Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Бондаренко, А. Г. Бродский, О случайных 2-смежностных 0/1-многогранниках, *Дискрет. матем.*, 2008, том 20, выпуск 1, 64–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm989>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:59:50

О случайных 2-смежностных 0/1-многогранниках

© 2008 г. В. А. Бондаренко, А. Г. Бродский

Оценивается вероятность $P_{k,m}$ того, что при случайном выборе k вершин единичного куба $I_m = \{0, 1\}^m$ их выпуклой оболочкой служит многогранник, граф которого является полным. Устанавливается, в частности, что вероятность $P_{k(m),m}$ стремится к единице, если $k(m) = O(2^{m/6})$, и $P_{k(m),m}$ стремится к нулю, если $k(m) \geq (3/2)^m$.

Результаты работы, во-первых, в значительной мере объясняют распространенность труднорешаемых дискретных задач и, во-вторых, подтверждают известную гипотезу Д. Гейла, опубликованную им в 1956 г.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 03-01-00822а.

1. Пусть M — выпуклый многогранник, $X = \text{ext } M$ — множество его вершин. Две вершины $x, y \in X$ называются смежными [1], если отрезок $[x, y]$ является одномерной гранью многогранника (или ребром). Это означает, что $[x, y]$ не пересекается с выпуклой оболочкой остальных вершин из X . Графом многогранника M (полиэдральным графом) называется граф с множествами его геометрических вершин и ребер. Плотностью графа [2] называется максимальное число его попарно смежных вершин. Среди числовых характеристик полиэдральных графов, отражающих различные аспекты вычислительной сложности соответствующих задач, особое место принадлежит плотности графа. В частности, оценки плотности полиэдральных графов большого количества комбинаторных задач, полученные в работах [3–18], показали, что эта характеристика экспоненциальна по размерности многогранников для труднорешаемых задач и полиномиальна для полиномиально разрешимых.

Более того, полиэдральные графы задач о максимальном разрезе (см. [4, 18]), о клике (вершинное покрытие, независимое множество, см. [8, 13]), о покрытии матрицы (см. [11]) являются полными. Напомним, что многогранники, у которых любые две вершины смежны, называются 2-смежностными.

Существование уже в $\mathbf{R}^4$ 2-смежностных многогранников со сколь угодно большим числом вершин установил К. Каратеодори [19] в 1907 году. Позже (1956 г.) этот факт был переоткрыт Д. Гейлом [20], где им сформулирована также гипотеза о том, что при случайном выборе k точек на сфере в $\mathbf{R}^m$ их выпуклой оболочкой с высокой вероятностью будет служить 2-смежностный многогранник даже при $k \gg m$.

В последние годы появилось значительное число работ, посвященных изучению многогранников с вершинами из множества $I_m = \{0, 1\}^m$, в частности, в связи с различными аспектами комбинаторной оптимизации. Ряд работ (см., например, [21, 22]) направлен на исследование графов $G = (V, E)$ так называемых случайных 0/1-многогранников,

множество V вершин которых случайно выбирается из I_m . Так, в статье [21] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\mu(k, m)$ — математическое ожидание величины $|E|/\binom{k}{2}$ при случайном выборе k точек ($|V| = k$) из I_m с равномерным распределением вероятностей, и пусть $k = k(m)$ — некоторая последовательность натуральных чисел. Тогда

- (а) если существует $\varepsilon > 0$, для которого $k(m) = O((\sqrt{2} - \varepsilon)^m)$, то $\mu(k(m), m) \rightarrow 1$,
- (б) если существует $\varepsilon > 0$, для которого $(\sqrt{2} + \varepsilon)^m = O(k(m))$, то $\mu(k(m), m) \rightarrow 0$.

2. Обозначим $P_{k,m}$ вероятность того, что при случайном выборе без возвращения k вершин единичного куба I_m их выпуклая оболочка является 2-смежным многогранником. Целью настоящей работы служит доказательство следующего утверждения.

Теорема 2. Для любого натурального $m > 1$ и для любого натурального $k \leq 2^m$ выполняется неравенство

$$P_{k,m} \geq 1 - \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{8} \frac{2 \cdot 5^m - 11 \cdot 3^m + 14 \cdot 2^m - 5}{(2^m - 1)(2^m - 2)(2^m - 3)}.$$

Иллюстрацией к теореме 2 служит такой числовой пример: случайно выбранные 25000 точек 100-мерного куба образуют 2-смежный многогранник с вероятностью, превышающей 0,999.

3. Доказательству теоремы 2 предположим ряд определений и вспомогательных утверждений. Через $\rho(x, y)$ условимся обозначать расстояние Хемминга между вершинами $x, y \in I_m$, то есть число таких i , $1 \leq i \leq m$, для которых $x_i \neq y_i$. На множестве I_m определим стандартным образом отношение порядка $\leq$ и операции логического сложения, умножения и сложения по модулю 2, для произвольных $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ из I_m , положив

$$\begin{aligned} x \leq y &\iff \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad x_i \leq y_i, \\ x \wedge y &= (x_1 \wedge y_1, \dots, x_n \wedge y_n), \\ x \vee y &= (x_1 \vee y_1, \dots, x_n \vee y_n), \\ x \oplus y &= (x_1 \oplus y_1, \dots, x_n \oplus y_n). \end{aligned}$$

Лемма 1. Если $X \subseteq I_m$ и для любых попарно различных $x, y, u, v \in X$ нарушается хотя бы одно из неравенств

$$x \wedge y \leq u, \quad v \leq x \vee y, \quad (1)$$

то выпуклая оболочка $M = \text{conv } X$ является 2-смежным многогранником.

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Предположим, что условие леммы выполнено, но точки $x, y \in X$ являются несмежными вершинами многогранника M . Тогда выполняется равенство $\alpha x + \beta y = \sum \lambda(z)z$, при некоторых $\alpha, \beta, \lambda(z) \geq 0$, где $\alpha + \beta = \sum \lambda(z) = 1$ и суммирование проводится по всем $z \in X$, отличным от x и y .

Очевидно, что найдутся два различных элемента $u, v \in X \setminus \{x, y\}$, для которых $\lambda(u) > 0$ и $\lambda(v) > 0$. Учитывая, что X состоит из 0/1-векторов, для x, y, u, v выполняются неравенства (1). Полученное противоречие доказывает лемму.

Для краткости формулировок условимся четверки (x, y, u, v) и (a, b, c, d) из I_m^4 называть эквивалентными, если $\{x, y\} = \{a, b\}$ и $\{u, v\} = \{c, d\}$. Кроме того, четверки (x, y, u, v) и (a, b, c, d) будем называть инверсными, если $\{x, y\} = \{c, d\}$ и $\{u, v\} = \{a, b\}$. Наконец, четверку $(x, y, u, v) \in I_m^4$ назовем критической, если она удовлетворяет условию (1).

Лемма 2. Пусть $x, y, u, v \in I_m$ попарно различны и четверка (x, y, u, v) является критической. Если четверка $(a, b, c, d) \in I_m^4$ получена из (x, y, u, v) перестановкой компонент и также является критической, то (a, b, c, d) и (x, y, u, v) либо эквивалентны, либо инверсны.

Доказательство. Предположим противное, пусть критическая четверка (a, b, c, d) получена из (x, y, u, v) перестановкой компонент, причем (a, b, c, d) и (x, y, u, v) не эквивалентны и не инверсны. Без ограничения общности можно считать, что $a = x, b = u, c = y, d = v$. Заметим, что условие (1) можно переписать следующим образом:

$$x \oplus u \leq x \oplus y, \quad x \oplus v \leq x \oplus y. \quad (2)$$

Поскольку четверка (x, u, y, v) также является критической,

$$x \oplus y \leq x \oplus u, \quad x \oplus v \leq x \oplus u. \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), заключаем, что $x \oplus u = x \oplus y$, и следовательно, $u = y$, а это невозможно. Лемма доказана.

Пусть $K \subseteq I_m$ — четырехэлементное подмножество. Скажем, что K является сильно критическим, если существует критическая четверка $(x, y, u, v) \in I_m^4$ такая, что $\{x, y, u, v\} = K$ и инверсная к ней четверка (u, v, x, y) также является критической. Если же существует критическая четверка $(x, y, u, v) \in I_m^4$ такая, что $\{x, y, u, v\} = K$ и инверсная к ней четверка (u, v, x, y) не является критической, то будем говорить, что K является слабо критическим.

Лемма 3. Если $m \geq 2$, то число сильно критических четырехэлементных подмножеств в I_m равно $2^{m-3}(3^m - 2 \cdot 2^m + 1)$.

Доказательство. Будем конструировать сильно критическое четырехэлементное подмножество, начиная с выбора одного из его элементов x . Этот выбор можно осуществить 2^m способами. Поскольку при продолжении конструкции каждое четырехэлементное подмножество будет получаться 4 раза, искомое число равно произведению 2^{m-2} на число A сильно критических подмножеств, содержащих фиксированный элемент x . Если элемент $y \in I_m$ таков, что $\rho(x, y) = 1$, то очевидно, что двухэлементное множество $\{x, y\}$ нельзя расширить до четырехэлементного $\{x, y, u, v\}$ так, чтобы выполнялось условие (1). Зафиксируем натуральное число $i, 2 \leq i \leq m$, и рассмотрим пару (x, y) , для которой $\rho(x, y) = i$. Тогда $A = \sum_{i=2}^m A_i$, где A_i — число сильно критических подмножеств, содержащих фиксированный элемент x такой, что соответствующий ему элемент y удовлетворяет условию $\rho(x, y) = i$. Пусть $x_k \neq y_k$ для всех k из набора $\{k_1, k_2, \dots, k_i\}$, $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_i \leq m$, который выбирается $\binom{m}{i}$ способами. Вершина y тогда однозначно восстанавливается по x . Относительно выбора u, v так, чтобы $x \wedge y \leq u, v \leq x \vee y$ и $u \wedge v \leq x, y \leq u \vee v$, заметим, что эти условия равносильны тому, что $u_{k_j} \wedge v_{k_j} = 0$ и $u_{k_j} \vee v_{k_j} = 1$, то есть $u_{k_j} \neq v_{k_j}$ для всех $j \in \{1, 2, \dots, i\}$ и $u_k = v_k$ при остальных k . Следовательно, v однозначно восстанавливается по u . Поскольку число способов выбора

элемента u , поделенное на 2 в силу равноправия u и v , составляет $(2^i - 2)/2$, искомое число равно

$$\begin{aligned} 2^{m-2} \sum_{i=2}^m \binom{m}{i} \frac{2^i - 2}{2} &= 2^{m-3} \left(\sum_{i=1}^m 2^i \binom{m}{i} - 2 \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} \right) \\ &= 2^{m-3} (3^m - 2 \cdot 2^m + 1). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Если $m \geq 2$, то число слабо критических четырехэлементных подмножеств в I_m равно $2^{m-2}(5^m - 6 \cdot 3^m + 8 \cdot 2^m - 3)$.

Доказательство. Будем конструировать слабо критическое четырехэлементное подмножество, начиная с выбора его элемента x , который можно достроить до $\{x, y, u, v\}$ так, чтобы выполнялось условие (1). Рассуждая так же, как и в доказательстве леммы 3, обнаруживаем, что искомое число равно произведению 2^{m-1} на число B слабо критических подмножеств, содержащих фиксированный элемент x указанного типа, причем $B = \sum_{i=2}^m B_i$, где B_i определяются аналогично A_i из доказательства леммы 3. Ясно, что строку $(k_1, k_2, \dots, k_i)$, где $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_i \leq m$, можно выбрать $\binom{m}{i}$ способами. Вершина y тогда однозначно восстанавливается по x . Для выбора u, v так, чтобы условие (1) выполнялось, а условие $u \wedge v \leq x, y \leq x \vee y$ не выполнялось, заметим, что u можно выбрать $2^i - 2$ способами, а число способов выбора v равно $2^i - 4$ (v должно быть отлично от x, y, u и элемента w такого, что $x \wedge y \leq w \leq x \vee y$ и $w_{k_j} \neq u_{k_j}$ для всех $j \in \{1, 2, \dots, i\}$). Учитывая, что u и v равноправны, окончательно получаем, что искомое число равно

$$\begin{aligned} 2^{m-1} \sum_{i=2}^m \binom{m}{i} \frac{(2^i - 2)(2^i - 4)}{2} &= 2^{m-2} \left(\sum_{i=1}^m 4^i \binom{m}{i} - 6 \sum_{i=1}^m 2^i \binom{m}{i} + 8 \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} \right) \\ &= 2^{m-2} (5^m - 6 \cdot 3^m + 8 \cdot 2^m - 3). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Ввиду лемм 1–4, вероятность того, что многогранник не является 2-смежным, не превосходит

$$\begin{aligned} \binom{k}{4} \frac{2^{m-3}(3^m - 2 \cdot 2^m + 1) + 2^{m-2}(5^m - 6 \cdot 3^m + 8 \cdot 2^m - 3)}{\binom{2^m}{4}} \\ = \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{8} \frac{2 \cdot 5^m - 11 \cdot 3^m + 14 \cdot 2^m - 5}{(2^m - 1)(2^m - 2)(2^m - 3)}. \end{aligned}$$

Отсюда очевидным образом следует доказываемое утверждение теоремы.

Следствие 1. Если $k(m) = O(2^{cm})$, где c — постоянная, удовлетворяющая неравенствам $0 < c < (3 - \log_2 5)/4$, то $P_{k(m),m} \rightarrow 1$ при $m \rightarrow \infty$.

4. Сделаем ряд замечаний.

Замечание 1. Неравенства из следствия 1 выполняются при $c = 1/6$. Поэтому $P_{k(m),m} \rightarrow 1$ при $m \rightarrow \infty$ в предположении, что $k(m) = O(2^{m/6})$.

Замечание 2. При достаточно больших m выполняется условие $2^{m/6} \gg m$, поэтому теорема 2 служит подтверждением упомянутой в пункте 1 гипотезы Д. Гейла для единичного куба.

Замечание 3. Теорема 2 в определенной степени объясняет факт доминирования трудно-решаемых дискретных задач. Так как плотность графа многогранника, ассоциированного с задачей, характеризует сложность задачи в широком классе алгоритмов (см. [11]), естественно рассмотреть связь между m и $k(m)$ для типичных задач комбинаторной оптимизации. Для каждой из этих задач обозначим через n основной параметр задачи и приведем значение m (размерность пространства) и k (число допустимых решений задачи).

- (а) В задаче о максимальном остовном дереве в полном графе с n вершинами [3] $m = n(n-1)/2$, $k = n^{n-2}$.
- (б) В задаче о назначении для n работников и n работ [14] $m = n^2$, $k = n!$.
- (в) В задаче коммивояжера для ориентированного графа с n узлами [6] $m = n(n-1)$, $k = (n-1)!$.
- (г) В задаче о трехмерном сочтении [9, 11] $m = n^3$, $k = (n!)^2$.
- (д) В задаче о максимальном разрезе [18, 4] $m = n(n-1)/2$, $k = 2^{n-1} - 1$.
- (е) В задаче о клике (вершинное покрытие, независимое множество) [8, 13] $m = n(n-1)/2$, $k = 2^n - n - 1$.
- (ж) В задаче о покрытии квадратной матрицы [11] $m = n^2$, $k = 2^{2^n}$.

Легко убедиться, что в примерах (а)–(ж) выполняется условие $k = k(m) = O(2^{m/6})$.

Замечание 4. В дополнение к теореме 2 приведем утверждение, непосредственно вытекающее из теоремы 1 в [21]: если $k(m) \geq (3/2)^m$ при достаточно больших $m \in \mathbb{N}$, то $\lim_{m \rightarrow \infty} P_{k(m),m} = 0$.

Список литературы

- Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К., *Многогранники, графы, оптимизация*. Наука, Москва, 1981.
- Кристофидес Н., *Теория графов: Алгоритмический подход*. Мир, Москва, 1978.
- Белов Ю. А., О плотности графа матроида. В сб.: *Модели исследования операций в вычислительных системах*. ЯрГУ, Ярославль, 1985, с. 95–100.
- Белошевский М. И., Многогранник задачи о максимальном разрезе. В сб.: *Модели и алгоритмы математического обеспечения ЭВМ*. ЯрГУ, Ярославль, 1986, с. 12–20.
- Бондаренко В. А., Соседние вершины многогранников, порождаемых матроидами. В сб.: *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*. ЯрГУ, Ярославль, 1982, с. 66–68.
- Бондаренко В. А., Неполиномиальная нижняя оценка сложности задачи коммивояжера в одном классе алгоритмов. *Автоматика и телемеханика* (1983), № 9 45–50.

7. Бондаренко В. А., Шуникова Е. В., Обобщенные перестановочные многогранники и свойства алгоритмов сортировки. В сб.: *Модели исследования операций в вычислительных системах*. ЯрГУ, Ярославль, 1985, с. 105–113.
8. Бондаренко В. А., Неполиномиальные нижние оценки сложности оптимизационных задач о клике и вершинном покрытии в классе прямых алгоритмов. В сб.: *Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике*. ГГУ, Горький, 1985, с. 59–65.
9. Бондаренко В. А., Экспоненциальность плотности графа многогранника задачи о трехмерном сочетании. В сб.: *Тезисы 7-й Всесоюзной конференции «Проблемы теоретической кибернетики»*. ИГУ, Иркутск, 1985, с. 29.
10. Бондаренко В. А., Оценки сложности задач комбинаторной оптимизации в одном классе алгоритмов. *Докл. РАН* (1993) **328**, №1, 22–24.
11. Бондаренко В. А., *Полиэдральные графы и сложность в комбинаторной оптимизации*. ЯрГУ, Ярославль, 1995.
12. Бондаренко В. А., Полиэдральные графы и сложность задач комбинаторной оптимизации. В сб.: *Математика в Ярославском университете*. ЯрГУ, Ярославль, 1995, с. 31–42.
13. Грешнев С. Н., Многогранник задачи о m -вершинном подграфе полного графа. *Журнал вычислительной математики и математической физики* (1984) **24**, №5, 790–793.
14. Максименко А. Н., Нижняя оценка плотности графа многогранника задачи о паросочетаниях. *Современные проблемы математики и информатики* (2001), № 4 157–161.
15. Максименко А. Н., Сводимость задач дискретной оптимизации и соотношение плотностей их полиэдральных графов. *Моделирование и анализ информационных систем* (2003) **10**, №2, 3–10.
16. Максименко А. Н., Многогранник задачи о рюкзаке. В сб.: *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*. ЯрГУ, Ярославль, 2003, с. 163–172.
17. Максименко А. Н., Комбинаторные свойства многогранника задачи о кратчайшем пути. *Журнал вычислительной математики и математической физики* (2004) **44**, №9, 1693–1696.
18. Barahona F., Mahjoub A. R., On the cut polytope. *Math. Programming* (1986) **36**, 157–173.
19. Carathéodory C., Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. *Math. Ann.* (1907) **64**, 95–115.
20. Гейл Д., Соседние вершины на выпуклом многограннике. В сб.: *Линейные неравенства и смежные вопросы*. ИЛ, Москва, 1959, с. 355–362.
21. Kaibel V., Remshagen A., On the graph-density of random 0/1-polytopes. *Lect. Notes Computer Sci.* (2003) **2764**, 318–328.
22. Ziegler G. M., Lectures on 0/1-polytopes. In: *Polytopes, Combinatorics and Computation*. Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 1–41.

Статья поступила 15.01.2006.

Переработанный вариант поступил 21.07.2006.