Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Л. Павлов, Предельные теоремы для объемов деревьев
в случайном непомеченном лесе, *Дискрет. матем.*, 2005,
том 17, выпуск 2, 70–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm99>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 12:59:38

УДК 519.2

Предельные теоремы для объемов деревьев в случайном непомеченном лесе

© 2005 г. Ю. Л. Павлов

Для случайного леса, состоящего из N деревьев и n непомеченных вершин, получено описание предельного поведения максимального объема дерева и числа деревьев заданного объема во всех зонах стремления N и n к бесконечности.

Работа выполнена при поддержке программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ Российской Федерации, грант НШ 1758.2003.1.

В работах [1, 2, 3] рассматривались леса, состоящие из N корневых деревьев и содержащие n некорневых вершин, при этом корни деревьев занумерованы числами от 1 до N , а некорневые вершины — числами от 1 до n . На множестве всех таких лесов вводилось равномерное распределение вероятностей, и при $N, n \rightarrow \infty$ было получено описание предельного поведения максимального объема дерева и числа деревьев заданного объема. Ниже будут доказаны аналогичные результаты для случайных корневых лесов с незанумерованными вершинами. Обозначим через $F_{N,n}$ множество лесов, состоящих из N корневых деревьев, упорядоченных одним из $N!$ возможных способов, и n некорневых непомеченных вершин. Пусть на $F_{N,n}$ задано равномерное распределение вероятностей. Под объемом дерева в лесе из $F_{N,n}$ будем понимать число некорневых вершин, содержащихся в этом дереве.

Задача перечисления непомеченных деревьев изучалась в работе [4]. Введем производящую функцию

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k x^k, \quad (1)$$

где T_k — число корневых непомеченных деревьев, содержащих k вершин, включая корень. В [4] рассматривались свойства этой функции и показано, что

$$T(x) = x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 9x^5 + \dots \quad (2)$$

и эта производящая функция имеет радиус сходимости $R = 0,3383219 \dots$. Кроме того, согласно [4],

$$T(R) = 1, \quad (3)$$

и функция $T(x)$ может быть представлена в виде

$$T(x) = 1 - b(R - x)^{1/2} + b_1(R - x) + b_2(R - x)^{3/2} + \dots, \quad (4)$$

числовые коэффициенты $b, b_1, b_2, \dots$ определены в [4], в частности, $b = 2,681127\dots$. В [4] также установлено, что при $k \rightarrow \infty$

$$T_k = \beta(R^k k^{3/2})^{-1} + O((R^k k^{5/2})^{-1}), \quad (5)$$

где $\beta = 0,4399237\dots$

Для доказательства полученных ниже результатов будет использована обобщенная схема размещения частиц по ячейкам, предложенная и подробно исследованная В. Ф. Колчиным [5]. Введем случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$, равные объемам деревьев леса из $F_{N,n}$ с номерами $1, \dots, N$ соответственно. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_N$ — независимые одинаково распределенные целочисленные случайные величины такие, что

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{T_{k+1}\lambda^{k+1}}{T(\lambda)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad 0 < \lambda \leq R. \quad (6)$$

Легко проверить, что для целых неотрицательных $k_1, \dots, k_N$

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}, \quad (7)$$

а это и означает, что для двух наборов случайных величин $(\eta_1, \dots, \eta_N)$ и $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ выполнены условия обобщенной схемы размещения [5].

Обозначим через $\eta_{(N)}$ и μ_r , соответственно, максимальный объем дерева и число деревьев объема r в лесе из $F_{N,n}$. Ниже будут использоваться два значения параметра λ распределения (6). Если $N, n \rightarrow \infty$ так, что $N/\sqrt{n} \rightarrow \infty$, то в качестве λ берем решение уравнения

$$\frac{\lambda T'(\lambda)}{T(\lambda)} = \frac{N + n}{N}, \quad (8)$$

а если $N, n \rightarrow \infty$ так, что $N/\sqrt{n} \leq C < \infty$, то полагаем $\lambda = R$. В случае $N/\sqrt{n} \rightarrow \infty$ обозначим

$$m = \mathbf{E}\xi_1, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1.$$

При $\lambda = R$ из (1)–(3), (5) и (6) следует, что $\mathbf{E}\xi_1$ и $\mathbf{D}\xi_1$ не существуют. Из (6) и (8) получаем, что

$$m = \frac{\lambda T'(\lambda)}{T(\lambda)} - 1 = \frac{n}{N}, \quad \sigma^2 = \frac{\lambda^2 T''(\lambda)}{T(\lambda)} - m - m^2. \quad (9)$$

Положим

$$\sigma_{rr}^2 = p_r \left(1 - p_r - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2} p_r \right). \quad (10)$$

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 0$, а r выбрано так, что

$$\frac{N}{r^{3/2}} \left(\frac{\lambda}{r} \right)^r \rightarrow \infty, \quad N T_{r+2} \lambda^{r+1} \rightarrow \gamma,$$

где γ — некоторая неотрицательная постоянная. Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} = r\} \rightarrow e^{-\gamma}, \quad \mathbf{P}\{\eta_{(N)} = r + 1\} \rightarrow 1 - e^{-\gamma}.$$

Теорема 2. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow c$, а r выбрано так, что

$$\frac{N\beta}{r^{3/2}} \left(\frac{\lambda}{R} \right)^{r+1} \rightarrow \gamma,$$

где c, γ — некоторые положительные постоянные. Тогда для любого фиксированного $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r + k\} \rightarrow \exp\{-\gamma(\lambda_c/R)^{k+1}(1 - \lambda_c/R)^{-1}\},$$

где λ_c удовлетворяет равенству

$$\frac{\lambda_c T'(\lambda_c)}{T(\lambda_c)} = 1 + c.$$

Теорема 3. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$, $N/\sqrt{n} \rightarrow \infty$. Тогда для любого фиксированного z

$$\mathbf{P}\{\ln(R/\lambda)\eta_{(N)} - u \leq z\} \rightarrow e^{-e^{-z}},$$

где u выбрано так, что

$$N\beta \sqrt{\ln(R/\lambda)} u^{-3/2} e^{-u} = 1. \quad (11)$$

Теорема 4. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $2n/(b^2 R N^2) \rightarrow \gamma$, где γ — некоторая положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $z > 0$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)}/n \leq z\} \rightarrow \gamma^{3/2} \exp\left\{\frac{1}{2\gamma}\right\} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} I_s(z\gamma, \gamma),$$

где

$$I_0(u, v) = (v^3 \exp\{1/v\})^{-1/2},$$

$$I_s(u, v) = \int_{X_s(u, v)} \frac{\exp\{-1/(2(v - x_1 - \dots - x_s))\}}{(2\pi)^{s/2} (x_1 \dots x_s (v - x_1 - \dots - x_s))^{3/2}} dx_1 \dots dx_s,$$

$$X_s(u, v) = \{x_i \geq u, i = 1, \dots, s, x_1 + \dots + x_s \leq v\}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Теорема 5. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$. Тогда для любого фиксированного $z > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{2(n - \eta_{(N)})}{b^2 R N^2} \leq z\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z y^{-3/2} e^{-1/(2y)} dy.$$

Теорема 6. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 0$. Тогда для любого фиксированного $r \geq 2$ и целых неотрицательных k

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1}{k!} (Np_r)^k \exp\{-Np_r\} (1 + o(1))$$

равномерно относительно $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$ в любом фиксированном конечном интервале.

Теорема 7. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $N/\sqrt{n} \rightarrow \infty$, а $r \geq 2$ фиксировано и $N\lambda^r \rightarrow \infty$. Тогда для целых неотрицательных k

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = (\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N})^{-1} e^{-u_r^2/2} (1 + o(1))$$

равномерно относительно $u_r = (k - Np_r)/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале.

Это утверждение сохраняет силу, если $r = 0$, $n^2/N \rightarrow \infty$, и если $r = 1$, $n^3/N^2 \rightarrow \infty$.

Теорема 8. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $N/\sqrt{n} \leq C < \infty$. Тогда для фиксированного r и целых неотрицательных k

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = (2\pi Np_r(1 - p_r))^{-1/2} e^{-u_r^2/2} (1 + o(1))$$

равномерно относительно $u_r = (k - Np_r)/\sqrt{Np_r(1 - p_r)}$ в любом фиксированном конечном интервале.

Теорема 9. Пусть $N, n, r \rightarrow \infty$. Тогда для целых неотрицательных k

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1}{k!} (Np_r)^k \exp\{-Np_r\} (1 + o(1))$$

равномерно относительно $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$ в любом фиксированном конечном интервале.

Сравнив теоремы 1–9 с результатами работ [1, 2, 3], легко убедиться, что предельные распределения рассматриваемых характеристик случайных лесов с помеченными и непомеченными вершинами отличаются только значениями параметров. Из теоремы 5 следует также, что при $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$ в случайном непомеченном лесе возникает гигантское дерево в смысле определения, данного в [6], это дерево имеет объем $n + o(n)$.

Пусть r — целое неотрицательное число. Введем независимые вспомогательные случайные величины $\xi_i^{(j)} = \xi_i^{(j)}(r)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, 2$, такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(1)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \leq r\}, \quad (12)$$

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(2)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \neq r\}. \quad (13)$$

Положим

$$\zeta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N, \quad \zeta_N^{(j)} = \xi_1^{(j)} + \dots + \xi_N^{(j)}, \quad j = 1, 2, \quad P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}.$$

Для доказательства теорем 1–9 удобно использовать следующие леммы 1 и 2, справедливые, как показано в [5], в условиях обобщенной схемы размещения и являющиеся следствиями соотношения (7).

Лемма 1. Справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(1)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Лемма 2. Справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(2)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Леммы 1 и 2 показывают, что для получения перечисленных выше результатов достаточно изучить предельное поведение бинома $(1 - P_r)^N$, сумм независимых случайных величин $\xi_N, \xi_N^{(j)}, j = 1, 2$, и биномиальных вероятностей $\binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k}$. Ниже приводятся вспомогательные утверждения (леммы 3–11) об асимптотике указанных величин, а затем с их помощью доказываются теоремы 1–9.

Лемма 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда

$$NP_{r-1} \rightarrow \infty, \quad NP_r \rightarrow \gamma, \quad NP_{r+1} \rightarrow 0.$$

Доказательство. Из (2) и (8) следует, что $\lambda \rightarrow 0$, поэтому из (1) и (6) находим, что

$$P_r = T_{r+2} \lambda^{r+1} (1 + o(1)).$$

Отсюда непосредственно следуют утверждения леммы 3.

Лемма 4. Если выполнены условия теоремы 2, то при любом фиксированном k

$$NP_{r+k} \rightarrow \gamma (\lambda_c/R)^{k+1} (1 - \lambda_c/R)^{-1}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$NP_{r+k} = N \mathbf{P}\{\xi_1 = r\} \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi_1 = r + k + s\} / \mathbf{P}\{\xi_1 = r\}.$$

Нетрудно видеть, что $r \rightarrow \infty$, поэтому из (5) и (6) следует, что

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi_1 = r + k + s\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 = r\}} = \frac{T_{r+k+s+1} \lambda^{k+s}}{T_{r+1}} = (\lambda/R)^{k+s} (1 + O(s/r)),$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = r\} = \frac{\beta}{r^{3/2}} \left(\frac{\lambda}{R}\right)^{r+1} (1 + o(1)).$$

Из этих соотношений и (8) следует утверждение леммы 4.

Лемма 5. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что

$$n/N \rightarrow \infty, \quad N/\sqrt{n} \rightarrow \infty, \quad r = (u + z)/\ln(R/\lambda) + O(1),$$

где z — фиксированное число, а u задано соотношением (11). Тогда

$$NP_r \rightarrow e^{-z}.$$

Доказательство. Из (1)–(3) и (8) следует, что в условиях леммы $\lambda \rightarrow R$. Из (3), (5) и (6) получаем соотношение

$$P_r = \beta(1 + o(1)) \sum_{s=1}^{\infty} (r + s)^{-3/2} \exp\{-(r + s) \ln(R/\lambda)\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_1^{\infty} (r + y)^{-3/2} \exp\{-(r + y) \ln(R/\lambda)\} dy < \sum_{s=1}^{\infty} (r + s)^{-3/2} \exp\{-(r + s) \ln(R/\lambda)\} < \int_0^{\infty} (r + y)^{-3/2} \exp\{-(r + y) \ln(R/\lambda)\} dy,$$

поэтому

$$\begin{aligned} P_r &= \beta(1 + o(1)) \int_r^\infty y^{-3/2} \exp\{-y \ln(R/\lambda)\} dy + O\left(\int_r^{r+1} y^{-3/2} \exp\{-y \ln(R/\lambda)\} dy\right) \\ &= \beta \sqrt{\ln(R/\lambda)}(1 + o(1)) \\ &\quad \times \int_{r \ln(R/\lambda)}^\infty y^{-3/2} e^{-y} dy + O\left(\sqrt{\ln(R/\lambda)} \int_{r \ln(R/\lambda)}^{(r+1) \ln(R/\lambda)} y^{-3/2} e^{-y} dy\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Из (4) и (8) следует, что

$$\lambda = R - (bRN/(2n))^2(1 + o(1)), \quad (15)$$

поэтому из (11) нетрудно получить, что в условиях леммы $u \rightarrow \infty$. Отсюда, из (14), (15) и соотношения

$$\int_x^\infty y^h e^{-y} dy = x^h e^{-x}(1 + o(1)),$$

справедливого при $x \rightarrow \infty$ и фиксированном h , находим, что

$$P_r = \beta \sqrt{\ln(R/\lambda)} u^{-3/2} e^{-(u+z)}(1 + o(1)). \quad (16)$$

Отсюда и из (11) получаем, что $NP_r \rightarrow e^{-z}$.

Лемма 6. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$ и $r = n + o(n)$. Тогда $NP_r \rightarrow 0$.

Доказательство. Из (3), (5) и (6) следует, что

$$P_r = \beta(1 + o(1)) \sum_{s=1}^\infty (r + s + 1)^{-3/2}.$$

Полагая $y = (r + s + 1)/N^2$ и заменяя суммирование интегрированием, получаем, что

$$NP_r = \beta \int_A^\infty y^{-3/2} dy + \varepsilon,$$

где выбором достаточно больших N, n величину A можно сделать сколь угодно большой, а ε сколь угодно малой. Отсюда следует утверждение леммы 6.

Для нахождения асимптотики вероятностей, входящих в правые части утверждений лемм 1 и 2, нужно установить локальную сходимость распределений сумм $\xi_N, \xi_N^{(j)}$, $j = 1, 2$, к предельным законам. Однако, из (8) видно, что при $N/\sqrt{n} \rightarrow \infty$ слагаемые в этих суммах образуют схемы серий. Для сумм такого вида, встречающихся при использовании обобщенной схемы размещения, во многих случаях справедливы доказанные в [8, 9, 10] локальные предельные теоремы. Ниже, в леммах 7–9, приведены некоторые результаты этих работ, которые будут полезны далее при доказательстве теорем.

Пусть $v_1, v_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные целочисленные неотрицательные случайные величины такие, что

$$\mathbf{P}\{v_1 = k\} = \frac{d_k \theta^k}{k! B(\theta)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

где $d_0, d_1 > 0$, а ряд

$$B(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k \theta^k}{k!}$$

имеет радиус сходимости $H > 0$. Нетрудно видеть, что

$$a = \mathbf{E}v_1 = \frac{\theta B'(\theta)}{B(\theta)},$$

$$D^2 = \mathbf{D}v_1 = \frac{\theta^2 B''(\theta)}{B(\theta)} + \frac{\theta B'(\theta)}{B(\theta)} - \frac{\theta^2 (B'(\theta))^2}{(B(\theta))^2}.$$

Введем обозначение

$$P_N(n) = \mathbf{P}\{v_1 + \dots + v_N = n\}.$$

Лемма 7. Пусть $N \rightarrow \infty$, $\theta = \theta(N) \rightarrow 0$, $\theta N \rightarrow \infty$. Тогда

$$D\sqrt{N} P_N(n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(n - aN)^2}{2D^2 N}\right\} \rightarrow 0$$

равномерно относительно целых неотрицательных n .

Лемма 8. Пусть $N \rightarrow \infty$ и существуют положительные постоянные θ_0, θ_1 такие, что параметр $\theta = \theta(N)$ меняется так, что $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 < H$. Тогда

$$D\sqrt{N} P_N(n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(n - aN)^2}{2D^2 N}\right\} \rightarrow 0$$

равномерно относительно целых неотрицательных n .

Замечание 1. Нетрудно видеть, что если $d_0 = 0$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, то леммы 7 и 8 сохраняют силу. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно случайные величины $v_1, v_2, \dots$ заменить на $v_1 - 1, v_2 - 1, \dots$, а a на $a - 1$.

Замечание 2. В [9] показано, что леммы 7 и 8 сохраняют силу, если $d_0 > 0$, $d_1 = 0$, $d_2 > 0$, $\theta^3 N \rightarrow \infty$.

В следующей лемме мы будем предполагать, что $d_0 > 0$, $d_1 \geq 0$, а максимальный шаг распределения (17) равен единице.

Лемма 9. Пусть $N \rightarrow \infty$ и при $k \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{v_1 = k\} = Ck^{-\delta}(1 + o(1)),$$

где C — некоторая положительная постоянная, $1 < \delta < 3$, а $\theta = \theta(N) \rightarrow H$ так, что

$$\mathbf{E}(v_1 - a)^4 / D^4 N \rightarrow 0.$$

Тогда

$$D\sqrt{N} P_N(n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(n - aN)^2}{2D^2 N}\right\} \rightarrow 0$$

равномерно относительно целых неотрицательных n .

В случае, когда $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$, мы полагаем $\lambda = R$, следовательно, при оценке вероятности $\mathbf{P}\{\xi_N = n\}$, а также вероятности $\mathbf{P}\{\xi_N^{(1)} = n\}$ (см. леммы 1 и 2) в случае фиксированного r схема серий не возникает, и можно использовать следующий результат из [11].

Лемма 10. Пусть $v_1, v_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин, имеющих функцию распределения, принадлежащую области притяжения устойчивого закона с плотностью распределения $g(x)$ и показателем α , $\alpha \neq 1, 2$. Пусть при $k \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{v_1 = k\} = Ck^{-(1+\alpha)}(1 + o(1)),$$

где C — некоторая положительная постоянная. Тогда при $nN^{-1/\alpha} \rightarrow \infty$

$$P_N(n) = N^{-1/\alpha} g(nN^{-1/\alpha})(1 + o(1)).$$

При $r \rightarrow \infty$ слагаемые, входящие в суммы $\xi_N^{(1)}$ и $\xi_{N-k}^{(2)}$, образуют схемы серий, поэтому для оценки соответствующих вероятностей докажем следующую лемму.

Лемма 11. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) Если $r = n - zb^2RN^2/2$, где z — некоторая положительная постоянная, то

$$\mathbf{P}\{\xi_N^{(1)} = n\} = \frac{N\beta}{\sqrt{2\pi}n^{3/2}} \int_z^\infty y^{-3/2} e^{-1/(2y)} dy (1 + o(1)).$$

(2) Если $r \rightarrow \infty$, $S = N(1 - p_r + o(p_r))$, $z = 2n/(b^2RN^2)$, то

$$\frac{b^2RN^2}{2} \mathbf{P}\left\{\frac{2\xi_S^{(2)}}{b^2RN^2} = z\right\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi}z^3}.$$

Доказательство. Мы будем доказывать оба утверждения леммы 11 одновременно. Для этого обозначим рассматриваемые суммы через $\xi_S^{(j)}$, где $S = N$ при $j = 1$, а при $j = 2$ значение S указано в утверждении 2. Символами $C_1, C_2, \dots$ будем обозначать некоторые положительные постоянные.

Представим вероятность $\mathbf{P}\{\xi_S^{(j)} = n\}$ в виде суммы

$$\mathbf{P}\{\xi_S^{(j)} = n\} = P_1^{(j)} + SP_2^{(j)} + P_3^{(j)}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} P_1^{(j)} &= \mathbf{P}\{\xi_S^{(j)} = n, \xi_i^{(j)} \leq \gamma n, i = 1, \dots, S\}, \\ P_2^{(j)} &= \mathbf{P}\{\xi_S^{(j)} = n, \xi_i^{(j)} \leq \gamma n, i = 1, \dots, S-1, \xi_N^{(j)} > \gamma n\}, \\ P_3^{(j)} &= \mathbf{P}\left\{\xi_S^{(j)} = n, \bigcup_{i \neq k} (\xi_i^{(j)} > \gamma n, \xi_k^{(j)} > \gamma n)\right\}, \\ \gamma &= (S^2/n)^{1/6}. \end{aligned} \quad (19)$$

Оценивая последовательно вероятности $P_1^{(j)}$, $P_2^{(j)}$, $P_3^{(j)}$, мы увидим ниже, что основной вклад в сумму (18) дает второе слагаемое.

Рассмотрим $P_1^{(j)}$. Положим

$$Q(\omega) = \sum_{k \leq \gamma n} \exp\{\omega k\} \mathbf{P}\{\xi_1^{(j)} = k\}. \quad (20)$$

Из (5), (6), (12), (13) и равенства $\lambda = R$ нетрудно получить следующее соотношение, справедливое при достаточно больших l :

$$\sum_{k \leq l} k \mathbf{P}\{\xi_1^{(j)} = k\} \leq C_1 \sum_{k \leq l} k^{-1/2} \leq C_2 \sqrt{l}. \quad (21)$$

Аналогично,

$$\sum_{k > l} \mathbf{P}\{\xi_1^{(j)} = k\} \leq C_3 \int_l^\infty y^{-3/2} dy = 2C_3 l^{-1/2}. \quad (22)$$

Поскольку $S/\sqrt{n} \rightarrow 0$, из (19) следует, что

$$(\gamma n)^{-1/2} = o(S^{-1}). \quad (23)$$

Отсюда и из (20)–(22) получаем соотношение

$$Q(1/(\gamma n)) = 1 + o(S^{-1}). \quad (24)$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\tilde{\xi}_1^{(j)}, \dots, \tilde{\xi}_S^{(j)}$, имеющие следующее распределение вероятностей:

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(j)} = k\} = \exp\{k/(\gamma n)\} \mathbf{P}\{\xi_1^{(j)} = k\} / Q(1/(\gamma n)),$$

где $k \leq \gamma n$. Положим

$$\tilde{\xi}_S^{(j)} = \tilde{\xi}_1^{(j)} + \dots + \tilde{\xi}_S^{(j)}.$$

Легко видеть, что

$$P_1^{(j)} = Q^S(1/(\gamma n)) e^{-1/\gamma} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(j)} = n\}. \quad (25)$$

Докажем, что при достаточно больших n

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(j)} = n\} \leq C_4 S^{-2}. \quad (26)$$

Обозначим через $\tilde{\varphi}_j(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\tilde{\xi}_1^{(j)}$. По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(j)} = n\} = \frac{1}{\pi b^2 R S^2} \int_{-\pi b^2 R S^2/2}^{\pi b^2 R S^2/2} e^{-itv} \left(\tilde{\varphi}_j \left(\frac{2t}{b^2 R S^2} \right) \right)^S dt, \quad (27)$$

где $v = 2n/(b^2 R S^2)$. Рассмотрим выражение

$$|\tilde{\varphi}_j(t)|^S = \left| \frac{Q(1/(\gamma n) + it)}{Q(1/(\gamma n))} \right|^S. \quad (28)$$

Если $k \leq \gamma n$, то

$$\exp \left\{ \frac{k}{\gamma n} \right\} \leq 1 + \frac{2k}{\gamma n},$$

поэтому из (20), (21) и (23) нетрудно получить, что

$$\left| Q \left(\frac{1}{\gamma n} + it \right) \right| \leq |\tilde{\varphi}_j(t)| + \sum_{k > \gamma n} \mathbf{P}\{\xi_1^{(j)} = k\} + o(S^{-1}).$$

Отсюда и из (22), (23) следует неравенство

$$\left| Q \left(\frac{1}{\gamma n} + it \right) \right| \leq |\tilde{\varphi}_j(t)| + o(S^{-1}). \quad (29)$$

Обозначим через $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, соответственно, характеристические функции случайных величин ξ_1 , $\xi_1^{(1)}$, $\xi_1^{(2)}$. Используя (1), (3), (6), нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= T(Re^{it})/e^{it}, \\ \varphi_1(t) &= \frac{\varphi(t) - \sum_{k=r+1}^{\infty} e^{itk} p_k}{1 - P_r}, \\ \varphi_2(t) &= \frac{\varphi(t) - e^{itr} p_r}{1 - p_r}. \end{aligned} \quad (30)$$

Используя эти равенства, несложно показать, что при любом фиксированном t справедливы неравенства $|\varphi_j(t)| \geq C_5$, $j = 1, 2$, поэтому из (24), (28) и (29) вытекает, что

$$|\tilde{\varphi}_j(t)|^S \leq C_6 |\varphi_j(t)|^S. \quad (31)$$

Учитывая (4) и (30), получаем, что при $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \exp\{-b\sqrt{-Rit} + o(\sqrt{t})\} \\ &= \exp\{-b\sqrt{R|t|/2}(1 - it/|t|) + o(\sqrt{t})\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда находим, что при $|t| \leq \varepsilon S^2$ и достаточно малом ε

$$|\varphi(2t/(b^2 RS^2))| \leq \exp\{-C_7 \sqrt{|t|}/S\}. \quad (33)$$

Неравенства (22), (30) и (33) при $j = 1$ приводят к оценке

$$|\varphi_1(2t/(b^2 RS^2))|^S \leq C_8 \exp\{-C_9 \sqrt{|t|}\}. \quad (34)$$

В [7] показано, что если

$$2|t|r^2/(b^4 R^2) \leq 1, \quad (35)$$

то

$$|\varphi_2(2t/(b^2 R))| \leq |\varphi(2t/(b^2 R))|^{1/2}, \quad (36)$$

а если

$$b^4 R^2 N^2 / (2r^2) < |t| \leq \varepsilon N^2, \quad (37)$$

то при достаточно больших N и достаточно малом ε

$$\left| \varphi_2 \left(\frac{2t}{b^2 R N^2} \right) \right|^S \leq \exp \left\{ S \left(-\frac{C_{10} \sqrt{|t|}}{N} + \frac{C_{11}}{r^{3/2}} \right) \right\}. \quad (38)$$

Если $\varepsilon < |t| \leq \pi$, то, как хорошо известно, $|\varphi(t)| \leq e^{-C_{12}}$, поэтому из (30) несложно получить, учитывая соотношение $r \rightarrow \infty$, что при $\varepsilon S^2 < |t| \leq \pi b^2 R S^2 / 2$

$$|\varphi_j(2t/(b^2 R S^2))|^S \leq e^{-C_{13}}. \quad (39)$$

Представим интеграл, стоящий в правой части (27), в виде суммы двух интегралов, области интегрирования которых определяются неравенствами $|t| \leq \varepsilon S^2$ и $\varepsilon S^2 < |t| \leq \pi b^2 R S^2 / 2$, причем для $j = 2$ область интегрирования первого интеграла можно разбить на две части в соответствии с (35) и (37). Тогда, используя (34), (39), (36) и (38), получаем (26). Из (19), (24)–(26) следует, что

$$P_1^{(j)} \leq C_{14} S^{-2} e^{-1/\gamma} = o(S/n^{3/2}). \quad (40)$$

Оценим $P_2^{(j)}$. Очевидно, что

$$P_2^{(j)} = \sum_{n-q_j \leq k \leq n(1-\gamma)} \mathbf{P}\{\xi_S^{(j)} = n-k\} \times \mathbf{P}\{\xi_1^{(j)} + \dots + \xi_{S-1}^{(j)} = k, \xi_i^{(j)} \leq \gamma n, i = 1, \dots, S-1\}, \quad (41)$$

где $q_1 = r$, $q_2 = n$.

Введем вспомогательные случайные величины $\xi_i^{(j)}(\gamma n)$, $i = 1, \dots, S$, $j = 1, 2$, такие, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_i^{(1)}(\gamma n) = k\} &= \mathbf{P}\{\xi_i = k \mid \xi_i \leq \gamma n\}, \\ \mathbf{P}\{\xi_i^{(2)}(\gamma n) = k\} &= \mathbf{P}\{\xi_i = k \mid \xi_i \leq \gamma n, \xi_i \neq r\}, \end{aligned} \quad (42)$$

пусть, кроме того,

$$\xi_S^{(j)}(\gamma n) = \xi_1^{(j)}(\gamma n) + \dots + \xi_{S-1}^{(j)}(\gamma n).$$

Используя (22), (41) и (42), нетрудно получить, что

$$P_2^{(j)} = (1 + o(1)) \sum_{n-q_i \leq k < n(1-\gamma)} \mathbf{P}\{\xi_S^{(j)} = n-k\} \mathbf{P}\{\xi_{S-1}^{(j)}(\gamma n) = k\}. \quad (43)$$

Обозначим через $\varphi^{(\gamma n)}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\xi_1^{(1)}(\gamma n)$. Используя (6), (19), (22), аналогично (32), находим, что при любом фиксированном t

$$(\varphi^{(\gamma n)}(2t/(b^2 R S^2)))^{S-1} \rightarrow \exp\{-\sqrt{|t|}(1 - i t/|t|)\}. \quad (44)$$

Последнее выражение, как известно (см., например, [5]), является характеристической функцией устойчивого закона с показателем $\alpha = 1/2$, имеющего плотность $(2\pi x^3 \exp\{1/x\})^{-1/2}$. Отсюда и из (44) следует, что

$$\mathbf{P}\{\xi_{S-1}^{(1)}(\gamma n) \leq yb^2 RS^2/2\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y x^{-3/2} e^{-1/(2x)} dx. \quad (45)$$

Покажем, что при достаточно больших n и $j = 1, 2$

$$\mathbf{P}\{\xi_{S-1}^{(j)}(\gamma n) > \gamma^{-1} N^2\} \leq C_{15} \gamma^{1/2}. \quad (46)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_{S-1}^{(j)}(\gamma n) > \gamma^{-1} N^2\} \\ \leq (S-1)\mathbf{P}\{\xi_1^{(j)} > \gamma^{-1} N^2\} + G_j^{S-1} \mathbf{P}\{\xi_{S-1}^{(j)}(\gamma^{-1} N^2) > \gamma^{-1} N^2\}, \end{aligned} \quad (47)$$

где, в соответствии с (42), $\gamma^{-1} N^2$ стоит вместо γn , $G_1 = (1 - P_{\gamma^{-1} N^2})/(1 - P_{\gamma n})$, $G_2 = 1$. Заметим, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(j)}(\gamma n) > \gamma^{-1} N^2\} = \sum_{k > \gamma^{-1} N^2} \mathbf{P}\{\xi_1^{(j)}(\gamma n) = k\} \leq C_{16} \mathbf{P}\{\xi_1^{(j)} > \gamma^{-1} N^2\}.$$

Отсюда и из (22) получаем неравенство

$$(S-1)\mathbf{P}\{\xi_1^{(j)}(\gamma n) > \gamma^{-1} N^2\} \leq C_{17} \gamma^{1/2}. \quad (48)$$

С помощью (21) находим оценку

$$\mathbf{E} \xi_1^{(j)}(\gamma^{-1} N^2) \leq C_{18} \sum_{k < \gamma^{-1} N^2} k \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} \leq C_{19} \gamma^{-1/2}$$

и, применяя неравенство Чебышёва, видим, что

$$\mathbf{P}\{\xi_{S-1}^{(j)}(\gamma^{-1} N^2) > \gamma^{-1} N^2\} \leq C_{20} \gamma^{1/2}. \quad (49)$$

В силу (22) справедливо соотношение $G_1^{S-1} = 1 + o(1)$, поэтому из (47)–(49) следует (46).

Учитывая (43), представим вероятность $P_2^{(j)}$ в виде суммы

$$P_2^{(j)} = L_1^{(j)} + L_2^{(j)} + L_3^{(j)}, \quad (50)$$

где

$$L_i^{(j)} = (1 + o(1)) \sum_{K_i} \mathbf{P}\{\xi_S^{(j)} = n - k\} \mathbf{P}\{\xi_{S-1}^{(j)}(\gamma n) = k\}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$K_1 = \{k: n - q_i \leq k \leq \gamma^{-1} N^2\},$$

$$K_2 = \{k: \gamma^{-1} N^2 < k \leq n(1 - \gamma^{1/6})\},$$

$$K_3 = \{k: n(1 - \gamma^{1/6}) < k < n(1 - \gamma)\}.$$

Используя (5), (6), (12), (13) и (22), нетрудно получить, что при выполнении условий леммы

$$L_1^{(j)} = \beta n^{-3/2} (1 + o(1)) \mathbf{P}\{n - q_j \leq \xi_{S-1}^{(j)}(\gamma n) \leq \gamma^{-1} N^2\}.$$

Отсюда и из (45), (46) находим, полагая $j = 1$, $q_1 = r$, $r = n - zb^2 RN^2/2$, что

$$L_1^{(1)} = \beta (2\pi n^3)^{-1/2} (1 + o(1)) \int_z^\infty y^{-3/2} e^{-1/(2y)} dy, \quad (51)$$

а в случае $j = 2$, $q_2 = n$ и $r \rightarrow \infty$

$$L_1^{(2)} = \beta n^{-3/2} (1 + o(1)). \quad (52)$$

Если $k \in K_2$, то из (5), (6), (12), (13) следует неравенство

$$\mathbf{P}\{\xi_S^{(j)} = n - k\} \leq C_{21} (n\gamma^{1/6})^{-3/2},$$

поэтому из (46) вытекает, что

$$L_2^{(j)} \leq C_{22} (n\gamma^{1/6})^{-3/2} \mathbf{P}\{\xi_{S-1}^{(j)}(\gamma n) > \gamma^{-1} N^2\} = o(n^{-3/2}). \quad (53)$$

Если $k \in K_3$, то, рассуждая аналогично, находим, что

$$\mathbf{P}\{\xi_S^{(j)} = n - k\} \leq C_{23} (n\gamma)^{-3/2}, \quad (54)$$

откуда,

$$L_3^{(j)} \leq C_{24} (n\gamma)^{-3/2} \mathbf{P}\{\xi_{S-1}^{(j)}(\gamma n) > n(1 - \gamma^{1/6})\}. \quad (55)$$

Оценивая $\mathbf{E}\xi_1^{(j)}(\gamma n)$ и используя (21), (55) и неравенство Чебышёва, нетрудно получить соотношение

$$\mathbf{P}\{\xi_{S-1}^{(j)}(\gamma n) > n(1 - \gamma^{1/6})\} \leq C_{25} S(\gamma/n)^{1/2},$$

поэтому из (55) следует, что

$$L_3^{(j)} \leq C_{26} S/(n^2 \gamma) = o(n^{-3/2}).$$

Отсюда и из (50)–(53) видим, что

$$P_2^{(j)} = L_1^{(j)} (1 + o(1)). \quad (56)$$

Оценим, наконец, $P_3^{(j)}$. Легко заметить, что

$$P_3^{(j)} = S(S-1)2^{-1} \sum_{k < n(1-2\gamma)} \mathbf{P}\{\xi_{S-2}^{(j)} = k\} \mathbf{P}\{\xi_{S-1}^{(j)} + \xi_S^{(j)} = n - k, \xi_{S-1}^{(j)} > \gamma n, \xi_S^{(j)} > \gamma n\}.$$

Отсюда следует, что

$$P_3^{(j)} \leq C_{27} S^2 \sum_{k < n(1-2\gamma)} \mathbf{P}\{\xi_{S-2}^{(j)} = k\} \sum_K \mathbf{P}\{\xi_{S-1}^{(j)} = s\} \mathbf{P}\{\xi_S^{(j)} = n - k - s\}, \quad (57)$$

где $K = \{s: \gamma n < s < n(1 - \gamma) - k\}$. Используя (22) и (54), получаем, что

$$\sum_K \mathbf{P}\{\xi_{S-1}^{(j)} = s\} \mathbf{P}\{\xi_S^{(j)} = n - k - s\} \leq C_{28}(\gamma n)^{-3/2} \mathbf{P}\{\xi_S^{(j)} > \gamma n\} < C_{29}(\gamma n)^{-2},$$

и, в силу (57),

$$P_3^{(j)} \leq C_{30} S^2 (\gamma n)^{-2} = o(S/n^{3/2}).$$

Отсюда, из (18), (40), (51)–(53), (56) и известного (см., например, [4]) равенства

$$\beta = b\sqrt{R}/(2\sqrt{\pi}) \quad (58)$$

получаем оба утверждения леммы 11.

Теперь мы можем доказать сформулированные выше теоремы.

Доказательство теоремы 1. Из леммы 3 следует, что

$$(1 - P_{r-1})^N \rightarrow 0, \quad (1 - P_r)^N \rightarrow e^{-\gamma}, \quad (1 - P_{r+1})^N \rightarrow 1. \quad (59)$$

Положим

$$m_1 = \mathbf{E}\xi_1^{(1)}, \quad \sigma_1^2 = \mathbf{D}\xi_1^{(1)}.$$

Используя (6) и (12), нетрудно показать, что

$$m_1 = \frac{m - \sum_{k=r+1}^{\infty} k p_k}{1 - P_r}, \quad \sigma_1^2 = \frac{\sigma^2 + m^2 - \sum_{k=r+1}^{\infty} k^2 p_k}{1 - P_r} - m_1^2, \quad (60)$$

где m и σ^2 определены в (9). Из (2) и (8) легко видеть, что

$$\lambda = (n/N)(1 + o(1)). \quad (61)$$

Отсюда и из (6), (9) следует, что для сумм ζ_N и $\xi_N^{(1)}$ выполнены условия леммы 7, поэтому

$$\mathbf{P}\{\xi_N^{(1)} = n\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma_1 \sqrt{2\pi N}} \exp \left\{ -\frac{(n - m_1 N)^2}{2\sigma_1^2 N} \right\}, \quad (62)$$

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = (\sigma \sqrt{2\pi N})^{-1} (1 + o(1)). \quad (63)$$

Из этих соотношений и (9), (60), (61) вытекает, как нетрудно проверить, что

$$\mathbf{P}\{\xi_N^{(1)} = n\} / \mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \rightarrow 1. \quad (64)$$

Из леммы 1, (59) и (64) получаем, что

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r - 1\} \rightarrow 0, \quad \mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} \rightarrow e^{-\gamma}, \quad \mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r + 1\} \rightarrow 1,$$

откуда и следует утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Из (8) нетрудно получить, что $0 < C_1 \leq \lambda \leq C_2 < R$, поэтому для сумм ζ_N и $\xi_N^{(1)}$ выполнены условия леммы 8, из которой вытекают соотношения (62), (63). Используя (9), (60), легко обнаружить, что

$$(n - m_1 N)^2 / (\sigma_1^2 N) = O(r^2 / N),$$

а выбор r обеспечивает выполнение соотношения $r^2 / N \rightarrow 0$. Поэтому, принимая во внимание (60), из (62), (63) получим (64). Утверждение теоремы 2 следует из (64) и лемм 1, 4.

Доказательство теоремы 3. С помощью (3), (4), (6), (9) и (15) нетрудно установить, что

$$\sigma^2 = \frac{2}{b^2 R^3} \left(\frac{n}{N} \right)^3, \quad \mathbf{E}(\xi_1 - m)^4 = O((n/N)^7). \quad (65)$$

Это значит, с учетом (5), что для суммы ζ_N выполнены условия леммы 9, поэтому справедливо соотношение (63). Заметим, что $NP_r \rightarrow e^{-z}$ в силу леммы 5. В [10] показано, что этого условия достаточно, чтобы лемма 9 была справедлива и для суммы $\zeta_N^{(1)}$, значит, равенство (62) имеет место и в этом случае. Используя (3), (4), (6), (9), (12) и (15), можно установить, что

$$\sigma_1^2 = \sigma^2(1 + o(1)). \quad (66)$$

По аналогии с (16), нетрудно показать, что

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} kp_k = \beta \sqrt{\ln(R/\lambda)} u^{-1/2} e^{-(u+z)} (1 + o(1)).$$

Отсюда и из соотношений $P_r = O(N^{-1})$, (11), (16), (60), (65), (66) следует, что $(n - m_1 N)^2 / (\sigma_1^2 N) \rightarrow 0$, поэтому из (62), (63) получаем (64). Для завершения доказательства осталось применить леммы 1 и 5.

Теорема 4 доказана в [7].

Доказательство теоремы 5. Обозначим через $\psi(t)$ характеристическую функцию случайной величины $2\zeta_N / (b^2 R N^2)$. Из (32) следует, что

$$\psi(t) = \varphi^N(2t/(b^2 R N^2)) \rightarrow \exp\{-\sqrt{-2it}\}, \quad (67)$$

а последнее выражение, как уже указывалось при доказательстве леммы 11, является характеристической функцией устойчивого закона с показателем $\alpha = 1/2$, имеющего плотность $(2\pi x^3 \exp\{1/x\})^{-1/2}$. Отсюда и из (3), (5), (6) получаем, что для суммы ζ_N выполнены условия леммы 10, поэтому, учитывая (58), получаем, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = \frac{b\sqrt{R}}{2\sqrt{\pi}} \frac{N}{n^{3/2}} (1 + o(1)) = \frac{\beta N}{n^{3/2}} (1 + o(1)). \quad (68)$$

Отсюда и из лемм 1, 6, 11 очевидным образом следует утверждение теоремы 5.

Доказательство теоремы 6. Из условий теоремы находим, что

$$k = Np_r + u\sqrt{Np_r}, \quad (69)$$

где $|u| \leq C < \infty$. Нетрудно видеть, что для суммы $\zeta_{N-k}^{(2)}$ выполнены условия леммы 7, поэтому

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(2)} = n - kr\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma_2 \sqrt{2\pi(N-k)}} \exp\left\{-\frac{(n - kr - m_2(N-k))^2}{2\sigma_2^2(N-k)}\right\}, \quad (70)$$

где

$$m_2 = \mathbf{E}\xi_1^{(2)} = \frac{m - rp_r}{1 - p_r}, \quad \sigma_2^2 = \mathbf{D}\xi_1^{(2)} = \frac{\sigma^2}{(1 - p_r)^2} \left(1 - p_r - \frac{(m - r)^2}{\sigma^2} p_r\right). \quad (71)$$

Используя (2), (6), (9), (61), (69) и (71), нетрудно проверить, что

$$\frac{(n - kr - m_2(N - k))^2}{\sigma_2^2(N - k)} \rightarrow 0, \quad \sigma_2^2 = \sigma^2(1 + o(1)), \quad (72)$$

поэтому из (63), (70) вытекает соотношение

$$\mathbf{P}\{\xi_{N-k}^{(2)} = n - kr\} / \mathbf{P}\{\xi_N = n\} \rightarrow 1. \quad (73)$$

Поскольку $p_r \rightarrow 0$, для рассматриваемых значений k , как известно, можно использовать пуассоновское приближение биномиального распределения

$$\binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} = \frac{(Np_r)^k}{k!} e^{-Np_r} (1 + o(1)). \quad (74)$$

Утверждение теоремы 6 следует отсюда, из леммы 2 и соотношения (73).

Доказательство теоремы 7. Заметим, что

$$k = Np_r + u_r \sigma_{rr} \sqrt{N}, \quad (75)$$

где $|u_r| \leq C < \infty$. Хорошо известно, что при $Np_r(1 - p_r) \rightarrow \infty$ равномерно относительно таких значений u_r

$$\binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi Np_r(1 - p_r)}} \exp \left\{ -\frac{(k - Np_r)^2}{2Np_r(1 - p_r)} \right\}. \quad (76)$$

При доказательстве теорем 1, 2 и 3 показано, что в условиях теоремы 7 выполнено соотношение (63). Пусть $r \geq 2$. Справедливость соотношения (70) в случае $n/N \leq C < \infty$ следует из лемм 7, 8, а в случае $n/N \rightarrow \infty$, $N/\sqrt{n} \rightarrow \infty$ это соотношение можно установить, используя (3), (4), (6), (9), (15), (65), (71) и лемму 9. Для завершения доказательства теоремы 7 при $r \geq 2$ теперь достаточно применить лемму 2, (9), (10), (63), (70), (71), (76).

Если $r = 0$ или $r = 1$, то доказательство проводится аналогично с учетом замечаний 1 и 2 к леммам 7 и 8, (61) и того, что в случае $r = 0$ соотношение $\lambda(N - k) \rightarrow \infty$ верно, если $n^2/N \rightarrow \infty$, а в случае $r = 1$ соотношение $\lambda^3(N - k) \rightarrow \infty$ выполняется при $n^3/N^2 \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 8. В случае $0 < C_1 \leq N/\sqrt{n} \leq C_2 < \infty$ теорема 8 доказана в [7]. Пусть $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$. Из (32) и (69) находим, что при фиксированных t

$$\begin{aligned} \varphi^{N-k}(2t/(b^2 RN^2)) &\rightarrow \exp\{-(1 - p_r)\sqrt{-2it}\}, \\ \left(1 + \frac{p_r}{1 - p_r} \left(1 - \varphi^{-1} \left(\frac{2t}{b^2 RN^2}\right) \exp \left\{ \frac{2itr}{b^2 RN^2} \right\}\right)\right)^{N-k} &\rightarrow \exp\{p_r \sqrt{-2it}\}. \end{aligned} \quad (77)$$

Пусть $\psi_r(t)$ — характеристическая функция случайной величины $2\xi_{N-k}^{(2)}/(b^2 RN^2)$. Из (30) и (77) следует, как нетрудно видеть, что

$$\psi_r(t) \rightarrow \exp\{-\sqrt{-2it}\}. \quad (78)$$

Последнее выражение является характеристической функцией устойчивого закона с показателем $\alpha = 1/2$. Это значит, что для суммы $\xi_{N-k}^{(2)}$ выполнены условия леммы 10. Из этой леммы и (68) получаем соотношение (73), и нам осталось применить лемму 2 и (76).

Доказательство теоремы 9. Если $N/\sqrt{n} \rightarrow \infty$, то, используя (2), (6), (8), (9), (69), (71), нетрудно убедиться, что выполнены условия лемм 7, 8, и с их помощью получить соотношения (63), (70), (72). Из этих соотношений следует, что при $r \rightarrow \infty$ выполняются (62), (73), и утверждение теоремы вытекает из леммы 2 и (74).

При $0 < C_1 \leq N/\sqrt{n} \leq C_2 < \infty$ теорема 9 доказана в [7].

Пусть $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$. Легко проверить, что соотношения (77), (78) справедливы и при $r \rightarrow \infty$, поэтому, как и при доказательстве теоремы 8, с помощью леммы 11 приходим к (73). Ясно, что $p_r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, поэтому из леммы 2, (73) и (74) получаем утверждение теоремы 9.

Список литературы

1. Павлов Ю. Л., Предельные теоремы для числа деревьев заданного объема в случайном лесе. *Матем. сб.* (1977) **103**, №3, 392–403.
2. Павлов Ю. Л., Асимптотическое распределение максимального объема дерева в случайном лесе. *Теория вероятностей и ее применения* (1977) **22**, №3, 523–533.
3. Павлов Ю. Л., Один случай предельного распределения максимального объема дерева в случайном лесе. *Матем. заметки* (1979) **25**, №5, 751–760.
4. Оттер Р. Число деревьев. В кн.: *Перечислительные задачи комбинаторного анализа*. Мир, Москва, 1979, с. 139–159.
5. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2004.
6. Колчин В. Ф., О существовании гигантской компоненты в схемах размещения частиц. *Обозрение прикладной и промышленной матем.* (2000) **7**, №1, 112–113.
7. Павлов Ю. Л., Предельные теоремы для объемов деревьев непомеченного графа случайного отображения. *Дискретная математика* (2004) **16**, №3, 63–75.
8. Колчин А. В., Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения. *Дискретная математика* (2003) **15**, №4, 148–157.
9. Казимиров Н. И., О некоторых условиях отсутствия гигантской компоненты в обобщенной схеме размещения. *Дискретная математика* (2002) **14**, №2, 107–118.
10. Казимиров Н. И., Об асимптотике больших компонент обобщенной схемы размещения. *Труды Института прикладных матем. исследований КарНЦ РАН* (2003) **4**, 61–76.
11. Ткачук С. Г., Локальные предельные теоремы, учитывающие большие отклонения, в случае предельных устойчивых законов. *Изв. АН Узб. ССР. Сер. физ.-матем. наук* (1973) **2**, 30–33.

Статья поступила 22.11.2004.