, $n \in \mathbb{N}$, для которого существует упорядоченное n -элементное семейство $\sigma = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ подмножеств множества V такое, что

- (1) $V_i \neq \emptyset$ для $i = 1, 2, \dots, n$,
- (2) $V_1 \cup \dots \cup V_n = V$,
- (3) σ — разделяющее семейство для множества V ,
- (4) подграфы, порожденные подмножествами $V_1, V_2, \dots, V_n$, есть полные графы, образующие покрытие графа Γ .

Доказательство. Пусть $V = \{v_1, \dots, v_k\}$, $\varphi: V \rightarrow 2^U - \{\emptyset\}$ — кодирование графа $\Gamma(V, E)$. Рассмотрим упорядоченное семейство $\pi = (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k))$ подмножеств множества U . Будем считать, что семейство π обладает следующими свойствами:

- (5) $\varphi(v_i) \neq \emptyset$ для $i = 1, 2, \dots, k$,
- (6) $\varphi(v_1) \cup \dots \cup \varphi(v_k) = U$,
- (7) $\varphi(v_i) \neq \varphi(v_j)$ для любых $i \neq j$,
- (8) для любых $i \neq j$, $\varphi(v_i) \cap \varphi(v_j) \neq \emptyset$ равносильно $\{v_i, v_j\} \in E$.

Если семейство φ обладает свойствами (5)–(8), то функция $\varphi: v \rightarrow \varphi(v)$ есть кодирование графа Γ . Рассмотрим двойственное к семейству π упорядоченное семейство $\sigma = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ подмножеств множества V , построенное по схеме, приведенной на рис. 2.

Для всех $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n$ справедливо включение $u_j \in \varphi(v_i)$ и равносильное ему $v_j \in V_j$. Из п. 1 леммы 1 следует, что неравенства (1) равносильны равенству (6), равенство (2) равносильно неравенствам (5), условие (3) равносильно неравенствам (7).

Докажем, что из (4) следует (8). Подграфы, порожденные подмножествами $V_1, \dots, V_n$, есть полные графы, образующие покрытие графа Γ . Пусть $i \neq j$, $\varphi(v_i) \cap \varphi(v_j) \neq \emptyset$. Существует элемент $u_r \in U$ такой, что $u_r \in \varphi(v_i) \cap \varphi(v_j)$. Ясно, что $v_i, v_j \in V_r$. Так как множество V_r порождает полный подграф графа Γ , справедливо включение $\{v_i, v_j\} \in E$. Пусть $i \neq j$, $\{v_i, v_j\} \in E$. Так как подграфы, порожденные подмножествами $V_1, \dots, V_n$, образуют покрытие графа Γ , справедливо включение $v_i, v_j \in V_r$ при некотором r . Поэтому $u_r \in \varphi(v_i) \cap \varphi(v_j)$, $\varphi(v_i) \cap \varphi(v_j) \neq \emptyset$. Таким образом, доказано, что из (4) следует (8).

Докажем, что из (8) следует (4). Для любых $i \neq j$ соотношение $\varphi(v_i) \cap \varphi(v_j) \neq \emptyset$ равносильно включению $\{v_i, v_j\} \in E$. Рассмотрим множество V_r . Пусть $v_i, v_j \in V_r$. Тогда $u_r \in \varphi(v_i) \cap \varphi(v_j)$, $\varphi(v_i) \cap \varphi(v_j) \neq \emptyset$, $\{v_i, v_j\} \in E$. Доказано, что каждый подграф $\langle V_r \rangle$, $r = 1, 2, \dots, n$, полный. Пусть $\{v_i, v_j\} \in E$. Ясно, что $\varphi(v_i) \cap \varphi(v_j) \neq \emptyset$. Тогда существует элемент $u_r \in U$ такой, что $u_r \in \varphi(v_i) \cap \varphi(v_j)$. Значит, $v_i, v_j \in V_r$. Так как подграф $\langle V_r \rangle$ полный, $\{v_i, v_j\}$ является ребром графа $\Gamma(V_r, E_r)$. Таким образом, доказано, что порожденные подграфы образуют покрытие графа Γ , и следовательно, из (8) следует (4).

Итак, доказано, что условия (1)–(4) равносильны условиям (5)–(8). Отсюда следует утверждение теоремы.

Пусть $\Gamma_1 = \Gamma(V_1, E_1)$, $\Gamma_2 = \Gamma(V_2, E_2)$ — графы и $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, тогда для графа $\Gamma = \Gamma(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ справедливо равенство $\text{nin}(\Gamma) = \text{nin}(\Gamma_1) + \text{nin}(\Gamma_2)$. В частности, $\text{nin}(\bar{K}_n) = n$.

4. Покрытие графа кликами

Для некоторых графов число пересечений равно наименьшему числу клик, покрывающих граф.

Теорема 5. Пусть граф $\Gamma = \Gamma(V, E)$ обладает следующим свойством: для любых двух смежных вершин a, b найдется третья вершина c такая, что или c смежна с a и не смежна с b , или c смежна с b и не смежна с a . Справедливы следующие утверждения.

- (1) Число $\text{nin}(\Gamma)$ равно наименьшему числу полных подграфов, покрывающих граф.
- (2) Число $\text{nin}(\Gamma)$ равно наименьшему числу клик, покрывающих граф.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ — семейство множеств вершин полных подграфов, покрывающих граф Γ , $a, b \in V$, $a \neq b$.

Если вершины a и b не смежны, то они принадлежат различным множествам семейства $(V_1, V_2, \dots, V_n)$.

Пусть вершины a и b смежны. Существует вершина c такая, что c смежна с a и не смежна с b . Поэтому найдется множество вершин V_i такое, что $a, c \in V_i$, $b \notin V_i$.

Итак, доказано, что $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ — разделяющее семейство множеств.

Докажем утверждение 2. Из каждого покрытия графа n полными подграфами легко получить покрытие графа n кликами, заменив полные подграфы кликами, их содержащими.

5. Число пересечений полных r -дольных графов, мощности всех долей которых равны двум

Далее мы считаем, что $n_1 \geq \dots \geq n_r > 1$. Для любых двух данных смежных вершин графа $K(n_1, n_2, \dots, n_r)$ найдется третья вершина, которая смежна только с одной из двух данных вершин. Поэтому число $\text{nin}(K(n_1, n_2, \dots, n_r))$ равно наименьшему числу клик, покрывающих граф $K(n_1, n_2, \dots, n_r)$.

Любые два ребра, соединяющие вершины из долей V_1 и V_2 не могут лежать в одной клике. Значит,

$$\text{nin}(K(n_1, n_2, \dots, n_r)) \geq n_1 n_2.$$

Пусть U — конечное множество, $|U| = n > 1$, $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ — семейство различных подмножеств множества U . Если семейство $\mathbf{A}$ обладает свойствами $A_i \not\subseteq A_j$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, $A_i \cup A_j \neq U$ для всех $i \neq j$, то семейство $\mathbf{A}$ будем называть $(\subseteq, \bar{R}, S)$ -антицепью.

Если семейство $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ является $(\subseteq, \bar{R}, S)$ -антицепью, то по теореме Шонхейма [8]

$$k \leq \binom{n-1}{[n/2]-1}. \quad (2)$$

Оценка (2) является точной. Для семейства $\mathbf{A}$ всех $[n/2]$ -элементных подмножеств множества U , содержащих фиксированный элемент, в (2) имеет место равенство.

Теорема 6. Для $r > 1$ число пересечений графа $\Gamma = r\bar{K}_2$ равно наименьшему n такому, что

$$r \leq \binom{n-1}{[n/2]-1}. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть граф Γ кодируется подмножествами множества U . Обозначим $V_1, V_2, \dots, V_r$ — доли графа Γ , $V_i = \{v_{i1}, v_{i2}\}$, $i = 1, 2, \dots, r$. Коды вершин v_{is} обозначим a_{is} , где $i = 1, 2, \dots, r$, $s = 1, 2$. При $i = 1, 2, \dots, r$ справедливо равенство $a_{i1} \cap a_{i2} = \emptyset$.

Если $a_{i2} \subseteq U - a_{i1}$ для некоторого $i = 1, 2, \dots, r$, то положим $a'_{i2} = U - a_{i1}$. Ясно, что $a_{i2} \subseteq a'_{i2}$. Код a_{i2} имеет непустое пересечение со всеми кодами, кроме кода a_{i1} , поэтому и множество a'_{i2} имеет непустое пересечение со всеми кодами, кроме кода a_{i1} . Множество a'_{i2} отлично от кодов других вершин. Действительно, если $a'_{i2} = a_{js}$ для некоторых $j \neq i$, $s = 1, 2$, то $a'_{i2} \cap a_{j\bar{s}} = a_{is} \cap a_{j\bar{s}} = \emptyset$, получаем противоречие. Из доказанного выше следует, что без потери общности можно считать, что $a_{i2} = U - a_{i1}$ для всех $i = 1, 2, \dots, r$. Действительно, если $a_{i2} \subset U - a_{i1}$, то перекодируем вершину v_{i2} , присвоив ей больший код $a_{i2} = U - a_{i1}$.

Рассмотрим семейство $\mathbf{A} = (a_{11}, \dots, a_{r1})$ различных подмножеств множества U и убедимся, что оно удовлетворяет условиям теоремы Шонхейма.

Если $a_{i1} \subseteq a_{j1}$, где $i \neq j$, то $\emptyset \neq a_{i1} \cap a_{j2} = a_{i1} \cap (U - a_{j1}) = \emptyset$, получаем противоречие. Поэтому $a_{i1} \not\subseteq a_{j1}$ для всех $i \neq j$. По построению семейства $\mathbf{A}$ справедливо соотношение $a_{i1} \cap a_{j1} \neq \emptyset$ для всех $i \neq j$.

Если $a_{i1} \cup a_{j1} = U$, где $i \neq j$, то справедливо соотношение

$$\emptyset \neq a_{i2} \cap a_{j2} = (U - a_{i1}) \cap (U - a_{j1}) = U - a_{i1} \cup a_{j1} = \emptyset,$$

и мы получили противоречие. Поэтому $a_{i1} \cup a_{j1} \neq U$ для всех $i \neq j$. Тем самым доказано, что семейство $\mathbf{A}$ удовлетворяет условиям теоремы Шонхейма.

Верно и обратное, если семейство $\mathbf{A}$ удовлетворяет условиям теоремы Шонхейма, то указанным выше способом оно кодирует вершины графа $r\bar{K}_2$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Ранее в работе [4] было доказано, что $\text{nin}(r\bar{K}_2) \sim \log_2 r$ при $r \rightarrow \infty$. Эта асимптотика является прямым следствием формулы (3).

Для графов $3\bar{K}_2$, $4\bar{K}_2$, изображенных на рис. 3, $\text{nin}(3\bar{K}_2) = 4$, $\text{nin}(4\bar{K}_2) = 5$.

Каждая вершина графа $r\bar{K}_2$ смежна со всеми другими вершинами графа, кроме одной.

Рис. 3. Граф $3\bar{K}_2$ и граф $4\bar{K}_2$

Следствие 1. Пусть $r > 1$. Тогда наименьшее число клик, покрывающих граф $r\bar{K}_2$, равно наименьшему $n \in \mathbb{N}$ такому, что

$$r \leq \binom{n-1}{[n/2]-1}.$$

Следствие 2. Число пересечений графа rC_4 , где $r > 1$, равно наименьшему числу $n \in \mathbb{N}$ такому, что

$$r \leq \frac{1}{2} \binom{n-1}{[n/2]-1}.$$

Доказательство. Ясно, что $C_4 = 2\bar{K}_2$, $rC_4 = 2r\bar{K}_2$. Из теоремы 6 следует нужное утверждение.

6. Число пересечений графа $r\bar{K}_2 + K_m$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $|U| = n \geq 2$. Тогда наибольшее число минимальных элементов, образующих $(\subseteq, \bar{R}, S)$ -антицепь в максимальной $\bar{R}$ -антицепи булеана $\text{Bool}(U)$, равно

$$p = \binom{n-1}{[n/2]-1}.$$

Доказательство. По теореме Шонхейма, любая $(\subseteq, \bar{R}, S)$ -антицепь в булеана $\text{Bool}(U)$ содержит не более p элементов. Рассмотрим два случая.

В первом случае число n четно, $n = 2k$. Рассмотрим семейство $\mathbf{A}$, состоящее из всех k -элементных подмножеств множества U , содержащих фиксированный элемент α , ясно, что

$$|\mathbf{A}| = \binom{2k-1}{k-1} = \binom{n-1}{[n/2]-1}.$$

Пусть F — фильтр, состоящий из множеств семейства $\mathbf{A}$ и всех подмножеств множества U , содержащих больше k элементов. Фильтр F есть $\bar{R}$ -антицепь, $|F| = 2^{n-1}$. Поэтому

фильтр F есть максимальная $\bar{R}$ -антицепь в булеане $\text{Bool}(U)$ и семейство $\mathbf{A}$ есть искомая $(\subseteq, \bar{R}, S)$ -антицепь.

Во втором случае число n нечетно, $n = 2k + 1$. Рассмотрим семейство $\mathbf{A}$, состоящее из всех k элементных подмножеств множества U , содержащих фиксированный элемент α , ясно, что

$$|\mathbf{A}| = \binom{2k}{k-1} = \binom{n-1}{[n/2]-1}.$$

Пусть F — фильтр, состоящий из множеств семейства $\mathbf{A}$, из всех $(k+1)$ -элементных подмножеств множества U , содержащих элемент α , из всех подмножеств множества U , содержащих больше $k+1$ элементов. Фильтр F есть $\bar{R}$ -антицепь,

$$|F| = \binom{2k}{k-1} + \binom{2k}{k} + \binom{2k+1}{k+1} + \dots + \binom{2k}{2k} = 2^{n-1}.$$

Поэтому фильтр F есть максимальная $\bar{R}$ -антицепь в булеане $\text{Bool}(U)$ и семейство $\mathbf{A}$ есть искомая $(\subseteq, \bar{R}, S)$ -антицепь.

Теорема 7. Число пересечений графа $r\bar{K}_2 + K_m$ равно наименьшему числу $n \in \mathbf{N}$ такому, что

$$m + r \leq 2^{n-1}, \quad r \leq \binom{n-1}{[n/2]-1}. \quad (4)$$

Доказательство. Граф $r\bar{K}_2 + K_m$ имеет $m+2r$ вершин, которые мы обозначим $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_r, v'_1, \dots, v'_r$. Будем считать, что u_i — вершины порожденного подграфа K_m , $i = 1, 2, \dots, m$, и $V_j = \{v_j, v'_j\}$ — доли порожденного подграфа $r\bar{K}_2$, $j = 1, 2, \dots, r$.

Пусть $\varphi: V \rightarrow 2^U - \{\emptyset\}$ — кодирование графа Γ , $|U| = n$. Докажем, что в булеане $\text{Bool}(U)$ существует фильтр F такой, что

(i) фильтр F есть $\bar{R}$ -антицепь, $|F| \geq m + r$,

(ii) в фильтре F существует семейство $\mathbf{A}$ минимальных элементов фильтра, $|\mathbf{A}| \geq r$, которое является $(\subseteq, \bar{R}, S)$ -антицепью.

Семейство $\mathbf{B} = (\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m), \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_r))$ порождает фильтр F в булеане $\text{Bool}(U)$. Семейство $\mathbf{B}$ есть $\bar{R}$ -антицепь. Поэтому фильтр F есть $\bar{R}$ -антицепь и $|F| \geq m + r$.

Аналогично доказательству теоремы 6 находим, что без потери общности можно считать $\varphi(v_j) = U - \varphi(v'_j)$, $j = 1, 2, \dots, r$. Убедимся, что семейство $\mathbf{A} = (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_r))$ состоит из минимальных элементов фильтра F .

Если $\varphi(v_j) \subset \varphi(v_i)$, $i \neq j$, то $\varphi(v_j) \cap \varphi(v'_i) = \varphi(v_j) \cap (U - \varphi(v_i)) = \varphi(v_j) - \varphi(v_i) = \emptyset$, и мы получаем противоречие.

Если $\varphi(u_j) \subseteq \varphi(v_i)$, то $\varphi(u_j) \cap \varphi(v'_i) = \varphi(u_j) \cap (U - \varphi(v_i)) = \emptyset$, и мы вновь получаем противоречие.

Итак, доказано, что семейство $\mathbf{A} = (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_r))$ состоит из минимальных элементов фильтра F . Семейство $\mathbf{A}$ есть $(\subseteq, \bar{R})$ -антицепь.

Семейство $\mathbf{C} = (\varphi(v'_1), \dots, \varphi(v'_r))$ есть $\bar{R}$ -антицепь. Поэтому семейство $\mathbf{A}$ есть $(\subseteq, \bar{R}, S)$ -антицепь. По теореме Шонхейма

$$|\mathbf{A}| = \binom{n-1}{[n/2]-1}.$$

Итак, доказано, что существует фильтр F , удовлетворяющий приведенным выше условиям (i), (ii). Если существует фильтр F , удовлетворяющий этим условиям, то указанным выше способом легко построить кодирование $\varphi: V \rightarrow 2^U - \{\emptyset\}$ графа Γ .

Из леммы 1 следует, что необходимым и достаточным условием существования фильтра F , удовлетворяющего условиям 1), 2), является выполнение неравенств

$$m + r \leq 2^{n-1}, \quad r \leq \binom{n-1}{[n/2]-1}.$$

Поэтому $n = \text{nin}(\Gamma)$ есть наименьшее n , удовлетворяющее неравенствам (4).

Если $r = 0$, то $\Gamma = K_m$, и мы получаем формулу (1).

Если $m = 0$, то $\Gamma = r\bar{K}_2$, и мы получаем формулу (3).

Следствие 3. Число пересечений графа $r \text{Chain}(3)$, где $r \geq 2$ равно наименьшему числу $n \in \mathbb{N}$ такому, что

$$r \leq \binom{n-1}{[n/2]-1}.$$

Доказательство. Ясно, что $\text{Chain}(3) = \bar{K}_2 + K_1$, поэтому

$$r \text{Chain}(3) = r\bar{K}_2 + K_r.$$

Из теоремы 7 следует нужное утверждение.

Следствие 4. Справедливы следующие утверждения.

$$(1) \text{nin}(C_4 + K_m) = \min\{4, \lceil \log_2(m+2) \rceil + 1\}.$$

(2) Число пересечений графа $r(C_4 + K_m)$, где $r \geq 2$, $m \geq 1$, равно наименьшему числу $n \in \mathbb{N}$ такому, что

$$r \leq \frac{1}{2} \binom{n-1}{[n/2]-1}, \quad r(m+2) \leq 2^{n-1}.$$

В частности, число пересечений графа rW_5 , где $r \geq 2$, равно наименьшему числу $n \in \mathbb{N}$ такому, что

$$r \leq \frac{1}{2} \binom{n-1}{[n/2]-1}.$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Ясно, что $C_4 + K_m = 2\bar{K}_2 + K_m$. Из теоремы 7 следует нужное утверждение.

Докажем второе утверждение. Ясно, что $r(C_4 + K_m) = 2r\bar{K}_2 + K_{rm}$. Из теоремы 7 следует нужное утверждение.

Список литературы

1. Харари Ф., *Теория графов*. Мир, Москва, 1973.
2. Szpilrajn-Marczewski E., Sur deux propriétés des classes d'ensembles. *Fundam. Math.* (1945) **33**, 303–307.
3. Erdős P., Goodman A. W., Pósa L., The representation of a graph by set intersections. *Canad. J. Math.* (1966) **18**, №1, 106–112.
4. Scheinerman E. R., Trenk A. N., On the fractional intersection number of graph. *Graph Comb.* (1999) **15**, №3, 341–351.
5. Маренич Е. Е., Число пересечений графа. В сб.: *Материалы VIII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения»*. МГУ, Москва, 2004, с. 216–219.
6. Bollobás B., Erdős P., Spencer J., West D. B., Clique covering of the edges of a random graph. *Combinatorica* (1993) **13**, 1–5.
7. Frieze A., Reed B., Covering the edges of a random graph by cliques. *Combinatorica* (1995) **15**, 489–497.
8. Schönheim J., On a problem of Purdy related to Sperner systems. *Canad. Math. Bull.* (1974) **17**, 135–136.

Статья поступила 19.04.2005.