Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Жук, Об онлайн-алгоритмах упаковки прямоугольников в несколько полос, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 4, 117–131

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm981>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 15:11:02

Об онлайн-алгоритмах упаковки прямоугольников в несколько полос

© 2007 г. С. Н. Жук

Исследуется задача об упаковке прямоугольников в несколько полос. Показано, что для этой задачи существуют онлайн-алгоритмы с асимптотической мультипликативной ошибкой сколь угодно близкой к $2e$, где e — основание натурального логарифма. Доказано, что ни один онлайн-алгоритм не может иметь асимптотическую мультипликативную ошибку меньше, чем e .

1. Введение

Задача упаковки прямоугольников в несколько полос заключается в следующем: имеется несколько полубесконечных вертикальных полос, вообще говоря, различной ширины, и набор открытых прямоугольников. Требуется найти ортогональное размещение этих прямоугольников в полосы (без пересечений и вращений, боковые стороны прямоугольников параллельны сторонам полос), имеющее минимальную высоту (высота есть максимум по всем прямоугольникам и по всем полосам расстояний от дна полосы до верхней грани прямоугольников).

Эта задача возникает, например, при распределении ресурсов в глобальных вычислительных сетях GRID, объединяющих различные вычислительные ресурсы (кластеры). Проблема оптимального размещения задач на группе кластеров имеет простую геометрическую интерпретацию (см. [15]). Кластер можно представить как бесконечную в одну сторону полосу определенной ширины (ширина характеризует число процессоров кластера, другое измерение соответствует времени), а задачу — как прямоугольник с высотой и шириной, равными времени выполнения и требуемому числу процессоров соответственно. Тогда естественно возникает задача упаковки данного множества задач (прямоугольников) в несколько полос (кластеров), требование, что прямоугольники не должны пересекаться означает, что каждая задача на некоторое время (равное высоте прямоугольника) занимает некоторое число процессоров (равное ширине прямоугольника).

Даже для случая одной полосы рассматриваемая задача является NP-трудной. Например, к ней сводится одномерная задача об упаковке в контейнеры (см. [1]). Если высоты всех прямоугольников равны 1, то слои, которые будут получаться при их размещении, как раз и соответствуют этим контейнерам. Поэтому обычно изучают эффективные приближенные алгоритмы, которые позволяют найти решение с определенной точностью.

Для оценки точности приближенных алгоритмов будем использовать следующие характеристики. Пусть T — некоторая последовательность прямоугольников, C — множество полос, $H_O(T, C)$ и $H_A(T, C)$ — высота оптимального размещения прямоугольников и

высота размещения, полученная с помощью алгоритма A . Всюду далее мы предполагаем, что высота каждого прямоугольника ограничена некоторой абсолютной константой $h_{\max}$. Тогда мультипликативная ошибка алгоритма A определяется как

$$R_A = \sup_{T, C} \{H_A(T, C)/H_O(T, C)\},$$

а асимптотическая мультипликативная ошибка как

$$R_A^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{T, C} \{H_A(T, C)/H_O(T, C) \mid H_O(T, C) \geq k\}.$$

Особый интерес представляют алгоритмы, работающие в режиме онлайн (online), так называемые онлайн-алгоритмы. Это означает, что множество T рассматривается как последовательность, члены которой подаются на вход алгоритма один за другим, причем размещение очередного прямоугольника из T в полосах из C производится без какой-либо информации о последующих членах последовательности. Онлайн-алгоритмы более эффективны и их удобнее использовать на практике, так как далеко не всегда с самого начала известны все размещаемые объекты.

Наиболее исследованы частные случаи рассматриваемой задачи. Один из них — уже упомянутая классическая задача об упаковке в контейнеры. Другой частный случай, когда имеется всего одна полоса, — это также известная и хорошо исследованная задача. Впервые ее изучали в 1980 г., в [2] была предложена простая эвристика Bottom-Left, позволяющая размещать прямоугольники внутри одной полосы с мультипликативной ошибкой 3. Затем в [4] был предложен алгоритм с мультипликативной ошибкой $5/4$. Этот алгоритм оставался лучшим до тех пор, пока в [3] не был построен алгоритм, позволяющий за полиномиальное время находить почти оптимальное решение (с асимптотической мультипликативной ошибкой, не превышающей $1 + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$).

Для класса онлайн-алгоритмов тоже имеется значительное количество исследований. В [5] были предложены так называемые шельфовые алгоритмы, являющиеся подклассом онлайн-алгоритмов. В данных алгоритмах полоса разбивается на горизонтальные слои (шельфы) различной высоты, а для размещения прямоугольников внутри шельфов используется какая-нибудь эвристика для одномерной упаковки в контейнеры. Один из таких алгоритмов с очень простой эвристикой First-Fit позволяет добиться мультипликативной ошибки, не превышающей 1,7. Затем в [6] было показано, что ни для какого шельфового алгоритма асимптотическая мультипликативная ошибка не может быть меньше, чем 1,69103 и был построен алгоритм, позволяющий сколь угодно близко подойти к данному значению. В [8] доказано, что никакой онлайн-алгоритм упаковки прямоугольников в несколько полос не может иметь асимптотическую мультипликативную ошибку меньше, чем 1,5401.

Еще один важный частный случай рассматриваемой задачи — это задача о составлении расписания для m машин. Если имеется m одинаковых полос ширины 1 и все прямоугольники также имеют ширину, равную 1, то как раз получится задача об m машинах. Впервые она исследовалась в [9], где предложен простой онлайн-алгоритм, который размещает каждую новую задачу на наименее загруженную машину. Мультипликативная ошибка этого алгоритма не превосходит $2 - 1/m$. Несмотря на простоту данного алгоритма, долгое время не удавалось построить алгоритм, мультипликативная ошибка которого бы была меньше $2 - \varepsilon$ для любого m (для фиксированного положительного ε). Только в 1992 г. в [11] был предложен онлайн-алгоритм с мультипликативной ошибкой, не большей 1,986 для всех $m > 70$. Это значение затем было улучшено до 1,945, а затем и до 1,923

в работах [10] и [13]. Также было получено несколько результатов о нижних оценках для таких алгоритмов. В [14] было показано, что ни один детерминированный онлайн-алгоритм не может иметь мультипликативную ошибку меньше, чем 1,837 для достаточно большого m . Этот результат был улучшен в [10] до 1,852.

Что касается задачи об упаковке прямоугольников в несколько полос, то она до сих пор остается в значительной степени не исследованной. В [18] предложен оффлайн-алгоритм, основанный на эвристике Bottom-Left, позволяющий размещать прямоугольники с мультипликативной ошибкой, не превышающей 3. В [16] рассмотрен алгоритм, размещающий прямоугольники по полосам в онлайн-режиме и имеющий мультипликативную ошибку не более 10. Однако внутри каждой полосы этот алгоритм размещает прямоугольники не в онлайн-режиме, а значит, весь алгоритм не является онлайн-алгоритмом.

В данной работе получены следующие основные результаты для задачи упаковки прямоугольников в несколько полос.

- Показано (теорема 1), что асимптотическая мультипликативная ошибка любого онлайн-алгоритма не меньше, чем e ($e \approx 2,71828$ — основание натурального логарифма).
- Показано, что в классе онлайн-алгоритмов существуют алгоритмы с асимптотической мультипликативной ошибкой сколь угодно близкой к $2e$ (теорема 3).

Структура работы такова. В разделе 2 описана формальная постановка задачи и введены некоторые обозначения. В разделе 3 рассматривается простая оценка для оптимальной высоты размещения прямоугольников. Эта оценка понадобится для доказательства теоремы о нижней оценке ошибки. Раздел 4 посвящен непосредственно доказательству справедливости нижней оценки мультипликативной ошибки для онлайн-алгоритмов. Наконец, в разделе 5 описан онлайн-алгоритм $A(r)$, позволяющий размещать прямоугольники с асимптотической ошибкой $2e/r$ для любого $r < 1$. Самой сложной частью оказалось доказательство корректности этого алгоритма (теорема 2).

2. Постановка задачи и некоторые обозначения

Входом задачи является конечная последовательность $T = \{T_1, \dots, T_n\}$ открытых прямоугольников, для которых $h(T_j)$ и $w(T_j)$ — соответственно высота и ширина прямоугольника T_j , $j = 1, \dots, n$, причем высота каждого прямоугольника ограничена некоторой абсолютной константой $h_{\max}$, и $C = \{C_1, \dots, C_m\}$ — множество полубесконечных вертикальных полос, w_i — ширина i -й полосы, $i = 1, \dots, m$.

При этом подразумевается, что нижние стороны полос C лежат на некоторой горизонтальной прямой L , а нижние стороны прямоугольников множества T с самого начала параллельны L и остаются таковыми при размещении. Размещенные в C прямоугольники не должны пересекаться.

Высота размещения множества T для заданного набора полубесконечных полос C определяется как минимально возможная высота огибающего прямоугольника с нижним основанием, лежащим на прямой L , содержащего все размещенные прямоугольники из T .

Задача состоит в том, чтобы найти размещение последовательности прямоугольников T в этих полосах, имеющее минимальную высоту.

Будем считать, что $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_m$.

Пусть заданы две последовательности прямоугольников $T^1 = \{T_1^1, \dots, T_{n_1}^1\}$ и $T^2 = \{T_1^2, \dots, T_{n_2}^2\}$. Будем обозначать через $T^1 + T^2$ объединенную последовательность $T^1 = \{T_1^1, \dots, T_{n_1}^1, T_1^2, \dots, T_{n_2}^2\}$.

Пусть R — некоторый прямоугольник. Введем обозначение

$$\text{last}(R) = \max\{k: w_k \geq w(R)\}.$$

Все прямоугольники разобьем на классы $M_1, \dots, M_m$, полагая

$$R \in M_i \iff \text{last}(R) = i.$$

Пусть $S(R)$ — площадь прямоугольника R . Если Q — некоторое множество прямоугольников, то через $S(Q)$ будем обозначать суммарную площадь всех прямоугольников из этого множества.

Пусть T — последовательность прямоугольников. Положим

$$S_i(T) = S(\{R \in T \mid R \in M_i\}).$$

Пусть имеется некоторый алгоритм A , размещающий прямоугольники по полосам. Обозначим через $A(T)$ — вектор, содержащий m значений $y = (y_1, \dots, y_m)$, где y_k — суммарная площадь прямоугольников из последовательности T , размещенных алгоритмом A в полосе с номером k , $k = 1, \dots, m$.

3. Нижняя оценка высоты оптимального размещения

Положим

$$d_i = \sum_{j=1}^i w_j, \quad D_i(T) = \sum_{j=1}^i S_j(T), \quad h(T) = \max_i \frac{D_i(T)}{d_i}.$$

При добавлении новых прямоугольников $D_i(T)$ только увеличиваются. Поэтому $h(T)$ тоже может только увеличиваться. Для дальнейшего доказательства нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1. Для любого множества полос C и последовательности прямоугольников T

$$H_O(T, C) \geq h(T).$$

Доказательство. Пусть $h(T) = D_k/d_k$. Прямоугольники из $M_1, \dots, M_k$ могут быть размещены только на полосах с 1-й по k -ю. Поскольку суммарная ширина этих полос равна d_k , для суммарной площади этих прямоугольников справедлива оценка

$$D_k \leq H_O(T, C) d_k.$$

Это неравенство равносильно утверждению леммы.

Лемма 2. Для любого множества полос C и последовательности прямоугольников T найдутся неотрицательные числа S_i^j , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, i$, такие, что

$$\sum_{j=1}^i S_i^j = S_i(T), \quad \sum_{i=j}^m S_i^j \leq h(T) w_j.$$

Доказательство. Числа S_i^j можно построить с помощью следующего простого алгоритма.

- (1) $S_i^j := 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, i.$
- (2) $A_i := S_i(T), \quad i = 1, \dots, m.$
- (3) $B_j := h(T)w_j, \quad j = 1, \dots, m.$
- (4) $i := 1, \quad j := 1.$
- (5) Пока $i \leq m$ и $j \leq i$, выполнять (6).
- (6) Если $A_i \leq B_j$, то $S_i^j := A_i, \quad B_j := B_j - A_i, \quad A_i := 0, i := i + 1$,
в противном случае $S_i^j := B_j, \quad A_i := A_i - B_j, \quad B_j := 0, j := j + 1$.
Если $A_i > B_j$, то $S_i^j := B_j, \quad B_j := 0, \quad A_i := A_i - B_j.$

Покажем теперь, что выполнены требуемые условия на числа S_i^j . Заметим, что в процессе работы алгоритма S_i^j, A_i и B_j всегда остаются неотрицательными и кроме того выполняются равенства

$$A_i + \sum_{j=1}^i S_i^j = S_i(T), \quad (1)$$

$$B_j + \sum_{i=j}^m S_i^j = h(T)w_j. \quad (2)$$

Из неотрицательности B_j и выражения (2) следует выполнение неравенства из утверждения леммы.

Покажем, что в процессе работы алгоритма всегда выполнено неравенство $j \leq i$. Предположим, что это не так. Тогда найдется такой момент, в котором $i = j$ и $A_i > B_i$. Заметим, что i увеличивается, только если $A_i = 0$, j увеличивается только если $B_j = 0$. Поэтому из соотношений $A_i > B_i$ и $j = i$, следует что

$$\begin{aligned} D_i(T) &= \sum_{k=1}^i S_k(T) = \sum_{k=1}^i \left(A_k + \sum_{l=1}^k S_k^l \right) \\ &= A_i + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^k S_k^l > B_i + \sum_{l=1}^i \sum_{k=l}^i S_k^l \\ &= \sum_{l=1}^i \left(B_l + \sum_{k=l}^m S_k^l \right) = \sum_{l=1}^i h(T)w_l = d_i h(T). \end{aligned}$$

Это противоречит определению $h(T)$. Следовательно всегда $j \leq i$. Поэтому к окончанию работы алгоритма $A_i = 0, \quad i = 1, \dots, m$, и из (1) следует, что выполнено равенство из утверждения леммы.

4. Нижняя оценка асимптотической мультипликативной ошибки

В этом разделе мы оценим снизу асимптотическую мультипликативную ошибку для онлайн-алгоритмов, размещающих прямоугольники в несколько полос. Пусть далее e — основание натурального логарифма.

Теорема 1. Для любого онлайн-алгоритма A выполнено неравенство

$$R_A^\infty \geq e.$$

Доказательство. Предположим противное, то есть что существует $a < e$ и онлайн-алгоритм A , для которого $R_A^\infty \leq a$. Для удобства будем считать, что максимальная высота прямоугольника $h_{\max}$ равна 1.

Опишем постоянные. Положим $b = (a + e)/2$. Из неравенства $a < e$ следует, что $b < e$. Выберем числа $0 < \alpha < 1$ и $\gamma > 1$ так, что

$$(\alpha + (1 - \alpha)^{(1-\alpha)/\alpha})\gamma < 1/b.$$

Такие α и γ существуют, так как

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\alpha + (1 - \alpha)^{(1-\alpha)/\alpha}) = 1/e.$$

Выберем целое число m так, что $(1/m)^\alpha < \alpha$.

Далее выберем множество полос. Пусть имеется m множеств полос $C_1, \dots, C_m$, и пусть C_k состоит из 2^{k-1} полос ширины $2^{-(k-1)}/m$. Суммарная ширина полос из C_k равна $1/m$. Суммарная ширина всех полос равна 1. Суммарное число полос из всех множеств равно $2^m - 1$.

Также пусть $\bar{d}_k = k/m$ — суммарная ширина полос из множеств с 1-го по k -е, $\bar{d}_0 = 0$ и $\bar{D}_k(T) = D_{i(k)}(T)$. Обозначим через $i(k)$ номер последней полосы из множества с номером k .

Опишем прямоугольники. Из предположения, что $R_A^\infty(C) \leq a$ и условия $a < m$ вытекает, что для выбранного множества полос $C = \{C_1, \dots, C_m\}$ найдется такое число $h_{\min}$, что выполнены следующие два условия:

(а) для любого размещения, в котором $H_O(T, C) > h_{\min}$, справедливо неравенство

$$\frac{H_A(T, C)}{H_O(T, C)} < b;$$

(б) $h_{\min} > m(\gamma - 1)^{-1}$, что эквивалентно условию $(h_{\min} + m)/h_{\min} < \gamma$.

Выберем целое положительное число Q так, что

$$Q(1 - (1 - 1/m)^\alpha) > h_{\min}.$$

Рассмотрим следующее множество прямоугольников $G = \{G_1, \dots, G_m\}$: G_k состоит из $Qm2^{k-1}$ прямоугольников ширины $m2^{-(k-1)}$ и высоты, равной $(\bar{d}_k)^\alpha - (\bar{d}_{k-1})^\alpha$, что не больше, чем 1. Тогда площадь прямоугольников из G_k равна $Q((\bar{d}_k)^\alpha - (\bar{d}_{k-1})^\alpha)$. Суммарная площадь всех прямоугольников равна

$$S = Q. \quad (3)$$

Перейдем к описанию размещения. Рассмотрим последовательность прямоугольников $T = \{G_m, \dots, G_1\}$, в которой сначала стоят все прямоугольники из G_m , затем все из G_{m-1} , и так далее до G_1 . Положим также $T_k = \{G_m, \dots, G_k\}$, $k = 1, \dots, m$.

Пусть $H_k = H_O(T_k)$ — высота оптимального размещения в тот момент, когда пришел последний прямоугольник из G_k (к этому моменту должны быть размещены все прямоугольники из групп $G_k, \dots, G_m$). Пусть $h_k = h(T_k)$ — нижняя оценка оптимальной высоты размещения.

Лемма 3. *Справедливы неравенства*

$$h_k \leq H_k \leq \gamma h_k.$$

Доказательство. Нижняя оценка очевидна, докажем верхнюю оценку. Суммарная площадь всех прямоугольников из T_k равна (с учетом того, что $\bar{d}_m = 1$)

$$\begin{aligned} S(T_k) &= \sum_{i=k}^m Q((\bar{d}_i)^\alpha - (\bar{d}_{i-1})^\alpha) = Q((\bar{d}_m)^\alpha - (\bar{d}_{k-1})^\alpha) \\ &= Q(1 - (\bar{d}_{k-1})^\alpha) \geq Q(1 - (1 - 1/m)^\alpha). \end{aligned}$$

Поэтому

$$h_k \geq \frac{S(T_k)}{\bar{d}_m} \geq Q(1 - (1 - 1/m)^\alpha) > h_{\min}.$$

Следовательно, из условия (б) для $h_{\min}$ получим, что $(h_k + m)/h_k < \gamma$. Таким образом, осталось показать, что $H_k \leq h_k + m$. Для этого построим размещение прямоугольников, высота которого не будет превосходить $h_k + m$.

По лемме 2 из предыдущего раздела, для последовательности прямоугольников T_k найдутся неотрицательные числа S_i^j , $j \leq i$ (индексы i и j здесь обозначают номер полосы, а не номер множества), такие, что выполнены соотношения

$$\sum_{j=1}^i S_i^j = S_i, \quad \sum_{i=j}^{2^m-1} S_i^j \leq h_k w_j, \quad i = 1, \dots, 2^m - 1, \quad j = 1, \dots, 2^m - 1. \quad (4)$$

Заметим, что S_i отлично от 0 только для полос, являющихся последними в каждом из множеств полос $C_1, \dots, C_k$.

Далее прямоугольники будем размещать следующим образом. Рассмотрим полосу с номером j . Для каждого $i \geq j$, для которого $S_i > 0$, будем размещать прямоугольники из T_k , принадлежащие M_i , в полосе с номером j до тех пор, пока суммарная площадь этих прямоугольников не превысит S_i^j или не закончатся неразмещенные прямоугольники из M_i . Все прямоугольники из M_i принадлежат одному и тому же множеству G_k , следовательно, у них у всех одинаковая высота, и ширина любого прямоугольника в целое число раз меньше ширины полосы, на которую они размещаются. Следовательно, размещая их последовательно в ряды, мы получим размещение с высотой, не превосходящей $S_i^j/w_j + 1$. Поэтому суммарная высота размещения прямоугольников в полосе j в силу условия (4) не превзойдет

$$\sum_{i \geq j, S_i > 0} (S_i^j/w_j + 1) \leq m + \sum_{i \geq j} S_i^j/w_j \leq m + h_k.$$

Лемма доказана.

Проведем анализ размещения. Непосредственно из определения h следует, что

$$\begin{aligned} h_k &= \max_t \frac{\bar{D}_t(T_k)}{\bar{d}_t} = \max_{t \geq k} \frac{1}{\bar{d}_t} \sum_{j=k}^t S(G_j) \\ &= Q \max_{t \geq k} \frac{1}{\bar{d}_t} \sum_{j=k}^t ((\bar{d}_j)^\alpha - (\bar{d}_{j-1})^\alpha) \\ &= Q \max_t \frac{\bar{d}_t^\alpha - \bar{d}_{k-1}^\alpha}{\bar{d}_t}. \end{aligned}$$

При $k = 1$

$$h_1 = Q \max_t \bar{d}_t^{\alpha-1} = Q(\bar{d}_1)^{\alpha-1} = Qm^{1-\alpha}.$$

Максимум функции $q(t) = (t^\alpha - x^\alpha)/t$ по t достигается при $t = x(1 - \alpha)^{-1/\alpha}$. Поэтому для $k \geq 2$

$$\frac{h_k}{Q} \leq \frac{(\bar{d}_{k-1}(1 - \alpha)^{-1/\alpha})^\alpha - (\bar{d}_{k-1})^\alpha}{\bar{d}_{k-1}(1 - \alpha)^{-1/\alpha}} = \alpha(1 - \alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} (\bar{d}_{k-1})^{\alpha-1}$$

В полосы из C_k размещаются прямоугольники только из множеств $G_m, \dots, G_k$, поэтому высота размещения прямоугольников в каждой из этих полос не превзойдет $H_A(T_k)$, и следовательно, суммарная площадь прямоугольников, размещенных на всех полосах из C_k , не превзойдет $H_A(T_k)/m$ (суммарная ширина всех полос из C_k равна $1/m$). Из неравенства $H_k > h_{\min}$ следует, что $H_A(T_k) \leq bH_k$.

Следовательно, для суммарной площади прямоугольников, размещенных на всех полосах, справедлива оценка

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m bH_k \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m b\gamma h_k = \frac{b\gamma h_1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{k=2}^m b\gamma h_k \\ &\leq \frac{b\gamma Q}{m^\alpha} + \frac{b\gamma}{m} \sum_{k=2}^m Q\alpha(1 - \alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} (\bar{d}_{k-1})^{\alpha-1} \\ &\leq b\gamma Q \left(\frac{1}{m^\alpha} + \alpha(1 - \alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} \sum_{k=2}^m \int_{\bar{d}_{k-2}}^{\bar{d}_{k-1}} x^{\alpha-1} dx \right) \\ &\leq b\gamma Q \left(\frac{1}{m^\alpha} + \alpha(1 - \alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} \int_0^1 x^{\alpha-1} dx \right) \\ &= b\gamma Q \left(\frac{1}{m^\alpha} + (1 - \alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} \right) \\ &\leq b\gamma Q(\alpha + (1 - \alpha)^{(1-\alpha)/\alpha}) < Q. \end{aligned}$$

Таким образом, получили противоречие с равенством (3).

Теорема доказана.

5. Верхняя оценка асимптотической мультипликативной ошибки

5.1. Описание алгоритма A_r

Для размещения прямоугольников внутри полос мы будем использовать так называемый шельфовый алгоритм. Он был рассмотрен в [4] для случая одной полосы.

Пусть задана некоторая константа $r \in (0, 1)$. Шельф — это прямоугольная часть полосы, с шириной равной ширине полосы. Как только приходит новый прямоугольник R , шельфовый алгоритм определяет целое число k такое, что $r^{k+1} < h(R) \leq r^k$, и после этого он размещает данный прямоугольник в шельфе высоты r^k . Прямоугольник может быть размещен в один из существующих шельфов, или сверху может быть создан новый шельф высоты r^k . Прямоугольники внутри каждого шельфа размещаются по горизонтали в ряд. Таким образом, упаковка прямоугольников, попавших в один класс по высоте (то есть которым соответствует одно значение k), производится с помощью некоторой эвристики, осуществляющей одномерную упаковку в контейнеры. Мы будем использовать эвристику First-Fit (FF), которая каждый прямоугольник помещает в первый шельф, в который он влезает по высоте, и, если таких нет, создает новый шельф и размещает прямоугольник в нем.

Описанный выше алгоритм будем обозначать $\text{Shelf}(r)$.

Алгоритм A_r . Алгоритм размещает прямоугольники в режиме онлайн. Пусть последовательность прямоугольников T уже размещена алгоритмом, и пусть

$$A_r(T) = y = (y_1, \dots, y_k).$$

Каждый новый прямоугольник R данный алгоритм обрабатывает следующим образом.

(1) Вычисляется $h = h(T + \{R\})$.

(2) Определяется номер полосы k такой, что

$$k = \max\{i : w(R) \leq w_i, y_i/w_i \leq eh\}.$$

Если такое k существует, то прямоугольник R размещается в полосу k , в противном случае алгоритм заканчивает свою работу. В последнем случае остаются неразмещенные прямоугольники (то есть алгоритм работает некорректно).

(3) Для размещения прямоугольников внутри каждой полосы используется шельфовый алгоритм $\text{Shelf}(r)$.

5.2. Корректность алгоритма A_r

Теорема 2. Для любого множества полос S и любой последовательности прямоугольников T алгоритм A_r размещает все прямоугольники из T .

Доказательство теоремы 2 проведем в несколько этапов. Нам понадобится следующее определение.

Определение 1. Пусть $B(T)$ — набор m чисел $(z_1, z_2, \dots, z_m)$, которые вычисляются следующим образом:

(1) Для всех $i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, m$

$$\alpha_{ik} = \begin{cases} 0, & d_k < d_i/e \text{ или } d_k > d_i, \\ \ln(d_k/d_{k-1}), & d_i/e \leq d_{k-1} < d_i, \\ \ln(ed_k/d_i), & d_{k-1} < d_i/e \leq d_k. \end{cases} \quad (5)$$

(2) Для всех $k = 1, \dots, m$

$$z_k = \sum_{i=k}^m \alpha_{ik} S_i(T). \quad (6)$$

Заметим, что $\sum_{k=1}^i \alpha_{ik} = 1$, и следовательно,

$$\sum_{k=1}^m z_k = \sum_{i=1}^m S_i(T) = S(T). \quad (7)$$

Лемма 4. Пусть T — произвольная последовательность прямоугольников,

$$B(T) = (z_1, \dots, z_m), \quad h = h(T).$$

Тогда

$$z_k/w_k \leq eh, \quad k = 1, \dots, m.$$

Доказательство. Введем функцию

$$\psi_i(t) = \begin{cases} 1/t, & d_i/e \leq t \leq d_i, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\alpha_{ik} = \int_{d_{k-1}}^{d_k} \psi_i(t) dt.$$

Рассмотрим полосу с номером k . Пусть $S_i = S_i(T)$. Ясно, что

$$z_k = \sum_{i=k}^m \alpha_{ik} S_i = \sum_{i=k}^m S_i \left(\int_{d_{k-1}}^{d_k} \psi_i(t) dt \right) = \int_{d_{k-1}}^{d_k} \left(\sum_{i=k}^m S_i \psi_i(t) \right) dt. \quad (8)$$

Оценим теперь сумму $\sum_{i=k}^m S_i \psi_i(t)$ при $t \in [d_{k-1}, d_k]$. Рассмотрим два случая. В первом случае $d_k/e > t$. Поэтому в данном случае $d_i/e > t$ для любого $i \geq k$ (из монотонности d_i). Следовательно, $\psi_i(t) = 0$ для любого $i \geq k$. Таким образом,

$$\sum_{i=k}^m S_i \psi_i(t) = 0 < eh.$$

Во втором случае $d_k/e \leq t$. Положим $a = \max\{j: d_j/e \leq t\}$ (такое a существует, так как $d_k/e \leq t$). Тогда $\psi_i(t) = 1/t$ для любого $i, k \leq i \leq a$, и $\psi_i(t) = 0$ для любого $i > a$. Кроме того, $d_a/t \leq e$. Следовательно,

$$\sum_{i=k}^m S_i \psi_i(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=k}^a S_i = \frac{1}{t} \sum_{i=k}^a (D_i - D_{i-1}) = \frac{1}{t} (D_a - D_{k-1}).$$

Для любого j справедливо неравенство $0 \leq D_j \leq d_j h$, поэтому

$$\sum_{i=k}^m S_i \psi_i(t) \leq \frac{h d_a}{t} \leq e h.$$

Объединяя рассмотренные случаи, получаем, что для любого $t \in [d_{k-1}, d_k]$

$$\sum_{i=k}^m S_i \psi_i(t) \leq \frac{h d_a}{t} \leq e h.$$

Подставляя это в (8), получим, что

$$z_k \leq \int_{d_{k-1}}^{d_k} e h dt = e h w_k.$$

Лемма доказана.

Введем отношение частичного порядка $\succ$ на размещениях.

Определение 2. Пусть заданы два набора $y = (y_1, \dots, y_m)$ и $z = (z_1, \dots, z_m)$ чисел таких, что $\sum_{j=1}^m y_j = \sum_{j=1}^m z_j$. Тогда

$$y \succ z \iff \forall k = 1, \dots, m: \sum_{j=1}^k y_j \leq \sum_{j=1}^k z_j.$$

Очевидно, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. Справедливо соотношение

$$y \succ z \iff \forall k = 1, \dots, m: \sum_{j=k}^m y_j \geq \sum_{j=k}^m z_j.$$

Пусть для краткости $\exists A_r(T)$ означает, что алгоритм A_r размещает все прямоугольники из последовательности T .

Лемма 6. Пусть T — некоторая последовательность прямоугольников, R — произвольный прямоугольник. Предположим, что $\exists A_r(T)$ и $A_r(T) = y = (y_1, \dots, y_m)$. Пусть для любого k

$$\sum_{j=1}^k y_j \leq e h(T) d_k.$$

Тогда $\exists A_r(T + \{R\})$. Другими словами, с помощью алгоритма A_r можно добавить прямоугольник R к данному размещению.

Доказательство. Предположим, что прямоугольник R нельзя добавить. Пусть $R \in M_k$. Тогда для всех $j = 1, \dots, k$

$$y_j > e h(T + \{R\}) w_j.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^k y_j > e h(T + \{R\}) \sum_{j=1}^k w_j = e h(T + \{R\}) d_k.$$

Так как $h(T + \{R\}) \geq h(T)$, справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^k y_j > eh(T)d_k.$$

Получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть T — некоторая последовательность прямоугольников и $\exists A_r(T)$; $y = A_r(T)$, $z = B(T)$, $y \succ z$; R — произвольный прямоугольник.

Тогда $\exists A_r(T + \{R\})$ и если $\tilde{y} = A_r(T + \{R\})$ и $\tilde{z} = B(T + \{R\})$, то $\tilde{y} \succ \tilde{z}$.

Доказательство. Положим $h = h(T)$ и пусть $R \in M_i$.

Докажем первое утверждение. Для любого j справедливо неравенство $z_j \leq ehw_j$ (лемма 4) и $y \succ z$, поэтому для любого k

$$\sum_{j=1}^k y_j \leq \sum_{j=1}^k z_j \leq \sum_{j=1}^k ehw_j = ehd_k.$$

Следовательно, по лемме 6 получаем, что к размещению y с помощью алгоритма A_r можно добавить прямоугольник R .

Докажем второе утверждение. Пусть $\tilde{h} = h(T + \{R\})$, и пусть алгоритм A_r размещает прямоугольник R на полосу с номером l . Тогда $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_{l-1}, y_l + S(R), y_{l+1}, \dots, y_m)$. Так как

$$\sum_{j=1}^m \tilde{y}_j = \sum_{j=1}^m \tilde{z}_j = S(T + \{R\}),$$

чтобы доказать, что $\tilde{y} \succ \tilde{z}$, нужно показать, что для любого $k = 1, \dots, m$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=k}^m \tilde{y}_j \geq \sum_{j=k}^m \tilde{z}_j. \quad (9)$$

(а) Если $k > i$, то $\tilde{y}_k = y_k$, $\tilde{z}_k = z_k$. Поэтому очевидно, что (9) выполнено.

(б) Пусть $k \leq l$. Тогда

$$\sum_{j=k}^m \tilde{y}_j = \sum_{j=k}^m y_j + S(R) \geq \sum_{j=k}^m z_j + S(R) \geq \sum_{j=k}^m \tilde{z}_j.$$

(в) Пусть $i < k \leq l$. Из леммы 4 следует, что $\tilde{z}_j \leq ew_j \tilde{h}$ для всех $j = k, \dots, l$. Так как прямоугольник R не был размещен алгоритмом A_r на полосы с номерами $k, \dots, i$, для любого $j = k, \dots, i$ справедливо неравенство $y_j = \tilde{y}_j > ew_j \tilde{h}$. Следовательно, $\sum_{j=k}^i \tilde{y}_j > \sum_{j=k}^i \tilde{z}_j$. Так как $\sum_{j=i+1}^m y_j \geq \sum_{j=i+1}^m z_j$, справедливо неравенство $\sum_{j=k}^m \tilde{y}_j \geq \sum_{j=k}^m \tilde{z}_j$. Лемма доказана.

Утверждение теоремы 2 получается с использованием индукции с применением леммы 7.

5.3. Верхние оценки ошибки для алгоритма A_r

Получим теперь верхнюю оценку асимптотической мультипликативной ошибки для алгоритма A_r .

Теорема 3. *Справедливо неравенство*

$$R_{A_r}^\infty \leq \frac{2e}{r}.$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующее свойство шельфовых алгоритмов.

Лемма 8. *Рассмотрим какую-нибудь полосу. Пусть S — суммарная площадь всех прямоугольников кроме последнего, упакованных в данную полосу, w — ширина рассматриваемой полосы и $h_{\max}$ — максимальная высота прямоугольника. Тогда для высоты упаковки прямоугольников, получившейся с помощью алгоритма Shelf(r), справедливо неравенство*

$$H_{\text{Shelf}(r)} \leq \frac{2S}{rw} + h_{\max} \left(\frac{1}{r(1-r)} + 1 \right).$$

Доказательство. Пусть R — прямоугольник, который был последним добавлен на данную полосу. Рассмотрим все прямоугольники, кроме R . Если при добавлении R был образован новый шельф, то также исключим его из рассмотрения.

Пусть $E = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$ — множество шельфов данной полосы. Разобьем все шельфы на два множества:

$$G_1 = \{\varepsilon \in E: \varepsilon \text{ заполнен меньше, чем наполовину по ширине}\}$$

$$G_2 = \{\varepsilon \in E: \varepsilon \text{ заполнен не меньше, чем наполовину по ширине}\}.$$

Положим также $H_i = \sum_{\varepsilon \in G_i} h(\varepsilon)$, $i = 1, 2$, где $h(\varepsilon)$ — высота шельфа ε . Тогда H_i — суммарная высота шельфов из множества G_i . Для высоты размещения с помощью алгоритма Shelf(r) справедливо неравенство

$$H_{\text{Shelf}(r)} \leq H_1 + H_2 + h(R). \quad (10)$$

Получим теперь оценки для H_1 и H_2 . Рассмотрим сначала множество G_1 . Каждый шельф в этом множестве заполнен меньше, чем наполовину. Поэтому, так как мы используем эвристику First-Fit, в G_1 нет двух шельфов одинаковой высоты.

Пусть h_1 — высота самого большого шельфа в G_1 . Тогда

$$H_1 < h_1 + h_1 r + h_1 r^2 + h_1 r^3 + \dots = \frac{h_1}{1-r}.$$

Так как $h_{\max} > r h_1$, справедливо неравенство

$$H_1 \leq \frac{h_{\max}}{r(1-r)}. \quad (11)$$

Оценим теперь H_2 . Каждый из шельфов из G_2 заполнен по ширине не меньше, чем наполовину, и высота любого прямоугольника в нем составляет не менее r -й части от высоты шельфа. Поэтому

$$S \geq \frac{r}{2} H_2 w \implies H_2 \leq \frac{2S}{rw}. \quad (12)$$

Подставляя (11) и (12) в (10) и учитывая, что $h(R) \leq h_{\max}$, получим оценку

$$H_{\text{Shelf}(r)} \leq \frac{2S}{rw} + h_{\max} \left(\frac{1}{r(1-r)} + 1 \right).$$

Лемма 8 доказана.

Лемма 9. Для любого множества полос C и любой последовательности прямоугольников T справедливо неравенство

$$H_{A_r}(T, C) \leq \frac{2e}{r} H_O(T, C) + \left(\frac{1}{1-r} + 1 \right) h_{\max}.$$

Доказательство. Пусть наибольшая высота размещения достигается на полосе с номером j . Пусть R — последний прямоугольник, размещенный в данную полосу, и пусть суммарная площадь всех остальных прямоугольников, размещенных в данной полосе, равна S . Так как прямоугольник был размещен именно в данную полосу,

$$S/w_j \leq eh(T) \leq eH_O(T, C).$$

Применим теперь лемму 8 для полосы с номером j . Получим, что

$$\begin{aligned} H_{A_r}(T, C) &\leq \frac{2}{r} H_O(T, C) + \left(\frac{1}{r(1-r)} + 1 \right) h_{\max} \\ &\leq \frac{2e}{r} H_O(T, C) + \left(\frac{1}{r(1-r)} + 1 \right) h_{\max}. \end{aligned}$$

Лемма 9 доказана.

Теорема 3 является следствием леммы 9.

Теорема 4. Существует $r > 0$ такое, что для любого множества полос C и любой последовательности прямоугольников T справедливо неравенство

$$\frac{H_{A_r}(T, C)}{H_O(T, C)} \leq (1 + \sqrt{2e + 1})^2 + 1 \approx 13.51.$$

Доказательство. Так как $H_O(T, C) \geq h_{\max}$, справедливо неравенство

$$H_{A_r}(T, C) \leq H_O(T, C) \left(\frac{2e}{r} + \frac{1}{r(1-r)} + 1 \right).$$

Минимум выражения в скобках достигается при $r = (\sqrt{2e + 1})/(1 + \sqrt{2e + 1})$ и равен $(1 + \sqrt{2e + 1})^2 + 1$.

Список литературы

1. Garey M. R., Johnson D. S., *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness*. Freeman, San Francisco, 1979.
2. Baker B. S., Coffman E. J., Rivest R. L., Orthogonal packings in two dimensions. *SIAM J. Comput.* (1980) **9**, 846–855.

3. Kenyon C., Remila E., A near optimal solution to a two-dimensional cutting stock problem. *Math. Oper. Res.* (2000) **25**, 645–656.
4. Baker B. S., Brown D. J., Katseff H. P., A $5/4$ algorithm for two-dimensional packing. *J. Algorithms* (1981) **2**, 348–368.
5. Baker B. S., Schwarz J. S., Shelf algorithms for two-dimensional packing problems. *SIAM J. Comput.* (1983) **12**, 508–525.
6. Csirik J., Woeginger G. J., Shelf algorithms for on-line strip packing. *Inform. Process. Lett.* (1997) **63**, №4, 171–175.
7. Ee-Chien Chang, Weiguo Wang, Kankanhalli M. S., Multidimensional on-line bin-packing: An algorithm and its average-case analysis. *Inform. Process. Lett.* (1993) **48**, №3, 121–125.
8. Van Vliet A., An improved lower bound for on-line bin packing algorithms. *Inform. Process. Lett.* (1992) **43**, №5, 277–284.
9. Graham R. L., Bounds for certain multiprocessing anomalies. *Bell System Tech. J.* (1966) **45**, 1563–1581.
10. Albers S., Better bounds for online scheduling. *SIAM J. Comput.* (1998) **29**, 459–473.
11. Bartal Y., Fiat A., Karloff H., Vohra R., New algorithms for an ancient scheduling problem. *J. Comput. Syst. Sci.* (1995) **51**, 359–366.
12. Faigle U., Kern W., Turán G., On the performance of on-line algorithms for partition problems. *Acta Cybern.* (1989) **9**, 107–119.
13. Karger D. R., Phillips S. J., Torng E., A better algorithm for an ancient scheduling problem. *J. Algorithms* (1996) **20**, 400–430.
14. Bartal Y., Karloff H., Rabani Y., A better lower bound for on-line scheduling. *Inform. Process. Lett.* (1994) **50**, №3, 113–116.
15. Caramia M., Giordani S., Iovanella A., Grid scheduling by on-line rectangle packing. *Networks* (2004) **44**, 106–119.
16. Жук С. Н., Приближенные алгоритмы упаковки прямоугольников в несколько полос. *Дискретная математика* (2006) **18**, №1, 91–105.
17. Zhuk S., Chernykh A., Avetisyan A., Gaissaryan S., Grushin D., Kuzjurin N., Pospelov A., Shokurov A., Comparison of scheduling heuristics for grid resource broker. In: *Proc. 5th Mexican Intern. Conf. Computer Sci.*. IEEE Computer Society, Washington, DC, 2004, pp. 388–392.
18. Пospelov А. И., Анализ одного алгоритма упаковки прямоугольников, связанного с построением расписаний для кластеров. *Труды Ин-та системного программирования. Математические методы и алгоритмы* (2004) **6**, 7–12.

Статья поступила 16.01.2007.