Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Воблый, О перечислении помеченных связных графов по числу точек сочленения, *Дискрет. матем.*, 2008, том 20, выпуск 1, 52–63

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm988>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 15:23:56

Дискретная математика

том 20 выпуск 1 * 2008

УДК 519.15

О перечислении помеченных связных графов по числу точек сочленения

© 2008 г. В. А. Воблый

Изучаются числа S_{mn} помеченных связных графов с n вершинами, из которых m — точки сочленения. Получено явное выражение для экспоненциальной производящей функции $S_m(z)$ этих чисел и найдена асимптотика чисел S_{mn} при $n \rightarrow \infty$ и $m = o(n)$.

Обозначим S_{mn} число помеченных связных графов с n вершинами, из которых m — точки сочленения, и пусть $S_m(z)$ — экспоненциальная производящая функция этих чисел,

$$S_m(z) = \sum_{n=2}^{\infty} S_{mn} \frac{z^n}{n!}.$$

Пусть также

$$S(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} S_m(z) x^m, \quad B(z) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!},$$

где B_n — число помеченных блоков с n вершинами. Очевидно, что $S_0(z) = B(z)$. В [1, 2] показано, что

$$S_1(z) = z(e^{B'(z)} - B'(z) - 1).$$

Кроме того, в [1] приведено следующее дифференциально-функциональное уравнение для $S(x, z)$:

$$z \frac{\partial S}{\partial z} - x \frac{\partial S}{\partial x} = z B' \left(z + xz \frac{\partial S}{\partial z} + x(1-x) \frac{\partial S}{\partial x} \right), \quad (1)$$

а также получена асимптотика для S_{mn} при фиксированном m и $n \rightarrow \infty$

$$S_{mn} \sim \frac{1}{m!} n^{2m} 2^{(n-m)(n-m-1)/2}. \quad (2)$$

В данной работе получено явное выражение производящей функции $S_m(z)$ через производящую функцию $B(z)$, а также найдена асимптотика чисел S_{mn} при $n \rightarrow \infty$ и $m = o(n)$.

Напомним определение многочленов Белла. Эти многочлены задаются формулой (см. с. 172 в [10])

$$Y_m(fg_1, \dots, fg_m) = \sum_{\pi(m)} \frac{m! f_k}{k_1! \dots k_m!} \left(\frac{g_1}{1!} \right)^{r_1} \dots \left(\frac{g_m}{m!} \right)^{r_m},$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(m)$ числа m : $k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = m$, $k = k_1 + \dots + k_m$, и $f_k = f^k$.

Теорема 1. Для $S_m(z)$ справедливо равенство

$$zS'_m(z) - mS_m(z) = \frac{1}{m!}Y_m(fa_1, f2!a_2, \dots, fm!a_m), \quad (3)$$

где $Y_m(fg_1, \dots, fg_m)$ — многочлены Белла и

$$\begin{aligned} f^k &= f_k = z^{k+1}B^{(k+1)}(z), & k &= 1, \dots, m, \\ a_i &= S'_{i-1}(z) + \frac{i}{z}S_i(z) - \frac{i-1}{z}S_{i-1}(z), & i &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Доказательство. С помощью разложения $S(x, z)$ по степеням x , находим, что

$$\begin{aligned} z \frac{\partial S}{\partial z} - x \frac{\partial S}{\partial x} &= \sum_{m=0}^{\infty} (S'_m(z) - mS_m(z))x^m, \\ z + xz \frac{\partial S}{\partial z} + x(1-x) \frac{\partial S}{\partial x} &= z + x \left(z \frac{\partial S}{\partial z} - x \frac{\partial S}{\partial x} \right) + x \frac{\partial S}{\partial x} \\ &= z + \sum_{m=1}^{\infty} (zS'_{m-1} - (m-1)S_{m-1}(z) + mS_m(z))x^m \\ &= z(1 + a_1x + a_2x^2 + \dots), \end{aligned}$$

где

$$a_i = S'_{i-1}(z) + \frac{i}{z}S_i(z) - \frac{i-1}{z}S_{i-1}(z).$$

Известно (см. с. 186 в [10]), что

$$(1 + a_1x + a_2x^2 + \dots)^p = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}Y_m(fa_1, f2!a_2, \dots, fm!a_m),$$

где $Y_m(fg_1, \dots, fg_m)$ — многочлены Белла и $f^k = f_k = (p)_k$.

Используя равенство

$$B'(z) = \sum_{p=2}^{\infty} B_p \frac{z^{p-1}}{(p-1)!} = \sum_{p=1}^{\infty} B_{p+1} \frac{z^p}{p!}$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x^m в левой и правой частях уравнения (1), получим равенство

$$zS'_m(z) - mS_m(z) = \frac{1}{m!} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} B_{p+1} z^{p+1} Y_m(fa_1, f2!a_2, \dots, fm!a_m).$$

Подставляя выражение для многочленов Белла и меняя порядок суммирования в правой части последнего выражения, получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} B_{p+1} z^{p+1} \sum_{\pi(m)} \frac{m! f_k}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m} &= \sum_{\pi(m)} \frac{a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m}}{k_1! \dots k_m!} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_{p+1}(p)_k}{p!} z^{p+1} \\ &= \frac{1}{m!} Y_m(\bar{f}a_1, \bar{f}2!a_2, \dots, \bar{f}m!a_m), \end{aligned}$$

где

$$\bar{f}^k = \bar{f}_k = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_{p+1}}{(p-k)!} z^{p+1} = \sum_{j=0}^{\infty} B_{j+k+1} \frac{z^{j+k+1}}{j!} = z^{k+1} B^{(k+1)}(z),$$

то есть (3) верно.

Заметим, что в [1] не приведены краевые условия для уравнения (1). Поскольку единственным связным графом с n вершинами и $n - 2$ точками сочленения является простая цепь P_n и в этом случае $S_{mn} = n!/2 = (m+2)!/2$ и $S_m = 0$ при $n < m + 2$, вместо начального условия для уравнения (3) можно использовать соотношения

$$S_m^{(i)}(0) = 0, \quad i < m + 2, \quad S_m^{(m+2)}(0) = \frac{1}{2}(m+2)!. \quad (4)$$

Следствие 1. *Справедливо равенство*

$$S_2(z) = \frac{1}{2} z^2 B''(z) (e^{B'(z)} - 1)^2. \quad (5)$$

Доказательство. Так как $Y_2(fg_1, fg_2) = f_2 g_1^2 + f_1 g_2 = f_2 a_1^2 + 2f_1 a_2$ (см. [10]), из (3) следует, что

$$zS_2'(z) - 2S_2(z) = \frac{1}{2} a_1^2 z^3 B'''(z) + a_2 z^2 B''(z).$$

Подставляя в это равенство выражения для a_1 и a_2 , находим, что

$$zS_2'(z) - 2S_2(z) = \frac{1}{2} z B'''(z) (zB'(z) + S_1(z))^2 + zB''(z) (zS_1'(z) + 2S_2(z) - S_1(z)),$$

перенеся член, содержащий $S_2(z)$ в левую часть и используя известное выражение для $S_1(z)$, находим, что

$$zS_2'(z) - 2(1 + zB''(z)S_2(z)) = f(z),$$

где

$$f(z) = \frac{1}{2} z^3 B'''(z) (e^{B'(z)} - 1)^2 + z^3 (B''(z))^2 (e^{B'(z)} - 1)$$

Решая это обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка методом вариации постоянной, сначала получим, что

$$S_2(z) = c(z) z^2 e^{2B'(z)},$$

где

$$\begin{aligned} c(z) &= \int \frac{f(z)}{z^3} e^{-2B'(z)} dz \\ &= \frac{1}{2} \int B'''(z) (1 - e^{-B'(z)})^2 dz + \int (B''(z))^2 (e^{B'(z)} - 1) e^{-2B'(z)} dz. \end{aligned}$$

Интегрируя в первом интеграле по частям, находим, что интегралы сокращаются. Поэтому

$$c(z) = \frac{1}{2} B''(z) (1 - e^{-B'(z)})^2 + c_1,$$

и равенство (5) доказано, так как $c_1 = 0$ в силу (4).

Из (1) можно вывести нелинейное уравнение в частных производных 2-го порядка для $S(x, z)$, а затем получить нелинейное дифференциально-разностное уравнение для $S_m(z)$. Однако эти уравнения намного сложнее подобных уравнений, полученных в [5] при перечислении помеченных блоков с заданным цикломатическим числом, и анализ их затруднителен. Поэтому предлагается комбинаторный вывод явной формулы для $S_m(z)$.

Звездный граф — это связный граф, у которого все блоки являются полными графами. Графом точек сочленения связного графа G называется граф, у которого множество вершин — множество точек сочленения графа G и две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие точки сочленения принадлежат одному блоку графа G . Очевидно, что граф точек сочленения является звездным графом.

Пусть $S(m, r, p, p_2, \dots, p_m)$ — число помеченных звездных графов с m вершинами, из которых p — точки сочленения, и с r блоками, причем p_i блоков являются графами K_i , $i = 2, \dots, m$, $p_2 + \dots + p_m = r$, $2p_2 + 3p_3 + \dots + mp_m = m + r - 1$.

Лемма 1. Справедливо равенство

$$S(m, r, p, p_2, \dots, p_m) = \frac{(m)_p S(r-1, p)(m-1)!}{\prod_{i=2}^m ((i-1)!)^{p_i} p_i!} \quad (6)$$

где $S(n, k)$ — числа Стирлинга 2-го рода.

Доказательство. Каждому звездному графу взаимно однозначно сопоставляется гипердерево с тем же множеством вершин и гиперребрами, соответствующими блокам звездного графа. Известно (см. [7, 8]), что каждый гиперграф с m помеченными вершинами и r гиперребрами взаимно однозначно представляется двудольным деревом с m помеченными вершинами в первой доле, совпадающими с вершинами гиперграфа, и r непомеченными вершинами во второй доле, соответствующими ребрам гиперграфа, причем во второй доле нет висячих вершин. Код Прюфера–Реньи устанавливает взаимно однозначное соответствие между двудольными деревьями с m помеченными вершинами в первой доле, r помеченными вершинами во второй доле и последовательностями чисел вида $(\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}), (\beta_1, \dots, \beta_{r-1})$, где $\alpha_i, i = 1, \dots, m-1$, — номера вершин из второй доли, а $\beta_i, i = 1, \dots, r-1$, — номера вершин из первой доли, при этом номер вершины степени i встречается в коде $i-1$ раз.

В нашем случае заполнение мест кода соответствует размещению $m-1$ номеров мест первой части кода по r ячейкам, соответствующим блокам звездного графа, а также размещению $r-1$ мест второй части кода по m различным ячейкам, соответствующим вершинам звездного графа. Степень вершины во второй доле дерева равна числу вершин в соответствующем ей блоке. По условию имеется p_i блоков с i вершинами, $i = 1, \dots, m$. Поэтому число заполнений первой части кода равно числу разбиений $(m-1)$ -множества на p_i блоков размера $i-1$, $i = 1, \dots, m$, которое, как известно (см. с. 244 в [12]), равно $(m-1)! / \prod_{i=2}^m ((i-1)!)^{p_i} p_i!$.

В первой доле дерева висячими будут вершины, которые не являются точками сочленения звездного графа, их номера отсутствуют в коде. Так как число способов размещения $r-1$ мест второй части кода по m различным ячейкам, соответствующим номерам вершин звездного графа при условии, что p ячеек заняты, а $m-p$ свободны, равно $(m)_p S(r-1, p)$ (см. с. 111 в [11]), по правилу произведения получим формулу (6).

Обозначим $S(m, r, p)$ число помеченных звездных графов или, что то же самое, ги-

пердеревьев с m вершинами, из которых p — точки сочленения, и r блоками. Так как

$$S(m, r, p) = \sum_{\pi(m-1)} S(m, r, p, p_2, \dots, p_m),$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(m-1)$ числа $m-1$: $p_2 + \dots + p_m = r$, $p_2 + 2p_3 + \dots + (m-1)p_m = m-1$, нетрудно видеть, что с помощью известного тождества (см. с. 183 в [13])

$$\sum_{\pi(n)} n! / \prod_{i=1}^n (i!)^{p_i} p_i! = S(n, r),$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(n)$ числа n : $p_1 + p_2 + \dots + p_n = r$, $p_1 + 2p_2 + \dots + np_n = n$, из равенства (6) выводится формула Лямина–Селиванова [9]

$$S(m, r, p) = (m)_p S(r-1, p) S(m-1, r) = \frac{m!}{k!} S(m-1, r) S(r-1, m-k),$$

где $k = m - p$ — число концевых вершин.

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$S_m(z) = \frac{z^m}{m!} (B''(z)(e^{B'(z)} - 1)^m)^{(m-2)}, \quad m \geq 2. \quad (7)$$

Доказательство. Будем следовать подходу работы [3], в которой перечислены помеченные связные графы, для которых граф точек сочленения является деревом. Пусть G — некоторый звездный граф с m вершинами, из которых p — точки сочленения, и с r блоками, причем p_i блоков являются графами K_i , $i = 2, \dots, m$, $\sum_{i=2}^m p_i = r$, $\sum_{i=2}^m i p_i = m + r - 1$. Тогда этот граф является структурным графом (графом точек сочленения) для целого класса связных графов, перечисляемых производящей функцией

$$S(z; m, r, p, p_2, \dots, p_m) = S(m, r, p, p_2, \dots, p_m) \prod_{i=2}^m (B^{(i)}(z))^{p_i} e^{p B'(z)} (e^{B'(z)} - 1)^{m-p} \frac{z^m}{m!}.$$

Здесь первый множитель равен числу соответствующих структурных графов, $B^{(i)}(z)$ перечисляет блоки с i непомеченными корнями, которые склеиваются с i точками сочленения, образующими блок K_i в структурном графе, $e^{B'(z)}$ и $e^{B'(z)} - 1$ перечисляют блоки с одним непомеченным корнем, которые присоединяются, соответственно, к вершине, не являющейся концевой вершиной, и к концевой вершине структурного графа. Тогда

$$\begin{aligned} S_m(z) &= \sum_{p=0}^{m-2} \sum_{\pi(m-1)} S(z; m, r, p, p_2, \dots, p_m) \\ &= z^m \sum_{p=0}^m \frac{1}{(m-p)!} e^{p B'(z)} (e^{B'(z)} - 1)^{m-p} \sum_{\pi(m-1)} \prod_{i=2}^m \frac{(m-1)! (B^{(i)}(z))^{p_i} S(r-1, p)}{((i-1)!)^{p_i} p_i!}. \end{aligned}$$

Используя выражение для многочленов Белла и соответствующую производящую функцию (см. с. 173–174 в [10])

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{Y_m}{m!} t^m = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_j}{j!} (t g_1 + \frac{t^2 g_2}{2!} + \dots)^j,$$

получим равенство

$$S_m(z) = z^m e^{mB'(z)} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (1 - e^{-B'(z)})^k Y_{m-1}(fg_1, \dots, fg_{m-1}),$$

где $g_i = B^{(i+1)}(z)$, $f_r = S(r-1, m-k)$. Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Y_m}{m!} t^m &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} S(j-1, m-k) (tB''(z) + \frac{t^2}{2} B'''(z) + \dots)^j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} S(j-1, m-k) (B'(z+t) - B'(z))^j = Y(t). \end{aligned}$$

Поэтому

$$Y_{m-1} = \text{coef}_t Y(t) t^{-m} (m-1)!,$$

где coef_t — коэффициент при t в разложении по степеням t , стоящем после этого символа. Так как

$$S(n, k) = \frac{n!}{k!} \text{coef}_w (e^w - 1) w^{-n-1},$$

справедливы равенства

$$\begin{aligned} S_m(z) &= (m-1)! z^m e^{mB'(z)} \text{coef}_t t^{-m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (B'(z+t) - B'(z))^j \\ &\quad \times \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (1 - e^{-B'(z)})^k \frac{(j-1)!}{(m-k)!} \text{coef}_w (e^w - 1) w^{-m-k} w^{-j} \\ &= (m-1)! z^m e^{mB'(z)} \text{coef}_t t^{-m} \text{coef}_w \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} ((B'(z+t) - B'(z))/w)^j \\ &\quad \times \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (1 - e^{-B'(z)})^k (e^w - 1)^{m-k} \\ &= \frac{z^m}{m} e^{mB'(z)} \text{coef}_t t^{-m} \text{coef}_w \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} ((B'(z)(z+t) - B'(z))/w)^j (e^w - e^{-B'(z)})^m. \end{aligned}$$

Используя правило дифференцирования для coef_t (см. с. 18 в [13])

$$k \text{coef}_t A(t) t^{-k-1} = \text{coef}_t A'(t) t^{-k},$$

находим, что

$$\begin{aligned} S_m(z) &= \frac{z^m}{m(m-1)} \\ &\quad \times \text{coef}_t t^{1-t} \text{coef}_w \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{w} (B'(z+t) - B'(z))^{j-1} \frac{1}{w} (B''(z+t)(e^{w+B'(z)} - 1))^m \\ &= \frac{z^m}{m(m-1)} \text{coef}_t t^{1-m} B''(z+t) \text{coef}_w (e^{w+B'(z)} - 1)^m / (w - (B'(z+t) - B'(z))). \end{aligned}$$

Вычисляя теперь coef_w для полюса первого порядка, находим, что

$$S_m(z) = \frac{z^m}{m(m-1)} \text{coef}_t t^{1-m} B''(z+t)(e^{B'(z+t)} - 1)^m. \quad (8)$$

В силу формального разложения $f(t+z)$ в ряд Тейлора справедливо тождество (см. с. 14 в [14])

$$\text{coef}_t t^{-m} f(t+z) = \frac{1}{(m-1)!} f^{(m-1)}(z).$$

Поэтому при $m \geq 2$

$$S_m(z) = \frac{z^m}{m!} (B''(z)(e^{B'(z)} - 1)^m)^{(m-2)}$$

Теорема 2 доказана.

Следствие 2. Справедливо равенство

$$S_{mn} = \binom{n}{m} (n-2)! \text{coef}_x B''(x)(e^{B'(x)} - 1)^m x^{1-n}. \quad (9)$$

Доказательство. С помощью замены $x = t + z$ и известного разложения (см. с. 141 в [10])

$$(1-t)^{-m-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k}{k} t^k$$

из соотношения (8) получаем, что

$$\begin{aligned} S_m(z) &= \frac{z^m}{m(m-1)} \text{coef}_x (x-z)^{1-m} B''(x)(e^{B'(x)} - 1)^m \\ &= \frac{z^m}{m(m-1)} \text{coef}_x x^{1-m} B''(x)(e^{B'(x)} - 1)^m \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-2}{k} \left(\frac{z}{x}\right)^k \\ &= \frac{1}{m!} \text{coef}_x x B''(x)(e^{B'(x)} - 1)^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n-2)!}{(n-m)!} \left(\frac{z}{x}\right)^n \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} (n-2)! \text{coef}_x x^{1-n} B''(x)(e^{B'(x)} - 1)^m \frac{z^n}{n!}, \end{aligned}$$

то есть соотношение (9) доказано.

Следствие 3. Пусть C_n — число помеченных связных графов с n вершинами, тогда при $n \geq 2$

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} \text{coef}_x e^{nB'(x)} x^{-n}, \quad (10)$$

$$C_n = (n-1)! \sum_{\pi(n-1)} \frac{n^{k-1}}{k_1! \dots k_{n-1}!} \left(\frac{B_2}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{B_n}{(n-1)!}\right)^{k_{n-1}}, \quad (11)$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(n-1)$ числа $n-1$:

$$k_1 + \dots + k_{n-1} = k, \quad k_1 + 2k_2 + \dots + (n-1)k_{n-1} = n-1.$$

Доказательство. При $n \geq 2$ с учетом равенства $S_{n-1,n} = S_{n,n} = 0$ находим, что

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{m=0}^{n-2} S_{mn} = (n-2)! \operatorname{coef}_x B''(x) x^{1-n} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (e^{B'(x)} - 1)^m \\ &= (n-2)! \operatorname{coef}_x B''(x) e^{nB'(x)} x^{1-n}. \end{aligned}$$

Используя правило интегрирования коэффициента (см. с. 18 в [13]), получим соотношение (10). Следовательно,

$$C_n = \frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow 0} (e^{nB'(x)})^{(n-1)}.$$

Пусть

$$A(t) = f(g(t)), \quad f_n = \left. \frac{d^n f(u)}{du^n} \right|_{u=g(t)}, \quad g_n = \frac{d^n g(t)}{dt^n},$$

согласно формуле Бруно (см. с. 47 в [11])

$$\frac{d^n}{dt^n} A(t) = \sum_{\pi(n)} \frac{n! f_k}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{g_1}{1!} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{g_n}{n!} \right)^{k_n},$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(n)$ числа n : $k = k_1 + \dots + k_n$, $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$. В нашем случае

$$\begin{aligned} f(u) &= e^u, \quad g(t) = nB'(t), \quad f_n(0) = e^{g(0)} = 1, \quad g_n(0) = nB^{(n+1)}(0) = nB_{n+1}, \\ C_n &= \frac{1}{n} \sum_{\pi(n-1)} \frac{(n-1)!}{k_1! \dots k_{n-1}!} \left(\frac{nB_2}{1!} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{nB_n}{(n-1)!} \right)^{k_{n-1}}, \end{aligned}$$

последняя формула совпадает с (11).

Следствие 4. Пусть

$$C(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{z^n}{n!},$$

тогда

$$C'(t) = e^{B'(t)C'(t)}. \quad (12)$$

Доказательство. Соотношение (12) известно, оно найдено Ридделом [6]. Здесь это соотношение выводится как следствие теоремы 2. Используем разложение в ряд Бюрмана–Лагранжа (см. с. 112 в [12] и с. 26 в [14])

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n w^n(z), \quad d_n = \frac{1}{n} \operatorname{coef}_x \frac{f'(x)}{w^n(x)}.$$

В нашем случае

$$C_n = (n-1)! d_n, \quad f(x) = x, \quad w(x) = x e^{-B'(x)}.$$

Так как

$$C'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{z^{n-1}}{(n-1)!},$$

справедливы равенства

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} d_n (ze^{-B'(z)})^n = C'(ze^{-B'(z)})ze^{-B'(z)}$$

или

$$e^{B'(z)} = C'(ze^{-B'(z)}).$$

Полагая $t = ze^{-B'(z)}$, получим, что $e^{B'(z)} = C'(t)$, $z = tC'(t)$, $C'(t) = e^{B'(tC'(t))}$.

Теорема 3. Если $n \rightarrow \infty$ и $m = o(n)$, то

$$S_{mn} \sim \frac{(n-2)!}{(n-m-2)!} \binom{n}{m} 2^{(n-m)(n-m-1)/2}. \quad (13)$$

Доказательство. Пусть

$$R_{mn} = \text{coef}_x B''(x)(e^{B'(x)} - 1)^m x^{1-n},$$

тогда в силу (9)

$$S_{mn} = \binom{n}{m} (n-2)! R_{mn}.$$

Введем производящую функцию

$$R_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn} z^n.$$

По правилу замены (см. с. 17 в [14])

$$R_m(z) = z^2 \sum_{n=2}^{\infty} z^{n-2} \text{coef}_x B''(x)(e^{B'(x)} - 1)^m x^{1-n} = z^2 B''(z)(e^{B'(z)} - 1)^m.$$

Так как $B_n \sim C_n \sim 2^{n(n-1)/2}$ при $n \rightarrow \infty$ (см. с. 205 в [12]), ряды для $B(z)$, а также для $B'(z)$ и $B''(z)$ имеют нулевой радиус сходимости, то есть являются формальными степенными рядами. Легко видеть, что

$$B'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{n+1} \frac{z^n}{n!}.$$

В [4] доказано, что если

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n x^n$$

и при $n \rightarrow \infty$

$$\log g_n = \alpha n^{a+1} + \beta n \log n + \gamma n + O(n^b), \quad \alpha > 0, \quad 0 < b < a, \quad (14)$$

то $g_n \sim G_n$. В нашем случае

$$g_n = \frac{B_{n+1}}{n!} \sim \frac{2^{n(n+1)/2}}{n!},$$

и в силу формулы Стирлинга при $n \rightarrow \infty$

$$\ln g_n \sim \frac{1}{2}n(n+1)\ln 2 - \ln \sqrt{2\pi n} - n \ln n + n \sim \frac{\ln 2}{2}n^2 - n \ln n + \left(\frac{\ln 2}{2} + 1\right)n.$$

Условие (14) выполнено и

$$e^{B'(z)} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} G_n z^n,$$

поэтому

$$G_n \sim g_n \sim 2^{n(n+1)/2}/n!.$$

Пусть

$$(e^{B'(z)} - 1)^m = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n = z^m \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} G_{n+1} z^n\right)^m = z^m \exp\left(m \ln\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} G_{n+1} z^n\right)\right),$$

$$\ln\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} G_{n+1} z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{g}_n z^n.$$

Нетрудно видеть, что $G_{n+1} \sim 2^{(n+1)(n+2)/2}/(n+1)!$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому (14) опять выполнено и $\bar{g}_n \sim G_{n+1}$. Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n = z^m \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} m \bar{g}_n z^n\right) = z^m \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{q}_n z^n\right) = \sum_{n=m}^{\infty} \bar{q}_{n-m} z^n.$$

Поскольку $2 \leq m \leq n-2$, величина $m \bar{g}_n$ удовлетворяет условию (14). Таким образом, $\bar{q}_n \sim m \bar{g}_n \sim m G_{n+1}$ и

$$q_n = \bar{q}_{n-m} \sim m G_{n-m+1} \sim \frac{m}{(n-m+1)!} 2^{(n-m+1)(n-m+2)/2}.$$

Введем обозначение

$$B''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+2} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, \quad p_0 = B_2 = 1,$$

тогда

$$R_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn} z^n = z^{m+2} \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} \bar{q}_n z^n = z^{m+2} \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n,$$

где

$$\begin{aligned}\bar{q}_0 &= 1, & r_n &= \sum_{s=0}^n \bar{q}_s p_{n-s} = r_0(n) + F(n), \\ r_0(n) &= p_n + \bar{q}_n, & F(n) &= \sum_{s=1}^{n-1} \bar{q}_s p_{n-s}.\end{aligned}$$

Используя найденные ранее асимптотические выражения, получаем, что

$$\begin{aligned}r_0(n) &\sim \frac{m+n+1}{(n+1)!} 2^{(n+1)(n+2)/2}, \\ F(n) &\leq C \sum_{s=1}^{n-1} \frac{m}{(s+1)!} 2^{(s+1)(s+2)/2} \frac{1}{(n-s)!} 2^{(n-s+1)(n-s+2)/2} \\ &= Cm \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{(s+1)!(n-s)!} 2^{(n^2+2s^2-2ns+3n+4)/2}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{F(n)}{r_0(n)} &\leq \frac{Cm}{m+n+1} \sum_{s=1}^{n-1} \binom{n+1}{s+1} 2^{s(n-s)+1} \leq \frac{2Cm}{m+n+1} \sum_{s=1}^{[n/2]} \binom{n+1}{s+1} 2^{s(n-s)} \\ &\leq \frac{2Cm}{m+n+1} \sum_{s=1}^{[n/2]} (n+1)^{s+1} 2^{s(n-s)} \\ &= \frac{2Cm(n+1)^2 2^{-n/2} ((n+1)2^{-n/2})^{[n/2]} - 1}{(m+n+1)((n+1)2^{-n/2} - 1)} = o(1),\end{aligned}$$

так как $m \leq n-2$, $\binom{n}{k} \leq n^k$.

Таким образом, $r_n \sim r_0(n)$ при $n \rightarrow \infty$ и $m = o(n)$ и

$$R_{mn} = r_{n-m-2} \sim \frac{n-1}{(n-m-1)!} 2^{(n-m)(n-m-1)/2} \sim \frac{1}{(n-m-2)!} 2^{(n-m)(n-m-1)/2}.$$

Отсюда следует (13).

Следствие 5. При $n \rightarrow \infty$ и фиксированном m

$$S_{mn} \sim \frac{1}{m!} n^{2m} 2^{(n-m)(n-m-1)/2}.$$

Доказательство. При $n \rightarrow \infty$ и фиксированном m

$$(n)_m = n(n-1) \dots (n-m+1) \sim n^m,$$

поэтому справедливы соотношения

$$\frac{(n-2)!}{(n-m-2)!} \binom{n}{m} = \frac{1}{m!} (n-2)_m (n)_m \sim \frac{1}{m!} (n-2)^m n^m \sim \frac{n^{2m}}{m!}.$$

Автор благодарит В. К. Леонтьева за доброжелательную критику.

Список литературы

1. Selkow S. M., The enumeration of labeled graphs by number of cutpoints. *Discrete Math.* (1998) **185**, 183–191.
2. Ying-Lie Jin, Enumeration of labeled connected graphs and Euler graphs with only one cut vertex. *Yokohama Math. J.* (1997) **45**, 125–134.
3. Ling-Ling Yang, Song-Chen Li, Enumeration of special kind of labeled connected graphs. *Trans. Tianjin Univ.* (2004) **10**, 233–235.
4. Wright E. M., A relationship between two sequences. *Proc. London Math. Soc.* (1967) **17**, 296–304.
5. Wright E. M., The number of connected sparsely edged graphs II: Smooth graphs and blocks. *J. Graph Theory* (1978) **2**, 299–305.
6. Ford G. W., Uhlenbeck G. E., Combinatorial problems in the theory of graphs I. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* (1956) **42**, 122–128.
7. Багаев Г. Н., К перечислению связных гиперграфов. *Комбинаторный анализ* (1980) **5**, 59–61.
8. Дыйканов С. К., Перечислительные задачи гиперграфов. *Комбинаторный анализ* (1980) **5**, 62–65.
9. Лямин В. Н., Селиванов Б. И., Гипердеревья с заданным числом концевых вершин и ребер. *Комбинаторный анализ* (1974) **3**, 68–71.
10. Риордан Дж., *Комбинаторные тождества*. Наука, Москва, 1982.
11. Риордан Дж., *Введение в комбинаторный анализ*. ИЛ, Москва, 1963.
12. Сачков В. Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. МЦНМО, Москва, 2004.
13. Егорычев Г. П., *Интегральные преобразования и вычисление комбинаторных сумм*. Наука, Новосибирск, 1977.
14. Гульден Я., Джексон Д., *Перечислительная комбинаторика*. Наука, Москва, 1983.

Статья поступила 21.10.2005.