Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Балагура, О. В. Кузьмин, Обобщенные пирамиды Паскаля и им обратные,
Дискрет. матем., 2007, том 19, выпуск 4, 108–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm980>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:35:10

Обобщенные пирамиды Паскаля и им обратные

© 2007 г. А. А. Балагура, О. В. Кузьмин

Построены пары обратимых соотношений, содержащих в качестве коэффициентов трехиндексные комбинаторные числа. Введены трехиндексные обобщения ряда известных комбинаторных чисел.

1. Введение

В [2] рассматривались обращения линейных соотношений, содержащих в качестве коэффициентов комбинаторные числа, описываемые обобщенным треугольником Паскаля. В настоящей работе рассматривается более общая задача — обращение обобщенной пирамиды Паскаля. Во втором параграфе вводятся базовые понятия и приводятся основные соотношения для $B_{k,l}^n$ и $A_{k,l}^n$, обобщенных триномиальных коэффициентов первого и второго рода [1] соответственно. В третьем параграфе рассматриваются различные варианты обращения линейных соотношений, в которых участвуют $B_{k,l}^n$ и $A_{k,l}^n$, описываемые обобщенной пирамидой Паскаля. Полученные формулы могут служить источником получения различных комбинаторных тождеств. В четвертом параграфе вводятся новые комбинаторные объекты — трехиндексные обобщения чисел Уитни, Стирлинга и Лаха, получен ряд формул для этих чисел.

2. Основные понятия и соотношения

Обобщенной пирамидой Паскаля называется (см. [1]) трехгранный пирамидальный массив, элементы которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$V(n, k, l) = \alpha_{n,k-1,l} V(n-1, k-1, l) + \beta_{n,k,l-1} V(n-1, k, l-1) + \gamma_{n,k,l} V(n-1, k, l), \quad (1)$$

с граничными условиями $V(0, 0, 0) = V_0$, $V(n, k, l) = 0$, если $\min(n, k, l, n-k-l) < 0$.

Следуя [1], рассмотрим важные частные случаи обобщенной пирамиды Паскаля, А- и В- пирамиды, в каждом сечении которых расположены обобщенные триномиальные коэффициенты второго и первого рода соответственно.

Пусть $\alpha = \{\alpha_s\}_0^\infty$, $\beta = \{\beta_s\}_0^\infty$, $\gamma = \{\gamma_s\}_0^\infty$ — последовательности, которые назовем базовыми последовательностями или базами.

Используя члены баз α, β, γ , строим разложения

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} B_{k,l}^n x^k y^l = \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i), \quad n \geq 1, \quad (2)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=k+l}^{\infty} A_{k,l}^n y^l z^n = z^k \prod_{j=0}^{k-1} \alpha_j \prod_{i=0}^k (1 - \beta_i y z - \gamma_i z)^{-1}, \quad k \geq 0. \quad (3)$$

Числа $B_{k,l}^n$ и $A_{k,l}^n$ в левых частях выражений (2) и (3), которые называют обобщенными триномиальными коэффициентами первого и второго рода соответственно, можно задать рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} B_{k,l}^n &= \alpha_{n-1} B_{k-1,l}^{n-1} + \beta_{n-1} B_{k,l-1}^{n-1} + \gamma_{n-1} B_{k,l}^{n-1}, \\ A_{k,l}^n &= \alpha_{k-1} A_{k-1,l}^{n-1} + \beta_k A_{k,l-1}^{n-1} + \gamma_k A_{k,l}^{n-1}, \end{aligned}$$

где $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$, $0 \leq l \leq n-k$, с начальными условиями $B_{0,0}^0 = A_{0,0}^0 = 1$, $B_{k,l}^n = A_{k,l}^n = 0$, если $\min(n, l, k, n-k-l) < 0$. Эти формулы также могут быть получены из (1).

Парой обратимых соотношений называют [2] систему линейных соотношений

$$\begin{aligned} F_n &= \sum_k a_{nk} f_k, \quad n \geq 0, \\ f_n &= \sum_k b_{nk} F_k, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

между членами последовательностей $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, если матрицы коэффициентов $\|a_{nk}\|$ и $\|b_{nk}\|$ двусторонние взаимобратные.

3. Обращение линейных соотношений

Введем обозначение $C_n(\alpha) = \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i$, аналогично определяются $C_n(\beta)$ и $C_n(\gamma)$. Положим $\alpha/\beta = \{\alpha_s/\beta_s\}_{s=0}^{\infty}$, базы γ/β , β/α , γ/α , α/γ , β/γ , $(\alpha-\beta)/(\beta+\gamma)$, $\beta/(\beta+\gamma)$ определяются аналогично. Пусть $\tilde{A}_{i,j}^r$ строятся на базах α , β/α , γ/α ; $\hat{A}_{i,j}^r$ — на базах β , α/β , γ/β ; $\bar{A}_{i,j}^r$ — на базах γ , β/γ , α/γ .

Верны следующие теоремы.

Теорема 1. Система линейных выражений

$$\psi_n = \frac{1}{C_n(\alpha)} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} B_{k,l}^n \varphi_k, \quad n \geq 0, \quad (4)$$

$$\varphi_n = \frac{1}{C_n(\alpha)} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{n-k} \tilde{A}_{k,l}^n \psi_k, \quad n \geq 0, \quad (5)$$

образует пару обратимых соотношений.

Доказательство. Преобразуем правую часть соотношения (2):

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} B_{k,l}^n x^k y^l = \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i x \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\beta_i}{\alpha_i} \frac{y}{x} + \frac{\gamma_i}{\alpha_i} \frac{1}{x} \right), \quad x \neq 0.$$

Поделив обе части последнего равенства на $x^n C_n(\alpha)$, сделав замену переменных $1/x = m$ и обозначив $B_{\bar{n}}(m, y)$ получившуюся производящую функцию, получаем, что

$$B_{\bar{n}}(m, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \frac{1}{C_n(\alpha)} B_{k,l}^n m^{n-k} y^l = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\beta_i}{\alpha_i} y m + \frac{\gamma_i}{\alpha_i} m \right). \quad (6)$$

Поделив обе части равенства в формуле (3) на $z^k C_k(\alpha)$, поменяв порядок суммирования и обозначив $A_{\underline{k}}(z, y)$ производящую функцию $\tilde{A}_{k,l}^n$, получаем, что

$$A_{\underline{k}}(z, y) = \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{1}{C_k(\alpha)} \tilde{A}_{k,l}^n y^l z^{n-k} = \prod_{i=0}^k \left(1 - \frac{\beta_i}{\alpha_i} y z - \frac{\gamma_i}{\alpha_i} z \right)^{-1}. \quad (7)$$

Из (6) и (7) следует равенство $B_{\overline{n+1}}(m, y) A_{\underline{n}}(-z, y) = 1$, что с точностью до замены переменной эквивалентно совокупности

$$\sum_{i=k}^n \sum_{j_1=0}^{n-i} \sum_{j_2=0}^{i-k} \frac{(-1)^{i-k}}{C_n(\alpha) C_i(\alpha)} B_{i,j_1}^n \tilde{A}_{k,j_2}^i = \delta_{n,k}, \quad (8)$$

$$\sum_{i=k}^n \sum_{j_1=0}^{n-i} \sum_{j_2=0}^{i-k} \frac{(-1)^{n-i}}{C_n(\alpha) C_i(\alpha)} \tilde{A}_{i,j_1}^n B_{k,j_2}^i = \delta_{n,k}, \quad (9)$$

где $\delta_{n,k}$ — символ Кронекера. Введем обозначения

$$\tilde{B} = \|\tilde{b}_{nk}\| = \left\| \sum_{j_1=0}^{n-k} \frac{1}{C_n(\alpha)} B_{k,j_1}^n \right\|, \quad \tilde{A} = \|\tilde{a}_{nk}\| = \left\| \sum_{j_2=0}^{n-k} \frac{(-1)^{n-k}}{C_n(\alpha)} \tilde{A}_{k,j_2}^n \right\|.$$

Выражения (8) и (9) эквивалентны матричным равенствам $\tilde{B} \tilde{A} = \tilde{A} \tilde{B} = E$. Следовательно, система линейных соотношений (4), (5) образует пару обратимых соотношений.

Действительно, подставив (5) в (4), с учетом соотношения (8) после преобразований получим, что

$$\begin{aligned} \psi_n &= \frac{1}{C_n(\alpha)} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} B_{k,l}^n \left(\frac{1}{C_k(\alpha)} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} (-1)^{k-i} \tilde{A}_{i,j}^k \psi_i \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \psi_k \left(\sum_{i=k}^n \sum_{j_1=0}^{n-i} \sum_{j_2=0}^{i-k} \frac{(-1)^{i-k}}{C_n(\alpha) C_i(\alpha)} B_{i,j_1}^n \tilde{A}_{k,j_2}^i \right) = \psi_n. \end{aligned}$$

Аналогично, подставив (4) в (5), с учетом соотношения (9) после преобразований полу-

чим, что

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \frac{1}{C_n(\alpha)} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{n-k} \tilde{A}_{k,l}^n \left(\frac{1}{C_k(\alpha)} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} B_{i,j}^k \varphi_i \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \varphi_k \left(\sum_{i=k}^n \sum_{j_1=0}^{n-i} \sum_{j_2=0}^{k-i} \frac{(-1)^{n-i}}{C_n(\alpha) C_i(\alpha)} \tilde{A}_{i,j_1}^n t B_{k,j_2}^i \right) = \varphi_n.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Система линейных выражений

$$\phi_n = \frac{1}{C_n(\beta)} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{n-l} B_{k,l}^n \chi_l, \quad n \geq 0, \quad (10)$$

$$\chi_n = \frac{1}{C_n(\beta)} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{n-l} (-1)^{n-l} \hat{A}_{l,k}^n \phi_l, \quad n \geq 0, \quad (11)$$

образует пару обратимых соотношений.

Доказательство. Производящая функция $\hat{B}_{l,k}^n$, построенных на базах β, α, γ , с учетом соотношения (2) имеет вид

$$\sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{n-l} \hat{B}_{l,k}^n x^l y^k = \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{n-l} B_{k,l}^n x^l y^k = \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha_i y + \beta_i x + \gamma_i).$$

Преобразуем среднюю часть получившегося выражения:

$$\sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{n-l} B_{k,l}^n x^l y^k = \prod_{i=0}^{n-1} \beta_i x \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\alpha_i}{\beta_i} \frac{y}{x} + \frac{\gamma_i}{\beta_i} \frac{1}{x} \right), \quad x \neq 0.$$

Поделив обе части последнего равенства на $x^n C_n(\beta)$, сделав замену переменных $1/x = m$ и обозначив $B_{\bar{n}}(m, y)$ получившуюся производящую функцию, получаем, что

$$B_{\bar{n}}(m, y) = \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{n-l} \frac{1}{C_n(\beta)} B_{k,l}^n m^{n-l} y^k = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\alpha_i}{\beta_i} y m + \frac{\gamma_i}{\beta_i} m \right). \quad (12)$$

Производящая функция $\hat{A}_{l,k}^n$, построенных на базах β, α, γ , с учетом соотношения (3) имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k+l}^{\infty} \hat{A}_{l,k}^n y^k z^n = z^l \prod_{j=0}^{l-1} \beta_j \prod_{i=0}^l (1 - \alpha_i y z - \gamma_i z)^{-1}.$$

Поделив обе части последнего равенства на $z^l C_l(\beta)$, поменяв порядок суммирования и обозначив $A_{\underline{l}}(z, y)$ производящую функцию $\hat{A}_{l,k}^n$, получаем, что

$$A_{\underline{l}}(z, y) = \sum_{n=l}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-l} \frac{1}{C_l(\beta)} \hat{A}_{l,k}^n y^k z^{n-l} = \prod_{i=0}^l \left(1 - \frac{\alpha_i}{\beta_i} y z - \frac{\gamma_i}{\beta_i} z \right)^{-1}. \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует равенство $B_{n+1}^{-1}(m, y)A_n(-z, y) = 1$, что с точностью до замены переменной эквивалентно совокупности равенств

$$\sum_{i=l}^n \sum_{j_1=0}^{n-i} \sum_{j_2=0}^{i-l} \frac{(-1)^{i-l}}{C_n(\beta)C_i(\beta)} B_{j_1,i}^n \hat{A}_{l,j_2}^i = \delta_{n,l}, \quad (14)$$

$$\sum_{i=l}^n \sum_{j_1=0}^{n-i} \sum_{j_2=0}^{i-l} \frac{(-1)^{n-i}}{C_n(\beta)C_i(\beta)} \hat{A}_{i,j_1}^n B_{j_2,l}^i = \delta_{n,l}. \quad (15)$$

Введем обозначения

$$\hat{B} = \|\hat{b}_{nl}\| = \left\| \sum_{j_1=0}^{n-l} \frac{1}{C_n(\beta)} B_{j_1,l}^n \right\|, \quad \hat{A} = \|\hat{a}_{nl}\| = \left\| \sum_{j_2=0}^{n-l} \frac{(-1)^{n-l}}{C_n(\beta)} \hat{A}_{l,j_2}^n \right\|.$$

Выражения (14) и (15) эквивалентны матричным равенствам $\hat{B}\hat{A} = \hat{A}\hat{B} = E$. Следовательно, система линейных соотношений (10), (11) образует пару обратимых соотношений.

Действительно, подставив (11) в (10), с учетом соотношения (14) после преобразований получим, что

$$\begin{aligned} \phi_n &= \frac{1}{C_n(\beta)} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{n-l} B_{k,l}^n \left(\frac{1}{C_k(\beta)} \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{l-i} (-1)^{l-i} \hat{A}_{i,j}^l \phi_i \right) \\ &= \sum_{l=0}^n \phi_l \left(\sum_{i=l}^n \sum_{j_1=0}^{n-i} \sum_{j_2=0}^{i-l} \frac{(-1)^{i-l}}{C_n(\beta)C_i(\beta)} B_{j_1,i}^n \hat{A}_{l,j_2}^i \right) = \phi_n. \end{aligned}$$

Аналогично, подставив (10) в (11), с учетом соотношения (15) после преобразований получим, что

$$\begin{aligned} \chi_n &= \frac{1}{C_n(\beta)} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{n-l} (-1)^{n-l} \hat{A}_{l,k}^n \left(\frac{1}{C_k(\beta)} \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{l-i} B_{i,j}^l \chi_i \right) \\ &= \sum_{l=0}^n \chi_l \left(\sum_{i=l}^n \sum_{j_1=0}^{n-i} \sum_{j_2=0}^{i-l} \frac{(-1)^{n-i}}{C_n(\beta)C_i(\beta)} \hat{A}_{i,j_1}^n B_{j_2,l}^i \right) = \chi_n. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Система линейных соотношений

$$\xi_n = \frac{1}{C_n(\gamma)} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m B_{k,m-k}^n \zeta_{n-m}, \quad n \geq 0, \quad (16)$$

$$\zeta_n = \frac{1}{C_n(\gamma)} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m (-1)^m \bar{A}_{n-m,m-k}^n \xi_{n-m}, \quad n \geq 0, \quad (17)$$

образует пару обратимых соотношений.

Доказательство. Введем обозначение $m = k + l$. Производящая функция $\hat{B}_{n-m,m-k}^n$, построенных на базах γ, β, α , с учетом соотношения (2) имеет вид

$$\sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \hat{B}_{n-m,m-k}^n x^{n-m} y^{m-k} = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m B_{k,m-k}^n x^{n-m} y^{m-k} = \prod_{i=0}^{n-1} (\gamma_i x + \beta_i y + \alpha_i).$$

Преобразуем среднюю часть получившегося выражения:

$$\sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m B_{k,m-k}^n x^{n-m} y^{m-k} = \prod_{i=0}^{n-1} \gamma_i x \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\beta_i}{\gamma_i} \frac{y}{x} + \frac{\alpha_i}{\gamma_i} \frac{1}{x} \right), \quad x \neq 0.$$

Поделив обе части полученного равенства на $x^n C_n(\gamma)$, сделав замену переменных $1/x = z$ и обозначив $B_{\bar{n}}(y, z)$ получившееся производящую функцию, получаем, что

$$B_{\bar{n}}(y, z) = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \frac{1}{C_n(\gamma)} B_{k,m-k}^n z^m y^{m-k} = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\beta_i}{\gamma_i} yz + \frac{\alpha_i}{\gamma_i} y \right). \quad (18)$$

Производящая функция $\hat{A}_{n-m,m-k}^n$, построенных на базах γ, β, α , с учетом соотношения (3) имеет вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \hat{A}_{n-m,m-k}^n y^{m-k} z^n = z^{n-m} \prod_{j=0}^{n-m-1} \gamma_j \prod_{i=0}^{n-m} (1 - \beta_i xz - \alpha_i z)^{-1}.$$

Поделив обе части последнего равенства на $z^{n-m} C_{n-m}(\gamma)$, поменяв порядок суммирования и обозначив $A_{\underline{m}}(z, y)$ производящую функцию $\hat{A}_{n-m,m-k}^n$, получаем, что

$$A_{\underline{m}}(z, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{C_{n-m}(\gamma)} \hat{A}_{n-m,m-k}^n y^{m-k} z^m = \prod_{i=0}^{n-m} \left(1 - \frac{\beta_i}{\gamma_i} yz - \frac{\alpha_i}{\gamma_i} z \right)^{-1}. \quad (19)$$

Из (18) и (19) следует равенство

$$B_{\bar{n}+1}(y, z) A_{\underline{n}}(-z, y) = 1,$$

что с точностью до замены переменной эквивалентно совокупности соотношений

$$\sum_{i=n-m}^n \sum_{j_1=0}^{n-i} \sum_{j_2=0}^{i-n+m} \frac{(-1)^{i-n+m}}{C_n(\gamma) C_i(\gamma)} B_{j_1, n-i-j_1}^n \bar{A}_{n-m, j_2}^i = \delta_{m,0}, \quad (20)$$

$$\sum_{i=n-m}^n \sum_{j_1=0}^{n-i} \sum_{j_2=0}^{i-n+m} \frac{(-1)^{n-j_1}}{C_n(\gamma) C_i(\gamma)} \bar{A}_{i, j_1}^n B_{j_2, i-j_2-n+m}^i = \delta_{m,0}, \quad (21)$$

Введем обозначения

$$\bar{B} = \|\bar{b}_{n,n-m}\| = \left\| \sum_{m=0}^k \frac{1}{C_n(\gamma)} B_{k,m-k}^n \right\|, \quad \bar{A} = \|\bar{a}_{n,n-m}\| = \left\| \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{C_n(\gamma)} \bar{A}_{n-m,m-k}^n \right\|.$$

Выражения (20) и (21) эквивалентны матричным равенствам $\bar{B} \bar{A} = \bar{A} \bar{B} = E$. Следовательно, система линейных соотношений (16), (17) образует пару обратимых соотношений.

Действительно, подставив (17) в (16), с учетом соотношения (20) после преобразований получим, что

$$\begin{aligned}\xi_n &= \frac{1}{C_n(\gamma)} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m B_{k,l}^n \left(\frac{1}{C_{n-m}(\gamma)} \sum_{i=0}^{n-m} \sum_{j=0}^i (-1)^i \bar{A}_{n-m-i,j}^{n-m} \xi_i \right) \\ &= \sum_{m=0}^n \xi_{n-m} \left(\sum_{i=n-m}^n \sum_{j_1=0}^{n-i} \sum_{j_2=0}^{i-n+m} \frac{(-1)^{i-n+m}}{C_n(\gamma) C_i(\gamma)} B_{j_1, n-i-j_1}^n \bar{A}_{n-m, j_2}^i \right) = \xi_n.\end{aligned}$$

Аналогично, подставив (16) в (17), с учетом соотношения (21) после преобразований получим, что

$$\begin{aligned}\zeta_n &= \frac{1}{C_n(\gamma)} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m (-1)^m \bar{A}_{n-m, m-k}^n \left(\frac{1}{C_{n-m}(\gamma)} \sum_{i=0}^{n-m} \sum_{j=0}^i B_{j,i-j}^{n-m} \zeta_i \right) \\ &= \sum_{m=0}^n \zeta_{n-m} \left(\sum_{i=n-m}^n \sum_{j_1=0}^{n-i} \sum_{j_2=0}^{i-n+m} \frac{(-1)^{n-j_1}}{C_n(\gamma) C_i(\gamma)} \bar{A}_{i, j_1}^n B_{j_2, i-j_2-n+m}^i \right) = \zeta_n.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание 1. В условиях абсолютной сходимости рассматриваемых рядов верны союзные пары [2] обратимых соотношений к системам в теоремах 1–3. Например, система

$$\begin{aligned}\psi_n &= \frac{1}{C_n(\alpha)} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-n} B_{n,l}^k \varphi_k, & n \geq 0, \\ \varphi_n &= \frac{1}{C_n(\alpha)} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-n} (-1)^{k-n} \tilde{A}_{n,l}^k \psi_k, & n \geq 0,\end{aligned}$$

представляет собой пару обратимых соотношений, союзную к системе теоремы 1.

4. Частные случаи

Приведенные выше соотношения могут служить источником построения новых комбинаторных объектов и нахождения различных комбинаторных тождеств.

4.1. Введем трехиндексные обобщения известных чисел Уитни. В формуле (2) положим $\alpha_i = 1$, $\beta_i = -\beta_{i+1}$, $\gamma_i = -\gamma_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots$. В формуле (3) положим $\alpha_i = 1$, $\beta_i = \beta_{i+1}$, $\gamma_i = \gamma_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots$. Тогда получим, что $B_{k,l}^n = w_{k,l}^n$, $A_{k,l}^n = W_{k,l}^n$, и из рекуррентных соотношений для этих чисел получаем рекуррентные формулы

$$w_{k,l}^n = w_{k-1,l}^{n-1} - \beta_n w_{k,l-1}^{n-1} - \gamma_n w_{k,l}^{n-1}, \quad (22)$$

$$W_{k,l}^n = W_{k-1,l}^{n-1} + \beta_{k+1} W_{k,l-1}^{n-1} + \gamma_{k+1} W_{k,l}^{n-1}, \quad (23)$$

где $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$, $0 \leq l \leq n-k$, с начальными условиями $w_{0,0}^0 = W_{0,0}^0 = 1$, $w_{k,l}^n = W_{k,l}^n = 0$, если $\min(n, l, k, n-k-l) < 0$.

Тогда из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Система линейных соотношений

$$\psi_n = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} w_{k,l}^n \varphi_k, \quad \varphi_n = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} W_{k,l}^n \psi_k, \quad n \geq 0, \quad (24)$$

образует пару обратимых соотношений.

Полагая $l = 0$ в формулах (22), получаем числа Уитни первого и второго рода, а из формул (23) — известное соотношение для этих чисел [1], имеющее приложение в теории частично упорядоченных множеств.

4.2. Введем трехиндексные обобщения известных чисел Стирлинга. В формуле (2) положим $\alpha_i = 1$, $\beta_i = \gamma_i = -i$, $i = 0, 1, \dots$. В формуле (3) положим $\alpha_i = 1$, $\beta_i = \gamma_i = i$, $i = 0, 1, \dots$. Тогда получим, что $B_{k,l}^n = s_{k,l}^n$, $A_{k,l}^n = S_{k,l}^n$, и из рекуррентных соотношений для этих чисел получаем рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} s_{k,l}^n &= s_{k-1,l}^{n-1} - (n-1)s_{k,l-1}^{n-1} - (n-1)s_{k,l}^{n-1}, \\ S_{k,l}^n &= S_{k-1,l}^{n-1} + kS_{k,l-1}^{n-1} + kS_{k,l}^{n-1}, \end{aligned} \quad (25)$$

где $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$, $0 \leq l \leq n-k$, с начальными условиями $s_{0,0}^0 = S_{0,0}^0 = 1$, $s_{k,l}^n = S_{k,l}^n = 0$, если $\min(n, l, k, n-k-l) < 0$. Тогда из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Следствие 2. Система линейных соотношений

$$\psi_n = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} s_{k,l}^n \varphi_k, \quad \varphi_n = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} S_{k,l}^n \psi_k, \quad n \geq 0, \quad (26)$$

образует пару обратимых соотношений.

Полагая $l = 0$ в формулах (24), получаем числа Стирлинга первого и второго рода, а из формул (25) — известное соотношение для этих чисел [2].

4.3. Введем трехиндексные обобщения известных чисел Лаха. В формуле (1) положим $\alpha_{n,k-1,l} = 1$, $\beta_{n,k,l-1} = \beta_{n-1} + \beta_k$, $\gamma_{n,k,l} = \gamma_{n-1} + \gamma_k$. Тогда получим рекуррентную формулу для этих чисел

$$L_{k,l}^n = L_{k-1,l}^{n-1} + (\beta_{n-1} + \beta_k)L_{k,l-1}^{n-1} + (\gamma_{n-1} + \gamma_k)L_{k,l}^{n-1}, \quad (27)$$

где $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$, $0 \leq l \leq n-k$, с начальными условиями $L_{0,0}^0 = 1$, $L_{k,l}^n = 0$, если $\min(n, l, k, n-k-l) < 0$. Тогда из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Следствие 3. Система линейных соотношений

$$\psi_n = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} L_{k,l}^n \varphi_k, \quad \varphi_n = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{n-k} L_{k,l}^n \psi_k, \quad n \geq 0, \quad (28)$$

образует пару обратимых соотношений.

Полагая $l = 0$ в формуле (26), получаем числа Лаха, а из формулы (27) — известное соотношение для этих чисел [2].

Список литературы

1. Кузьмин О. В., *Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения*. Наука, Новосибирск, 2000.
2. Платонов М. Л., *Комбинаторные числа класса отображений и их приложения*. Наука, Москва, 1979.

Статья поступила 20.06.2007.