Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тимашёв, Случайные подстановки с длинами циклов из заданного конечного множества, *Дискрет. матем.*, 2008, том 20, выпуск 1, 25–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm986>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 10:15:04

Случайные подстановки с длинами циклов из заданного конечного множества

© 2008 г. А. Н. Тимашев

Рассматривается класс всех подстановок степени n , длины циклов которых суть элементы фиксированного конечного множества $A \subset \mathbb{N}$ такого, что $\text{card } A \geq 2$ и наибольший общий делитель $\gcd\{k \mid k \in A\} = 1$. В предположении, что подстановка X выбирается случайно равновероятно из указанного класса, получена многомерная локальная нормальная теорема для совместного распределения чисел циклов заданной длины в этой подстановке.

Полученные результаты применяются и уточняются в случае, когда X — выбранное случайно равновероятно решение уравнения $X^r = e$, где e — единичная подстановка степени n , $r \geq 2$ — фиксированное натуральное число.

Пусть $r_1, \dots, r_s$ — натуральные числа, удовлетворяющие условиям

$$1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_s = r, \quad s \geq 2, \quad (1)$$

$$\gcd\{r_1, \dots, r_s\} = 1. \quad (2)$$

Всюду далее, если не оговорено противное, будем предполагать, что числа $s, r_1, \dots, r_s$ фиксированы. Пусть далее $C_{r_1, \dots, r_s}(n)$ — число подстановок степени n , длины циклов которых суть элементы множества $\{r_1, \dots, r_s\}$. Известно [1, 2], что

$$C_{r_1, \dots, r_s}(n) = \frac{n!}{2\pi i} \oint z^{-(n+1)} \exp\left(\sum_{j=1}^s \frac{z^{r_j}}{r_j}\right) dz. \quad (3)$$

Интегрирование в (3) осуществляется по окружности с центром в нуле, пробегаемой в положительном направлении.

Исходя из (3) и используя метод перевала, в [3] установлено, что при $n \rightarrow \infty$ при условиях (1), (2)

$$C_{r_1, \dots, r_s}(n) = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{(z_n)^{-n}}{\sqrt{r}} \exp\left(\sum_{j=1}^s \frac{(z_n)^{r_j}}{r_j}\right) (1 + o(1)), \quad (4)$$

где $z = z_n$ — единственный положительный корень уравнения

$$\sum_{j=1}^s z^{r_j} = n. \quad (5)$$

Обобщение (4) на случай, когда при $n \rightarrow \infty$ и $r = r(n) = o(\ln n)$ получено В. Н. Сачковым в 1986 г. Попытки найти асимптотику чисел $C_{r_1, \dots, r_s}(n)$ в явном виде, выразив величину z_n через $n, s, r_1, \dots, r_s$, приводят к громоздким выкладкам (подробнее см. [5]). Чтобы избежать их, ограничимся частным случаем, когда при условиях (1), (2)

$$r_{s-1} < r/2 \quad (6)$$

или при четном r

$$r_{s-1} = r/2. \quad (7)$$

В этом случае справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. При $n \rightarrow \infty$ и условиях (1), (2), (6)

$$C_{r_1, \dots, r_s}(n) = \left(\frac{n}{e}\right)^{n(1-r^{-1})} \frac{1}{\sqrt{r}} \exp\left(\sum_{j=1}^{s-1} \frac{n^{r_j/r}}{r_j}\right) (1 + o(1)). \quad (8)$$

Лемма 2. При $n \rightarrow \infty$ и условиях (1), (2), (7)

$$C_{r_1, \dots, r_s}(n) = \left(\frac{n}{e}\right)^{n(1-r^{-1})} \frac{1}{\sqrt{r}} \exp\left(\sum_{j=1}^{s-1} \left(\frac{n^{r_j/r}}{r_j}\right) - \frac{1}{2r}\right) (1 + o(1)). \quad (9)$$

Замечание 1. Если, в частности, $r \geq 2$ есть произвольное натуральное число и $1 = r_1 < \dots < r_{s-1} < r_s = r$ — все различные делители числа r , то при нечетном r выполнено условие (6), а при четном r — условие (7). При таких условиях оценки (8), (9) получены в [4, 5] (см. также [6]), а величина $C_{r_1, \dots, r_s}(n)$ совпадает с числом решений уравнения $X^r = e$ относительно неизвестной подстановки X степени n , где e — единичная подстановка той же степени. В ситуации, когда $r = p$ — простое число, $s = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = p$, и если $p = 2$, то выполнено условие (7), а если $p \geq 3$ — условие (6). Асимптотика чисел $C_{1,p}(n)$ для этих случаев была получена в [7] (подробнее см. [2], с. 208–212, 219–244). Заметим, что утверждение леммы 1 приведено в [5]. Ранее это утверждение было доказано В. Н. Сачковым (см. [10]).

Замечание 2. Если при условиях (1), (2) $r_{s-1} > r/2$, то оценки (8), (9), вообще говоря, неверны. Так, например, если $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = r = s = 3$, то с использованием (4), (5) можно показать, что при $n \rightarrow \infty$

$$C_{1,2,3}(n) = \left(\frac{n}{e}\right)^{2n/3} \frac{1}{\sqrt{3}} \exp(n^{2/3}/2 + 5n^{1/3}/6 - 5/18)(1 + o(1)). \quad (10)$$

Обобщение (10) на случай, когда $r_j = j$, $j = 1, \dots, s$ и $s = r$, получено В. Н. Сачковым [10].

Предположим, что все подстановки степени n с длинами циклов, являющимися элементами множества $\{r_1, \dots, r_s\}$, имеют одинаковые вероятности $(C_{r_1, \dots, r_s}(n))^{-1}$. На соответствующем вероятностном пространстве определим случайную величину μ_{r_j} , равную числу циклов длины r_j в случайно выбранной подстановке, $j = 1, \dots, s$. Тогда $\mu_{r_1}, \dots, \mu_{r_s}$ — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^s r_j \mu_{r_j} = n. \quad (11)$$

С использованием (4), (5), (8), (9) в работе доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть при $n \rightarrow \infty$ и условиях (1), (2) целые неотрицательные числа $k_j = k_j(n)$, $j = 1, \dots, s$, меняются так, что $\sum_{j=1}^s r_j k_j = n$. Тогда равномерно относительно $k_1, \dots, k_s$

$$\mathbf{P}\{\mu_{r_j} = k_j, j = 1, \dots, s\} = \sqrt{2\pi r n} \prod_{j=1}^s \frac{\lambda_j^{k_j}}{k_j!} e^{-\lambda_j} (1 + o(1)), \quad (12)$$

где

$$\lambda_j = z_n^{r_j} / r_j \sim n^{r_j/r} / r_j, \quad j = 1, \dots, s, \quad (13)$$

$z = z_n$ — единственный положительный корень уравнения (5).

Теорема 2. При $n \rightarrow \infty$ и условиях (1), (2) равномерно относительно целых положительных значений $k_j = (1/r_j)z_n^{r_j} + (x_j/\sqrt{r_j})z_n^{r_j/2}$, $j = 1, \dots, s-1$, для которых $\max_{1 \leq j \leq s-1} |x_j| \leq C$, где C — произвольная положительная постоянная, и разность $n - \sum_{j=1}^{s-1} r_j k_j$ делится на r ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_{r_j} = k_j, j = 1, \dots, s-1\} &= r(2\pi)^{-(s-1)/2} \sqrt{r_1 \dots r_{s-1}} n^{-(1/(2r)) \sum_{j=1}^{s-1} r_j} \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{s-1} x_j^2\right) (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (14)$$

Следствие 1. При $n \rightarrow \infty$ и условиях (1), (2)

$$\mathbf{E}\mu_{r_j} \sim \mathbf{D}\mu_{r_j} \sim n^{r_j/r} / r_j$$

и случайная величина $\sqrt{r_j} n^{-r_j/(2r)} (\mu_{r_j} - z_n^{r_j} / r_j)$, $j = 1, \dots, s-1$, распределена в пределе по стандартному нормальному закону.

Следствие 2. Пусть при условиях следствия 1 справедливо неравенство $r_{s-1} \leq r/2$. Тогда оценка (14) справедлива равномерно относительно целых положительных значений $k_j = (1/r_j)n^{r_j/r} + (x_j/\sqrt{r_j})n^{r_j/(2r)}$, $j = 1, \dots, s-1$, для которых $\max_{1 \leq j \leq s-1} |x_j| \leq C$, где C — произвольная положительная постоянная, и разность $n - \sum_{j=1}^{s-1} r_j k_j$ делится на r .

Теорема 3. Пусть при $n \rightarrow \infty$ целое неотрицательное число $k = k(n)$ меняется так, что $k(n) = o(\sqrt{n})$ и $n - kr_j$ делится на $d_j = \gcd\{r_1, \dots, r_{j-1}, r_{j+1}, \dots, r_s\}$. Если, кроме того, $r_{s-1} \leq r/2$, то

$$\mathbf{P}\{\mu_{r_j} = k\} = d_j \left(\frac{n^{r_j/r}}{r_j}\right)^k \frac{1}{k!} \exp(-n^{r_j/r} / r_j) (1 + o(1)), \quad j = 1, \dots, s-1,$$

за исключением случая, когда $j = s-1$ и $r_{s-1} = r/2$. В этом случае

$$\mathbf{P}\{\mu_{r_{s-1}} = k\} = d_{s-1} \left(\frac{2\sqrt{n}}{r}\right)^k \frac{1}{k!} \exp\left(-\frac{2\sqrt{n}}{r} + \frac{1}{2r}\right) (1 + o(1)).$$

Следствие 3. Если $r_{s-1} \leq r/2$, то при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно целых положительных значений $k = (1/r_j)n^{r_j/r} + (x/\sqrt{r_j})n^{r_j/(2r)}$, для которых $|x| \leq C$, где C — произвольная положительная постоянная, и разность $n - kr_j$ делится на d_j ,

$$\mathbf{P}\{\mu_{r_j} = k\} = d_j \sqrt{r_j / (2\pi)} n^{-r_j/(2r)} \exp(-x^2/2) (1 + o(1)), \quad j = 1, \dots, s-1.$$

Следствие 4. При $n \rightarrow \infty$ и $r_{s-1} \leq r/2$ случайная величина $\sqrt{r_j} n^{-r_j/(2r)} (\mu_{r_j} - (1/r_j) n^{r_j/r})$, $j = 1, \dots, s-1$, распределена в пределе по стандартному нормальному закону.

Замечание 3. В условиях примера, рассмотренного в замечании 2, с использованием (10) можно показать, что при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно целых положительных значений $k_j = (1/j) n^{j/3} + (x_j/\sqrt{j}) n^{j/6}$, $j = 1, 2$, для которых $\max\{|x_1|, |x_2|\} \leq C$, где C — произвольная положительная постоянная, и разность $n - k_1 - 2k_2$ делится на 3,

$$\mathbf{P}\{\mu_1 = k_1, \mu_2 = k_2\} = \frac{3}{\pi \sqrt{2n}} \exp(-(1/2)(x_1^2 + (x_2 + \sqrt{2}/3)^2))(1 + o(1)).$$

Пусть $v_n = \mu_{r_1} + \dots + \mu_{r_s}$ — общее число циклов в подстановке, выбранной случайно равномерно из класса всех $C_{r_1, \dots, r_s}(n)$ подстановок.

Теорема 4. При $n \rightarrow \infty$ и условиях (1), (2) случайная величина $(1 - r_{s-1}/r)^{-1} \sqrt{r_{s-1}} \times n^{-r_{s-1}/(2r)} \left(v_n - \sum_{j=1}^s z_n^{r_j} / r_j \right)$ распределена в пределе по стандартному нормальному закону.

Следствие 5. При условиях теоремы 4

$$\mathbf{E} v_n - n/r \sim (1/r_{s-1} - 1/r) n^{(r_{s-1}-1)/r}, \quad \mathbf{D} v_n \sim (1/r_{s-1})(1 - r_{s-1}/r)^2 n^{r_{s-1}/r}.$$

Следствие 6. При условиях теоремы 4 и $r_{s-1} \leq r/2$ случайная величина $(1 - r_{s-1}/r)^{-1} \times \sqrt{r_{s-1}} n^{-r_{s-1}/(2r)} \left(v_n - n/r + (1/r) \sum_{j=1}^{s-1} n^{r_j/r} - \sum_{j=1}^{s-1} (1/r_j) n^{r_j/r} \right)$ распределена в пределе по стандартному нормальному закону.

В случае, когда $r_{s-1} < r/2$, утверждение следствия 6 доказано В. Н. Сачковым [10].

Далее более подробно рассматривается случай, когда $s = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = r > 1$. В этом случае сформулированные выше общие результаты можно уточнить. В работе доказаны следующие утверждения.

Теорема 5. Пусть при $n \rightarrow \infty$ целое неотрицательное число $k = k(n)$ меняется так, что разность $n - k$ делится на r и $k(n) = o(n^{2/3})$. Тогда при $r = 2$

$$\mathbf{P}\{\mu_1 = k\} = (2n^{k/2}/k!) \exp(1/4 - \sqrt{n} - k^2/(4n))(1 + O(k/n + k^3/n^2 + 1/\sqrt{n})), \quad (15)$$

при $r \geq 3$

$$\mathbf{P}\{\mu_1 = k\} = (rn^{k/r}/k!) \exp(-n^{1/r} - k^2/(2rn))(1 + o(1)). \quad (16)$$

Замечание 4. Оценка (16) останется справедливой, если при остальных условиях теоремы 5 предположить, что $r = r(n) \rightarrow \infty$ так, что $r^{-2} n^{1/r} \rightarrow \infty$ и $k(n) = o(n^{2/3} r^{1/3})$.

Следствие 7. Если при условиях теоремы 5 $k(n) = o(\sqrt{n})$, то при $r = 2$

$$\mathbf{P}\{\mu_1 = k\} = (2n^{k/2}/k!) \exp(1/4 - \sqrt{n})(1 + O(k^2/n + 1/\sqrt{n})), \quad (17)$$

при $r \geq 3$

$$\mathbf{P}\{\mu_1 = k\} = (rn^{k/r}/k!) \exp(-n^{1/r})(1 + o(1)). \quad (18)$$

Заметим, что оценка (18) следует из теоремы 3.

Следствие 8. При $n \rightarrow \infty$ и $r = 2$ равномерно относительно целых положительных значений $k = \sqrt{n} + xn^{1/4}$, для которых разность $n - k$ — четное число и $|x| \leq C$, где C — произвольная положительная постоянная,

$$\mathbf{P}\{\mu_1 = k\} = \sqrt{2/\pi} n^{-1/4} e^{-x^2/2} (1 + (x^3 - 6x)/(6n^{1/4}) + O(1/\sqrt{n})). \quad (19)$$

Следствие 9. Пусть $n \rightarrow \infty$, $r = 2$, $k = k(n) \rightarrow \infty$ так, что $k(n) \in \mathbf{N}$, разность $k - n/2$ неотрицательна и $k - n/2 = o(\sqrt{n})$. Тогда

$$\mathbf{P}\{v_n = k\} = (2n^{k-n/2}/(2k - n)!) \exp(1/4 - \sqrt{n}) (1 + O((n - 2k)^2/n + 1/\sqrt{n})).$$

Следствие 10. При $n \rightarrow \infty$ и $r = 2$ равномерно относительно целых положительных значений $k = (n + \sqrt{n})/2 + (x/2)n^{1/4}$, для которых $|x| \leq C$, где C — произвольная положительная постоянная,

$$\mathbf{P}\{v_n = k\} = \sqrt{2/\pi} n^{-1/4} e^{-x^2/2} (1 + (x^3 - 6x)/(6n^{1/4}) + O(1/\sqrt{n})).$$

Теорема 6. Пусть $n \rightarrow \infty$, $r = r(n) \rightarrow \infty$ так, что $r(n) = o(n)$ и $r^{-1}n^{1/r} = o(1)$, и пусть целое неотрицательное число $k = k(n)$ меняется так, что разность $n - k$ делится на r и $k(n) = o(n^{2/3}r^{1/3})$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\mu_1 = k\} = (n^{(k-m)/r} m! / k!) \exp(-k^2/(2rn)) (1 + o(1)), \quad (20)$$

где $m = n - r[n/r]$, $[x]$ — целая часть числа x .

Следствие 11. Пусть при условиях теоремы 6 n делится на r и $k = k(n) \rightarrow \infty$ так, что $k(n) = \sqrt{2rn^{(r+1)/(2r)}} (1 + o(n^{-1/r}))$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\mu_1 = k\} = (n^{k/r} / k!) \exp(-n^{1/r}) (1 + o(1)). \quad (21)$$

Доказательство леммы 1. Положим

$$z_n^r = n(1 - \varepsilon_n), \quad (22)$$

тогда согласно (5) при $n \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_n = n^{-1+r_{s-1}/r} (1 + o(1)). \quad (23)$$

Кроме того, из (6) следует, что

$$n\varepsilon_n^2 = n^{-1+2r_{s-1}/r} (1 + o(1)) = o(1). \quad (24)$$

Из (22)–(24) получаем, что

$$\begin{aligned} z_n &= n^{1/r} (1 - \varepsilon_n/r + O(\varepsilon_n^2)), \\ z_n^{-n} &= \exp(-(n/r) \ln n + n/r - z_n^r/r) (1 + o(1)) = (e/n)^{n/r} \exp(-z_n^r/r) (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляя (25) в (4), находим, что

$$C_{r_1, \dots, r_s}(n) = (n/e)^{n(1-r^{-1})} (1/\sqrt{r}) \exp\left(\sum_{j=1}^{s-1} (1/r_j) z_n^{r_j}\right) (1 + o(1)). \quad (26)$$

При $j = 1, \dots, s-1$ согласно (22), (23)

$$z_n^{r_j} = n^{r_j/r} (1 + O(\varepsilon_n)) = n^{r_j/r} + O(n^{-1+(1/r)(r_{s-1}+r_j)}),$$

и поскольку $r_j \leq r_{s-1}$, $j = 1, \dots, s-1$, в силу (6)

$$z_n^{r_j} = n^{r_j/r} + o(1), \quad j = 1, \dots, s-1.$$

Следовательно,

$$\exp \left(\sum_{j=1}^{s-1} (1/r_j) z_n^{r_j} \right) = \exp \left(\sum_{j=1}^{s-1} n^{r_j/r} / r_j \right) (1 + o(1)). \quad (27)$$

Из (26), (27) следует оценка (8). Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Согласно (7), (23) при $n \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_n = (1/\sqrt{n})(1 + O(n^{-1/2+r_{s-2}/r})). \quad (28)$$

(при $s = 2$ считаем, что $r_0 = 0$).

Используя (5), (22), (28), получаем, что

$$z_n^{-n} = \exp(-(n/r) \ln n + (n/r)\varepsilon_n + (n/(2r))\varepsilon_n^2 + O(n\varepsilon_n^3)). \quad (29)$$

Поскольку $r_{s-2} < r_{s-1} = r/2$, то из (22), (28), (29) следует, что

$$z_n^{-n} = \exp(-(n/r) \ln n + (n/r) - (z_n^r/r) + (1/2r) + o(1)),$$

и поэтому согласно (4)

$$C_{r_1, \dots, r_s}(n) = (n/e)^{n(1-r^{-1})} (1/(\sqrt{r})) \exp \left(\sum_{j=1}^{s-1} (1/r_j) z_n^{r_j} + (1/(2r)) \right) (1 + o(1)). \quad (30)$$

Далее, при $j = 1, \dots, s-2$

$$z_n^{r_j} = n^{r_j/r} + O(n^{-(1/2)+(r_j/r)}) = n^{r_j/r} + o(1),$$

при $j = s-1$ согласно (7)

$$z_n^{r_{s-1}} = z_n^{r/2} = \sqrt{n} - (1/2) + o(1).$$

Из этих оценок и (30) следует (9). Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Из (2) следует, что указанные в формулировке теоремы 1 целые неотрицательные числа k_j , $j = 1, \dots, s$, существуют при всех достаточно больших значениях n . Для таких значений n

$$\mathbf{P}\{\mu_{r_j} = k_j, j = 1, \dots, s\} = n! \left(\prod_{j=1}^s (r_j^{k_j} k_j!) C_{r_1, \dots, r_s}(n) \right)^{-1}, \quad (31)$$

поскольку число подстановок степени n , имеющих k_j циклов длины r_j , $j = 1, \dots, s$ при условии $r_1 k_1 + \dots + r_s k_s = n$ равно $n! / \prod_{j=1}^s (r_j^{k_j} k_j!)$.

Подставляя (4) в (31), используя формулу Стирлинга и соотношение $z_n^n = \prod_{j=1}^s (z_n^{r_j k_j})$, получаем (12), (13). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть при $n \rightarrow \infty$ целые положительные числа $k_j = k_j(n)$ стремятся к бесконечности так, что $k_j = \lambda_j + x_j \sqrt{\lambda_j}$, где $|x_j| \leq C$, C — произвольная положительная постоянная, $j = 1, \dots, s$.

В силу (5) $\sum_{j=1}^s r_j \lambda_j = n$ и

$$\sum_{j=1}^s r_j k_j = \sum_{j=1}^s r_j \lambda_j + \sum_{j=1}^s r_j x_j \sqrt{\lambda_j} = n,$$

если $\sum_{j=1}^s r_j x_j \sqrt{\lambda_j} = 0$, то есть

$$\sqrt{r} z_n^{r/2} x_s + \sum_{j=1}^{s-1} \sqrt{r_j} z_n^{r_j/2} x_j = 0. \quad (32)$$

Если $n \rightarrow \infty$, то $z_n \sim n^{1/r} \rightarrow \infty$, и поэтому из (32) следует, что $x_s = x_s(n) \rightarrow 0$. Далее, $\lambda_j \sim (1/r_j) n^{r_j/r} \rightarrow \infty$, $j = 1, \dots, s$, и поэтому

$$\frac{\lambda_j^{k_j}}{k_j!} e^{-\lambda_j} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j}} \exp(-x_j^2/2)(1 + o(1)) = \sqrt{r_j/2\pi n^{-r_j/2r}} \exp(-x_j^2/2)(1 + o(1)).$$

В частности, при $j = s$

$$\frac{\lambda_s^{k_s}}{k_s!} e^{-\lambda_s} = \sqrt{r/2\pi n}(1 + o(1)).$$

Подставляя эти оценки в (12), получаем (14). Поскольку $n - \sum_{j=1}^{s-1} r_j k_j = r k_s$, разность $n - \sum_{j=1}^{s-1} r_j k_j$ делится на r . Теорема 2 доказана.

Доказательство следствия 1. Из (14) следует, что при $n \rightarrow \infty$ и условиях (1), (2) случайные величины $\mu_{r_1}, \dots, \mu_{r_{s-1}}$ асимптотически независимы и имеют в пределе нормальные распределения. Тем самым следствие 1 установлено.

Доказательство следствия 2. При условии (6)

$$z_n^{r_j} = n^{r_j/r} - (r_j/r) \varepsilon_n n^{r_j/r} + O(n^{r_j/r} \varepsilon_n^2) = n^{r_j/r} + o(1), \quad j = 1, \dots, s-1,$$

так как согласно доказанному выше $\varepsilon_n = n^{-1+r_{s-1}/r}(1 + o(1))$. Поэтому при условиях следствия 2

$$k_j = (1/r_j) z_n^{r_j} + (x_j/\sqrt{r_j}) z_n^{r_j/2} + o(1), \quad j = 1, \dots, s-1,$$

и выполнены условия теоремы 2, если x_j заменить на $x_j + o(1)$, $j = 1, \dots, s-1$.

Пусть выполнено условие (7). Тогда $z_n^{r_j} = n^{r_j/r} + o(1)$, $j = 1, \dots, s-2$, и $z_n^{r_{s-1}} = z_n^{r/2} = \sqrt{n} - 1/2 + o(1)$ при $j = s-1$.

Поэтому при условиях следствия 2

$$k_j = (1/r_j) z_n^{r_j} + (x_j/\sqrt{r_j}) z_n^{r_j/2} + o(1), \quad j = 1, \dots, s-2,$$

$$k_{s-1} = (2/r) \sqrt{n} + x_{s-1} \sqrt{2/r} n^{1/4} - (1/r) + o(1),$$

и выполнены условия теоремы 2, если значения x_j заменить на $x_j + o(1)$, $j = 1, \dots, s-2$, а значение x_{s-1} заменить на $x_{s-1} + O(n^{-1/4})$. Поэтому, если $r_{s-1} \leq r/2$, то справедлива оценка (14). Следствие 2 установлено.

Доказательство теоремы 3. Точное распределение случайной величины μ_{r_j} имеет вид

$$\mathbf{P}\{\mu_{r_j} = k\} = \frac{n!}{(n - kr_j)! r_j^k k!} \frac{C_{r_1, \dots, r_{j-1}, r_{j+1}, \dots, r_s}(n - kr_j)}{C_{r_1, \dots, r_s}(n)},$$

где $k = 0, 1, \dots, [n/r_j]$, $j = 1, \dots, s-1$. Число $C_{r_1, \dots, r_{j-1}, r_{j+1}, \dots, r_s}(n - kr_j)$ отлично от нуля лишь в случае, когда разность $n - kr_j$ делится на d_j , $j = 1, \dots, s-1$. Если $j \leq s-2$ или $j = s-1$ и $r_{s-1} < r/2$, то в силу (8), (9) при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{C_{r_1, \dots, r_{j-1}, r_{j+1}, \dots, r_s}(n - kr_j)}{C_{r_1, \dots, r_s}(n)} &= \frac{d_j(n - kr_j)!(1 - kr_j/n)^{-n/r}(n - kr_j)^{kr_j/r}}{n!} \\ &\quad \times \exp(-kr_j/r - (1/r_j)n^{r_j/r})(1 + o(1)), \end{aligned}$$

поскольку при таких условиях $n - kr_j \rightarrow \infty$, $k(n) = o(n^{1-(1/r)r_{s-1}})$, и если γ фиксировано и лежит в $(0, 1/2]$, то $(n - kr_j)^\gamma = n^\gamma + o(1)$ (множитель d_j появляется за счет того, что при использовании метода перевала для вывода оценки числа $C_{r_1, \dots, r_{j-1}, r_{j+1}, \dots, r_s}(n - kr_j)$ на соответствующей окружности имеется d_j точек перевала, вносящих одинаковый по порядку вклад в асимптотику интеграла, аналогичного (3)).

Подставляя полученную оценку в предыдущие формулы, после элементарных преобразований получаем утверждение теоремы 3 в случае, когда $j \leq s-2$ или $j = s-1$ и $r_{s-1} < r/2$. Если $j = s-1$ и $r_{s-1} = r/2$, то из наших рассуждений и оценок (8), (9) следует справедливость асимптотической формулы для вероятности $\mathbf{P}\{\mu_{r_{s-1}} = k\}$, приведенной в формулировке теоремы 3. Тем самым теорема 3 доказана.

Доказательство следствия 3. Если $j \leq s-2$ или $j = s-1$ и $r_{s-1} < r/2$, то при условиях следствия 3

$$k = k(n) \sim (1/r_j)n^{r_j/r} = o(\sqrt{n}),$$

и утверждение следствия получается непосредственно из теоремы 3.

Если же $j = s-1$ и $r_{s-1} = r/2$, то

$$k = k(n) = (2\sqrt{n}/r)(1 + O(n^{-1/4})).$$

В этом случае, используя точную формулу для вероятности $\mathbf{P}\{\mu_{r_{s-1}} = k\}$, приведенную выше, и проводя рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых доказывалась теорема 3, после элементарных преобразований получаем оценку

$$\mathbf{P}\{\mu_{r_{s-1}} = k\} = d_{s-1} \frac{2^k n^{k/2}}{r^k k!} \exp(-2\sqrt{n}/r)(1 + o(1)),$$

справедливую при $n \rightarrow \infty$, если разность $n - kr/2$ делится на d_{s-1} . Из этой оценки получаем утверждение следствия при $j = s-1$ и $r_{s-1} = r/2$. Следствие 3 установлено.

Доказательство теоремы 4. Согласно (11)

$$\mu_r = \frac{n}{r} - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{s-1} r_j \mu_{r_j},$$

и поэтому

$$v_n = \frac{n}{r} + \sum_{j=1}^{s-1} (1 - r_j/r) \mu_{r_j}. \quad (33)$$

Учитывая, что случайные величины $\mu_{r_1}, \dots, \mu_{r_{s-1}}$ асимптотически независимы, находим, что

$$\mathbf{E}v_n - n/r = \sum_{j=1}^{s-1} (1 - r_j/r) \mathbf{E}\mu_{r_j}, \quad \mathbf{D}v_n \sim \sum_{j=1}^{s-1} (1 - r_j/r)^2 \mathbf{D}\mu_{r_j}.$$

Используя следствие 1, из этих соотношений с учетом (12)–(14) получаем утверждения теоремы 4 и следствия 5. Отсюда же выводится следствие 6, если воспользоваться оценками, полученными при доказательстве лемм 1 и 2.

Заметим, что утверждение об асимптотической нормальности случайной величины v_n (при более ограничительных условиях, чем в теореме 4) приведено в [5].

Доказательство теоремы 5. При $r = 2$ точное распределение случайной величины μ_1 имеет вид

$$\mathbf{P}\{\mu_1 = k\} = \frac{n!}{k! 2^m m! C_{1,2}(n)}, \quad k = n - 2m, \quad m = 0, 1, \dots, [n/2]. \quad (34)$$

При рассматриваемых условиях и $n \rightarrow \infty$, $n - k \rightarrow \infty$ и согласно [7]

$$C_{1,2}(n) = (n/e)^{n/2} (1/\sqrt{2}) \exp(\sqrt{n} - 1/4) (1 + O(1/\sqrt{n})). \quad (35)$$

Подставляя (35) в (34) и используя формулу Стирлинга для $n!$ и $((n - k)/2)!$, после элементарных преобразований получаем, что

$$\mathbf{P}\{\mu_1 = k\} = \frac{2e^{1/4} n^{k/2}}{k!} \exp(-\sqrt{n} - k/2) (1 - k/n)^{-(n-k)/2} (1 + O(k/n + 1/\sqrt{n})). \quad (36)$$

Формула (36) справедлива, если $k(n) = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Если же $k(n) = o(n^{2/3})$, то из (36) следует (15). При $r \geq 3$ и $k(n) = o(n)$ аналогично (36) получаем равенство

$$\mathbf{P}\{\mu_1 = k\} = \frac{r n^{k/r}}{k!} \exp(-n^{1/r} - k/r) (1 - k/n)^{-(n-k)/r} (1 + o(1)). \quad (37)$$

Если $k(n) = o(n^{2/3})$, то из (37) следует (16). Теорема 5 доказана. Оценки (17), (18) следуют непосредственно из (15), (16). Следствие 7 установлено.

Утверждение, сформулированное в замечании 4, следует из того, что при $s = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = r \geq 3$ оценка величины $C_{1,r}(n)$, полученная из (8), остается справедливой, если $r = r(n) \rightarrow \infty$ так, что $r^{-2} n^{1/r} \rightarrow \infty$ (см. [8] и [2], с. 235). В предположении, что $k = k(n) = o(n^{2/3} r^{1/3})$, отсюда получаем (16).

Далее, согласно (15) при $r = 2$ и условиях, сформулированных в следствии 8,

$$\mathbf{P}\{\mu_1 = k\} = \frac{2n^{k/2}}{k!} \exp(-\sqrt{n}) (1 - (x/2)n^{-1/4} + O(1/\sqrt{n})). \quad (38)$$

Подставляя в (38) значение $k = \sqrt{n} + x n^{1/4}$ и используя формулу Стирлинга для $k!$, после элементарных преобразований получаем (19). Утверждение следствия 8 доказано.

Следствия 9 и 10 очевидным образом выводятся из следствий 7 и 8, если учесть, что при $r = 2$

$$\mathbf{P}\{v_n = k\} = \mathbf{P}\{\mu_1 = 2k - n\}, \quad n/2 \leq k \leq n.$$

Доказательство теоремы 6. Аналогично (34) находим, что

$$\mathbf{P}\{\mu_1 = k\} = \frac{n!}{k! r^m m! C_{1,r}(n)}, \quad k = n - rm, \quad m = 0, 1, \dots, [n/r]. \quad (39)$$

При условиях теоремы 6 согласно [2] (см. с. 235 в [2])

$$C_{1,r}(n) = (n/e)^{n(1-1/r)} \sqrt{r} n^{m/r} / m! (1 + o(1)). \quad (40)$$

Подставляя (40) в (39) и используя условие $k = k(n) = o(n^{2/3} r^{1/3})$, а также формулу Стирлинга, после элементарных преобразований, получаем (20). Теорема 6 доказана.

При условиях следствия 11 $m = 0$ и оценка (21) следует из (20). Заметим, что использованные выше оценки величины $C_{1,r}(n)$, справедливые в предположении, что при $n \rightarrow \infty$ параметр $r = r(n) \rightarrow \infty$ так, что $r(n) = o(n)$ и $r^{-2} n^{1/r} \rightarrow \infty$ или $r^{-1} n^{1/r} \rightarrow 0$, доказаны в [2] (см. с. 235–238) при условии, что $r = p$ — простое число. На самом деле эти оценки верны и для случая, когда r — составное число (что следует из приведенного в [2] доказательства). Следствие 11 установлено.

Пусть $C_{r_1, \dots, r_s}(n, N)$ — число подстановок степени n , имеющих каждая N циклов, с длинами циклов, являющимися элементами множества $\{r_1, \dots, r_s\}$. Аналогично (3) можно утверждать, что

$$C_{r_1, \dots, r_s}(n, N) = \frac{n!}{2\pi i N!} \oint \frac{(P(z))^N}{z^{n+1}} dz, \quad (41)$$

где

$$P(z) = \sum_{j=1}^s \frac{z^{r_j}}{r_j} \quad (42)$$

и интегрирование в (41) осуществляется по тому же пути, что и в (3).

Далее, наряду с условиями (1), (2) будем предполагать, что

$$\gcd\{r_2 - r_1, \dots, r_s - r_1\} = 1. \quad (43)$$

Заметим, что из условия (43) следует (2), но не наоборот.

Формулируемые ниже утверждения теорем 7, 8, 9 следуют из более общих результатов, доказанных автором в [9].

Теорема 7. Пусть при условиях (1), (43) $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$r_1 < \alpha_1 \leq \alpha = n/N \leq \alpha_2 < r_s,$$

где α_1, α_2 — постоянные. Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

$$C_{r_1, \dots, r_s}(n, N) = \frac{n!}{N! \sqrt{2\pi N f(z_0)}} (P(z_0))^N z_0^{-n} (1 + O(N^{-1})), \quad (44)$$

где $z = z_0$ — единственный положительный корень уравнения

$$z P'(z) (P(z))^{-1} = \alpha, \quad (45)$$

функция $P(z)$ определена в (42),

$$f(z_0) = z_0^2 P''(z_0) (P(z_0))^{-1} - \alpha(\alpha - 1) > 0. \quad (46)$$

Замечание 5. Оценка (44) доказывается с использованием метода перевала, исходя из интегрального представления (41).

Замечание 6. Можно показать, что оценка (44) остается справедливой, если предположить, что при условиях (1), (43) $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n - r_1 N \rightarrow \infty$ и $rN - n \rightarrow \infty$ (с заменой остаточного члена $O(N^{-1})$ на $o(1)$).

Предположим, что все $C_{r_1, \dots, r_s}(n, N)$ подстановок рассмотренного вида имеют одинаковые вероятности, равные $(C_{r_1, \dots, r_s}(n, N))^{-1}$, и пусть $\mu_{r_j}^{(N)}$ — случайная величина, равная числу циклов длины r_j в случайно выбранной подстановке, $j = 1, \dots, s$. Тогда $\mu_{r_1}^{(N)}, \dots, \mu_{r_s}^{(N)}$ удовлетворяют (11) с заменой μ_{r_j} на $\mu_{r_j}^{(N)}$, $j = 1, \dots, s$, а также условию $\mu_{r_1}^{(N)} + \dots + \mu_{r_s}^{(N)} = N$.

Теорема 8. При условиях теоремы 7 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

$$\mathbf{E}\mu_{r_j}^{(N)} = Np_j(1 + O(N^{-1})), \quad \mathbf{D}\mu_{r_j}^{(N)} = N\sigma_j^2(1 + O(N^{-1})),$$

где

$$p_j = (z_0^{r_j}/r_j)(P(z_0))^{-1}, \quad \sigma_j^2 = p_j(1 - p_j(1 + (r_j - \alpha)^2/f(z_0))),$$

$j = 1, \dots, s$, $z = z_0$ — единственный положительный корень уравнения (45), значение $f(z_0)$ определено в (46).

Теорема 9. Пусть при условиях теоремы 7 $s \geq 3$. Тогда $\sigma_j^2 > 0$ и равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и целых положительных значений $m = Np_j + x\sqrt{N}$, для которых $|x| \leq C$, где C — произвольная положительная постоянная,

$$\mathbf{P}\{\mu_{r_j} = m\} = \frac{d_j^*}{\sqrt{2\pi N\sigma_j^2}} \exp(-x^2/(2\sigma_j^2))(1 + O(1/\sqrt{N})),$$

где

$$d_j^* = \gcd\{k - \min A_j \mid k \in A_j\}, \quad A_j = \{r_1, \dots, r_s\} \setminus \{r_j\}, \quad j = 1, \dots, s.$$

Следствие 12. При условиях теоремы 9 случайная величина $(\mu_{r_j}^{(N)} - Np_j)/\sqrt{N\sigma_j^2}$ распределена в пределе по стандартному нормальному закону, $j = 1, \dots, s$.

Теорема 10. Пусть при условиях (1), (43) $s \geq 3$ и $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$(N/(\lambda r_j))^{(r_2 - r_1)/(r_j - r_1)}(n/N - r_1) \rightarrow (1 - r_1/r_2)r_1^{(r_j - r_2)/(r_j - r_1)}, \quad (47)$$

где λ — положительная постоянная. Тогда случайная величина $\mu_{r_j}^{(N)}$ распределена в пределе по закону Пуассона с параметром λ , $j = 3, \dots, s$.

Доказательство. Факториальные моменты случайных величин $\mu_{r_j}^{(N)}$ определяются соотношениями (см. [9])

$$\mathbf{E}(\mu_{r_j}^{(N)})_k = \frac{n!}{(n - kr_j)! r_j^k} \frac{C_{r_1, \dots, r_s}(n - kr_j, N - k)}{C_{r_1, \dots, r_s}(n, N)}, \quad (48)$$

где $k(r_j - 1) \leq n - N$, $j = 1, \dots, s$.

При условиях теоремы 10 $n - r_1 N \rightarrow \infty$ и $rN - n \rightarrow \infty$, поэтому согласно замечанию 6 оценка (44) остается справедливой, если остаточный член $O(N^{-1})$ заменить на $o(1)$. Заменяя в (41) n на $n - kr_j$ и N на $N - k$ и используя (44), (48), получаем, что

$$\mathbf{E}(\mu_{r_j}^{(N)})_k = \frac{N! z_0^{kr_j}}{(N-k)! r_j^k (P(z_0))^k} (1 + o(1)), \quad k = 1, 2, \dots$$

Таким образом, для доказательства теоремы 10 достаточно проверить, что

$$N z_0^{r_j} / (r_j P(z_0)) \rightarrow \lambda > 0. \quad (49)$$

При наших условиях $z_0 \rightarrow 0+$, и поэтому $P(z_0) \sim z_0^{r_1} / r_1$ и

$$N z_0^{r_j} / (r_j P(z_0)) \sim N r_1 z_0^{r_j - r_1} / r_j \rightarrow \lambda,$$

если

$$z_0^{r_j - r_1} \sim \lambda r_j / (N r_1). \quad (50)$$

Так как $\lim_{z \rightarrow 0+} z P'(z) / P(z) = r_1$, из (45) следует, что $z_0^{r_2 - r_1} \sim (r_2 / (r_1(r_2 - r_1))) (n / N - r_1)$, и поэтому

$$z_0^{r_j - r_1} \sim (r_2 / (r_1(r_2 - r_1)))^{(r_j - r_1) / (r_2 - r_1)} (n / N - r_1)^{(r_j - r_1) / (r_2 - r_1)},$$

так что оценка (50) эквивалентна (47). Теорема 10 доказана.

Теорема 11. Пусть при условиях (1), (43) $s \geq 3$ и $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$(N / (\lambda r_j))^{(r - r_{s-1}) / (r - r_j)} (r - n / N) \rightarrow (r / r_{s-1} - 1) r^{(r_{s-1} - r_j) / (r - r_j)}, \quad (51)$$

где λ — положительная постоянная. Тогда случайная величина $\mu_{r_j}^{(N)}$ распределена в пределе по закону Пуассона с параметром λ , $j = 1, \dots, s - 2$.

Доказательство. Достаточно, как и выше, убедиться в справедливости оценки (49). При условиях теоремы (11) $z_0 \rightarrow \infty$, и поэтому $P(z_0) \sim z_0^r / r$ и

$$N z_0^{r_j} / (r_j P(z_0)) \sim N r z_0^{r_j - r} / r_j \rightarrow \lambda,$$

если

$$z_0^{r_j - r} \sim \lambda r_j / (N r). \quad (52)$$

Так как при рассматриваемых условиях $\lim_{z \rightarrow \infty} z P'(z) / P(z) = r$, из (45) следует, что $z_0^{r - r_{s-1}} \sim r (r / r_{s-1} - 1) (r - n / N)^{-1}$, и поэтому

$$z_0^{r_j - r} \sim (r (r - r_{s-1}) / r_{s-1})^{(r_j - r) / (r - r_{s-1})} (r - n / N)^{(r - r_j) / (r - r_{s-1})},$$

так что оценка (52) эквивалентна (51). Теорема 11 доказана.

Пусть $\xi(n, N)$ — случайная величина, равная длине цикла, содержащего фиксированный элемент в подстановке, выбранной случайно равномерно из класса всех $C_{r_1, \dots, r_s}(n, N)$ подстановок степени n с N циклами длин, являющихся элементами множества $\{r_1, \dots, r_s\}$.

Теорема 12. При условиях теоремы 7 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

$$\mathbf{P}\{\xi(n, N) = r_k\} = z_0^{r_k} \left(\sum_{j=1}^s z_0^{r_j} \right)^{-1} (1 + O(N^{-1})), \quad k = 1, \dots, s. \quad (53)$$

Доказательство. При $k = 1, \dots, s_{r_k-1}$

$$\mathbf{P}\{\xi(n, N) = r_k\} = \frac{\binom{n-1}{r_k-1} (r_k - 1)! C_{r_1, \dots, r_s}(n - r_k; N - 1)}{C_{r_1, \dots, r_s}(n; N)},$$

и поскольку согласно (44)

$$\frac{C_{r_1, \dots, r_s}(n - r_k; N - 1)}{C_{r_1, \dots, r_s}(n; N)} = \frac{N(n - r_k)! z_0^{r_k}}{n! P(z_0)} (1 + O(N^{-1})),$$

из (45) следует, что равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

$$\mathbf{P}\{\xi(n, N) = r_k\} = \frac{z_0^{r_k} k^{-1}}{P'(z_0)} (1 + O(N^{-1})).$$

Полученная оценка с учетом (42) равносильна (53). Теорема 12 доказана.

Список литературы

1. Chowla S., Herstein I. N., Scott W. R., The solution of $x^d = 1$ in symmetric groups. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* (1952) **25**, 29–31.
2. Колчин В. Ф., Случайные графы. Физматлит, Москва, 2000.
3. Бендер Э. А., Асимптотические методы в теории перечислений. В сб.: *Перечислительные задачи комбинаторного анализа*. Мир, Москва, 1979, с. 266–310.
4. Воынец Л. М., Число решений уравнения $x^s = e$ в симметрической группе. *Матем. заметки* (1986) **40**, №2, 586–589.
5. Павлов А. И., О подстановках с длинами циклов из заданного множества. *Теория вероятностей и ее применения* (1986) **31**, №3, 618–619.
6. Wilf H., The asymptotics of $e^{P(x)}$ and the number of elements of each order in S_n . *Bull. Amer. Math. Soc.* (1986) **15**, 228–232.
7. Moser L., Wyman M., On the solution of $x^d = 1$ in symmetric groups. *Canad. J. Math.* (1955) **7**, 159–168.
8. Воынец Л. М., Число решений одного уравнения в симметрической группе. В сб.: *Вероятностные процессы и их приложения*. МИЭМ, Москва, 1985, с. 104–109.
9. Тимашев А. Н., Предельные теоремы в схемах размещения частиц по различным ячейкам с ограничениями на заполнения ячеек. *Теория вероятностей и ее применения* (2004) **49**, №4, 712–725.
10. Сачков В. Н., Асимптотические формулы и предельные распределения для комбинаторных конфигураций, порожденных многочленами. *Дискретная математика* (2007) **19**, №3, 3–14.

Статья поступила 12.09.2005.

Переработанный вариант поступил 14.02.2007.