Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. С. Большакова, Число пересечений полных r -дольных графов, *Дискрет. матем.*, 2008, том 20, выпуск 1, 70–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm990>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 18:03:28

Число пересечений полных r -дольных графов

© 2008 г. Н. С. Большакова

Латинские квадраты C, D порядка n назовем псевдоортогональными, если любые две строки матриц C и D имеют в точности один общий элемент. Найдены условия существования семейств, состоящих из t псевдоортогональных латинских квадратов порядка n . Доказано, что число пересечений полного r -дольного графа $r\bar{K}_n$ равно n^2 тогда и только тогда, когда существует семейство, состоящее из $r-2$ попарно псевдоортогональных латинских квадратов порядка n . Доказано, что если $2 \leq r \leq \text{prols}(n, t) + 2$, $0 \leq m \leq 2^{n^2-n}$, где $\text{prols}(n)$ — наибольшее число t , для которого существует множество из t псевдоортогональных латинских квадратов порядка n , то число пересечений графа $r\bar{K}_n + K_m$ равно n^2 . Даны применения полученных результатов к вычислению числа пересечений некоторых графов.

1. Введение

Для графов мы будем придерживаться терминологии, принятой в книге Харари [1]. В частности, $\Gamma = \Gamma(V, E)$ — граф с множеством вершин V и множеством ребер E . Введем следующие обозначения, пусть $\bar{\Gamma}$ — дополнение графа Γ , K_n — полный граф с n вершинами, $\text{Chain}(n)$ — простая цепь с n вершинами, C_n — простой цикл с n вершинами.

Пусть никакие два графа $\Gamma_i = \Gamma(V_i, E_i)$ и $\Gamma_j = \Gamma(V_j, E_j)$, где $i \neq j$, не имеют общих вершин, $i, j = 1, 2, \dots, k$. Соединением графов $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ называется граф $\Gamma = \Gamma(V, E)$, который обозначается $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_k$ и имеет множество вершин $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, а множество ребер E определено следующими условиями:

- (а) любые две вершины $a \in V_i, b \in V_j$ смежны в графе Γ , если $i \neq j$,
- (б) любые две вершины $a, b \in V_i$ смежны в графе Γ , если a, b смежны в графе Γ_i ,
- (в) никакие другие вершины не являются смежными в графе Γ .

Два графа $\Gamma(V_1, E_1)$ и $\Gamma(V_2, E_2)$ изоморфны, если между множествами V_1 и V_2 существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность. Если $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_k$, где графы $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ изоморфны графу P , то пишем $\Gamma = kP$.

Пусть $r \geq 2$. Граф $\Gamma = \Gamma(V, E)$ называется полным r -дольным графом, если множество вершин V может быть разбито на r непустых подмножеств $V_1, V_2, \dots, V_r$ так, что никакие две вершины из одного подмножества не смежны, а любые две вершины из различных подмножеств смежны. Множества $V_1, V_2, \dots, V_r$ называются долями графа Γ . Если $|V_1| = n_1, |V_2| = n_2, \dots, |V_r| = n_r$, то граф Γ обозначается $K(n_1, n_2, \dots, n_r)$. Заметим, что

$$K(n_1, n_2, \dots, n_r) = \bar{K}_{n_1} + \bar{K}_{n_2} + \dots + \bar{K}_{n_r}.$$

Пусть $n_r \geq \dots \geq n_1 > 1$. Если в графе $K(n_1, n_2, \dots, n_r)$ существует s_i долей мощности i , где $i = 2, 3, \dots, n_r$, то

$$K(n_1, n_2, \dots, n_r) = s_2 \bar{K}_2 + s_3 \bar{K}_3 + \dots + s_{n_r} \bar{K}_{n_r}.$$

Для действительного числа a обозначим $[a]$ наибольшее целое, не превосходящее a . Как обычно, множество натуральных чисел будем обозначать $\mathbf{N}$.

Пусть U — конечное множество, 2^U — семейство всех подмножеств множества U . Граф Γ называется графом пересечений на множестве U , если существует инъекция $\varphi: V \rightarrow 2^U - \{\emptyset\}$ такая, что включение $\{a, b\} \in E$ равносильно соотношению $\varphi(a) \cap \varphi(b) \neq \emptyset$ для всех $a, b \in V$. Инъекцию φ будем называть кодированием графа пересечений Γ , а множество $\varphi(a)$ — кодом вершины a .

Числом пересечений графа Γ называется наименьшее число n такое, что граф Γ является графом пересечений на n -элементном множестве U . Обозначим $\text{nin}(\Gamma)$ число пересечений графа Γ . Первые результаты о графе пересечений и о числе пересечений графа были получены в работах [2] и [3].

В [4] найдена асимптотика при $r \rightarrow \infty$ числа пересечений полного r -дольного графа $r \bar{K}_2$,

$$\text{nin}(r \bar{K}_2) \sim \log_2 r.$$

В [5] доказано, что число пересечений графа $r \bar{K}_2$ равно наименьшему s такому, что

$$r \leq \binom{s-1}{[s/2]-1},$$

число пересечений графа $r \bar{K}_2 + K_m$ равно наименьшему s такому, что

$$m + r \leq 2^{s-1}, \quad r \leq \binom{s-1}{[s/2]-1}.$$

Пусть $A \subseteq V$. Обозначим $\langle A \rangle$ максимальный подграф графа Γ , множеством вершин которого является множество A . Две вершины смежны в $\langle A \rangle$ тогда и только тогда, когда они смежны в Γ . Кликой графа называется любой максимальный полный подграф. Если $\langle A \rangle$ — подграф графа Γ , то $\text{nin}(\langle A \rangle) \leq \text{nin}(\Gamma)$.

Будем говорить, что подграфы $\langle V_1 \rangle, \langle V_2 \rangle, \dots, \langle V_k \rangle$ покрывают граф Γ , если каждая вершина и каждое ребро графа Γ являются вершиной и ребром некоторого подграфа $\langle V_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, k$.

В [6] и [7] изучается число покрытий графа кликами. В [5] доказано, что если граф $\Gamma(V, E)$ обладает таким свойством, что для любых двух смежных вершин a, b найдется третья вершина c такая, что или c смежна с a и не смежна с b , или c смежна с b и не смежна с a , то число $\text{nin}(\Gamma)$ равно наименьшему числу клик, покрывающих граф. Граф $K(n_1, \dots, n_r)$ удовлетворяет данному условию, $\text{nin}(K(n_1, \dots, n_r))$ равно наименьшему числу клик, покрывающих граф.

Пусть $n_r \geq \dots \geq n_1 > 1$. Любые два ребра, соединяющие вершины из долей V_r и V_{r-1} , не могут лежать в одной клике. Поэтому $\text{nin}(K(n_1, \dots, n_r)) \geq n_r n_{r-1}$.

2. Псевдоортогональные латинские квадраты

Прямым произведением матриц $A = \|a_{ij}\|_{n \times n}$, $B = \|b_{ij}\|_{n \times n}$ будем называть матрицу $A \times B = \|(a_{ij}, b_{ij})\|_{n \times n}$.

Латинским квадратом порядка n с элементами из множества $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ будем называть $n \times n$ матрицу, каждая строка и каждый столбец которой есть перестановка элементов множества U . Теория латинских квадратов изложена в книгах [8, 9, 10].

Латинские квадраты A, B порядка n называются ортогональными, если каждый элемент множества U^2 — элемент матрицы $A \times B$.

Если латинские квадраты A, B порядка n ортогональны, то каждый элемент множества U^2 появляется в матрице $A \times B$ ровно один раз.

Латинские квадраты C, D порядка n назовем псевдоортогональными, если любые две строки матриц C и D имеют в точности один общий элемент. Другими словами, для любых индексов $i_1, i_2 = 1, 2, \dots, n$ существует единственный индекс $j = 1, 2, \dots, n$ такой, что $c_{i_1 j} = d_{i_2 j}$.

Будем считать семействами попарно псевдоортогональных латинских квадратов пустое семейство и семейство, состоящее из одного латинского квадрата.

Пример 1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Латинские квадраты A, B порядка 3 ортогональны, но не псевдоортогональны, латинские квадраты C, D порядка 3 псевдоортогональны, но не ортогональны.

Теорема 1. Пусть $n \geq 2$. Если $B_1, B_2, \dots, B_t$ — система попарно псевдоортогональных латинских квадратов порядка n , то $t \leq n - 1$.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что первая строка каждой матрицы $B_1, B_2, \dots, B_t$ начинается с числа 1. Рассмотрим элементы, которые расположены в первой строке, втором столбце матриц $B_1, B_2, \dots, B_t$. Эти t элементов должны быть попарно различными и отличными от числа 1.

Семейство $n-1$ псевдоортогональных латинских квадратов порядка n назовем полным.

Пример 2. Семейство C, D псевдоортогональных латинских квадратов порядка 3 из примера 1 является полным. Полным является следующее семейство псевдоортогональных квадратов порядка 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теорема о максимальном размере семейств псевдоортогональными латинских квадратов доказывается аналогично теореме о максимальном размере семейств ортогональными латинских квадратов (см. [8, 9, 10]).

Теорема 2. Если $n = p^k$, где p — простое число, $k \in \mathbb{N}$, то существует семейство полных псевдоортогональных латинских квадратов порядка n .

Доказательство. Рассмотрим поле Галуа $GF(n)$. Биекции $\tau_{e,i}: GF(n) \rightarrow GF(n)$ определим для всех $e, i \in GF(n)$, $e \neq 0$, равенствами $\tau_{e,i}(j) = ej + i$, $j \in GF(n)$.

Рассмотрим матрицы $A_e = \|A_{ij}^{(e)}\|_{n \times n}$, $e \in GF(n)$, $e \neq 0$, с элементами, определенными равенствами $a_{ij}^{(e)} = ej + i$, $i, j \in GF(n)$. Проверим, что каждая матрица A_e является латинским квадратом. Если $ej_1 + i = ej_2 + i$, то $j_1 = j_2$. Поэтому элементы каждой строки матрицы A_e попарно различны. Если $ej + i_1 = ej + i_2$, то $i_1 = i_2$. Поэтому элементы каждого столбца матрицы A_e попарно различны.

Проверим, что латинские квадраты A_e , где $e \in GF(n)$, $e \neq 0$, попарно псевдоортогональны. Рассмотрим строку с номером i_1 матрицы A_{e_1} и строку с номером i_2 матрицы A_{e_2} , $e_1, e_2 \in GF(n)$, $e_1 \neq e_2$. Уравнение $e_1 j + i_1 = e_2 j + i_2$ имеет единственное решение. Поэтому любые две строки матриц A_{e_1} и A_{e_2} имеют в точности один общий элемент.

3. Прямое кронекеровское произведение латинских квадратов

Прямым произведением элемента a и матрицы $B = \|b_{kl}\|_{n \times n}$ будем называть матрицу $a \times B = \|(a, b_{kl})\|_{n \times n}$.

Прямым кронекеровским произведением матриц $A = \|a_{ij}\|_{m \times m}$ и $B = \|b_{kl}\|_{n \times n}$ называется блочная матрица $A \otimes B = \|a_{ij} \times B\|_{m \times m}$.

Пример 3. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

имеем

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (1,2) & (1,3) & (1,1) & (2,2) & (2,3) & (2,1) \\ (1,3) & (1,1) & (1,2) & (2,3) & (2,2) & (2,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,2) & (2,3) & (2,1) & (1,2) & (1,3) & (1,1) \\ (2,3) & (2,2) & (2,3) & (1,3) & (1,1) & (1,2) \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу $A \otimes B$ поэлементно, $A \otimes B = \|d_{(i,k),(j,l)}\|_{mn \times mn}$. Мы считаем, что строки матрицы $A \otimes B$ проиндексированы парами (i, k) , а столбцы проиндексированы парами (j, l) , где $d_{(i,k),(j,l)} = (a_{ij}, b_{kl})$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, $k, l = 1, 2, \dots, n$.

В следующих леммах описана связь между прямыми кронекеровскими произведениями латинских квадратов и псевдоортогональностью.

Лемма 1. Пусть $A = \|a_{ij}\|_{m \times m}$ — латинский квадрат порядка m с элементами из множества U , $|U| = m$, $B = \|b_{kl}\|_{n \times n}$ — латинский квадрат порядка n с элементами из множества V , $|V| = n$. Тогда матрица $A \otimes B$ является латинским квадратом порядка mn с элементами из множества $U \times V$.

Доказательство. Если элементы матрицы $A \otimes B$ таковы, что $d_{(i,k),(j_1,l_1)} = d_{(i,k),(j_2,l_2)}$, то $(a_{ij_1}, b_{kl_1}) = (a_{ij_2}, b_{kl_2})$ и $j_1 = j_2$, $l_1 = l_2$. Поэтому в каждой строке матрицы $A \otimes B$ нет одинаковых элементов. Если $d_{(i_1,k_1),(j,l)} = d_{(i_2,k_2),(j,l)}$, то $(a_{i_1j}, b_{k_1l}) = (a_{i_2j}, b_{k_2l})$ и $i_1 = i_2$, $k_1 = k_2$. Поэтому в каждом столбце матрицы $A \otimes B$ нет одинаковых элементов. Тем самым доказано, что матрица $A \otimes B$ является латинским квадратом.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 8 & 9 & 10 & 7 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 10 & 4 & 8 & 9 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 10 & 1 & 2 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 8 & 9 & 6 & 7 & 10 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 7 & 8 \\ 6 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 9 & 7 \\ 7 & 2 & 6 & 3 & 8 & 9 & 1 & 4 & 5 & 10 \\ 8 & 9 & 4 & 7 & 5 & 2 & 6 & 10 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 & 6 & 10 & 2 \\ 10 & 8 & 9 & 5 & 7 & 6 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 10 & 8 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 10 & 1 & 9 & 8 & 7 \\ 3 & 9 & 1 & 8 & 7 & 5 & 4 & 2 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 10 & 1 & 2 & 3 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 4 & 9 & 2 & 8 & 7 & 6 & 3 & 10 & 1 \\ 6 & 8 & 7 & 3 & 2 & 1 & 9 & 10 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 10 & 6 & 9 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & 1 & 10 & 9 & 5 & 6 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 8 & 7 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 6 \\ 10 & 6 & 5 & 9 & 3 & 8 & 7 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Рис. 1. Два псевдоортогональных латинских квадрата порядка 10

Лемма 2. Пусть $A = (A_1, A_2, \dots, A_t)$, $B = (B_1, B_2, \dots, B_t)$ — семейства из t попарно псевдоортогональных латинских квадратов порядков m и n соответственно. Тогда семейство $C = (A_1 \otimes B_1, A_2 \otimes B_2, \dots, A_t \otimes B_t)$ — семейство попарно псевдоортогональных латинских квадратов порядка mn .

Доказательство. Введем обозначения

$$A_r = \|a_{ij}^{(r)}\|_{m \times m}, \quad B_r = \|b_{kl}^{(r)}\|_{n \times n}, \quad A_r \otimes B_r = \|d_{(i,k),(j,l)}^{(r)}\|_{mn \times mn},$$

где $d_{(i,k),(j,l)}^{(r)} = (a_{ij}^{(r)}, b_{kl}^{(r)})$, $r = 1, 2, \dots, t$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, $k, l = 1, 2, \dots, n$. Докажем, что латинские квадраты $A_r \otimes B_r$ и $A_s \otimes B_s$, где $r \neq s$, псевдоортогональны.

Если $d_{(i,k),(j_1,l_1)}^{(r)} = d_{(i,k),(j_2,l_2)}^{(s)}$, то $(a_{ij_1}^{(r)}, b_{kl_1}^{(r)}) = (a_{ij_2}^{(s)}, b_{kl_2}^{(s)})$ и $j_1 = j_2$, $l_1 = l_2$. Поэтому любые две строки матриц $A_r \otimes B_r$ и $A_s \otimes B_s$ имеют в точности один общий элемент.

Из доказанных выше лемм и теоремы 2 следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть $n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ — каноническое разложение числа n на простые множители, $s = \min\{p_1^{k_1} - 1, \dots, p_r^{k_r} - 1\}$. Тогда существует множество из s псевдоортогональных латинских квадрата порядка n .

Напомним, что $\text{prols}(n)$ есть наибольшее число t , для которого существует множество из t псевдоортогональных латинских квадратов порядка n .

Следствие 1. Справедливы следующие утверждения.

- (а) $\text{prols}(n) \leq n - 1$.
- (б) Если $n = p^k$, где p — простое число, $k \in \mathbb{N}$, то $\text{prols}(n) = n - 1$.
- (в) Если $n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ — каноническое разложение числа n на простые множители, то $\text{prols}(n) \geq \min\{p_1^{k_1} - 1, \dots, p_r^{k_r} - 1\}$.

Компьютерные вычисления показывают, что не существует двух псевдоортогональных латинских квадратов порядка 6. Поэтому $\text{prols}(6) = 1$.

Транспонируя пару ортогональных латинских квадратов порядка 10 (см. [9]), получим пару псевдоортогональных квадратов (см. рис. 1). Поэтому $\text{prols}(10) \geq 2$.

Транспонируя пять попарно ортогональных латинских квадратов порядка 12, построенных прямым произведением циклических групп порядка 2 и 6 (см. [9]), получим пять псевдоортогональных квадратов (см. рис. 2). Поэтому $\text{prols}(12) \geq 5$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & 5 & 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 11 & 10 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 12 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 11 & 10 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & 12 & 5 & 4 & 9 & 8 & 7 & 6 & 11 & 10 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 12 & 5 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 11 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 12 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 11 & 10 & 9 & 8 & 1 & 12 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 11 & 10 & 9 & 2 & 1 & 12 & 5 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 11 & 10 & 3 & 2 & 1 & 12 & 5 & 4 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 11 & 4 & 3 & 2 & 1 & 12 & 5 \\ 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 12 \\ 12 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 3 & 9 & 7 & 10 & 4 & 12 & 11 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 9 & 4 & 10 & 8 & 11 & 5 & 1 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & 4 & 10 & 5 & 11 & 9 & 6 & 12 & 2 & 7 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 11 & 12 & 6 & 10 & 7 & 1 & 3 & 8 & 2 & 9 \\ 5 & 12 & 6 & 1 & 7 & 11 & 8 & 2 & 4 & 9 & 3 & 10 \\ 6 & 7 & 1 & 8 & 2 & 12 & 3 & 9 & 11 & 4 & 10 & 5 \\ 7 & 8 & 2 & 9 & 3 & 1 & 4 & 10 & 6 & 5 & 11 & 12 \\ 8 & 9 & 3 & 10 & 4 & 2 & 5 & 11 & 7 & 12 & 6 & 1 \\ 9 & 10 & 4 & 11 & 5 & 3 & 12 & 6 & 8 & 1 & 7 & 2 \\ 10 & 11 & 5 & 6 & 12 & 4 & 1 & 7 & 9 & 2 & 8 & 3 \\ 11 & 6 & 12 & 7 & 1 & 5 & 2 & 8 & 10 & 3 & 9 & 4 \\ 12 & 1 & 7 & 2 & 8 & 6 & 9 & 3 & 5 & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 2 & 7 & 4 & 3 & 11 & 8 & 5 & 12 & 9 \\ 2 & 7 & 11 & 3 & 8 & 5 & 4 & 6 & 9 & 12 & 1 & 10 \\ 3 & 8 & 6 & 4 & 9 & 12 & 5 & 7 & 10 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & 9 & 7 & 5 & 10 & 1 & 12 & 8 & 11 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & 10 & 8 & 12 & 11 & 2 & 1 & 9 & 6 & 3 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 3 & 7 & 12 & 9 & 8 & 4 & 1 & 10 & 11 & 2 \\ 7 & 12 & 4 & 8 & 1 & 10 & 9 & 5 & 2 & 11 & 6 & 3 \\ 8 & 1 & 5 & 9 & 2 & 11 & 10 & 12 & 3 & 6 & 7 & 4 \\ 9 & 2 & 12 & 10 & 3 & 6 & 11 & 1 & 4 & 7 & 8 & 5 \\ 10 & 3 & 1 & 11 & 4 & 7 & 6 & 2 & 5 & 8 & 9 & 12 \\ 11 & 4 & 2 & 6 & 5 & 8 & 7 & 3 & 12 & 9 & 10 & 1 \\ 12 & 11 & 9 & 1 & 6 & 3 & 2 & 10 & 7 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 2 & 7 & 4 & 3 & 11 & 8 & 5 & 12 & 9 \\ 2 & 7 & 11 & 3 & 8 & 5 & 4 & 6 & 9 & 12 & 1 & 10 \\ 3 & 8 & 6 & 4 & 9 & 12 & 5 & 7 & 10 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & 9 & 7 & 5 & 10 & 1 & 12 & 8 & 11 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & 10 & 8 & 12 & 11 & 2 & 1 & 9 & 6 & 3 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 3 & 7 & 12 & 9 & 8 & 4 & 1 & 10 & 11 & 2 \\ 7 & 12 & 4 & 8 & 1 & 10 & 9 & 5 & 2 & 11 & 6 & 3 \\ 8 & 1 & 5 & 9 & 2 & 11 & 10 & 12 & 3 & 6 & 7 & 4 \\ 9 & 2 & 12 & 10 & 3 & 6 & 11 & 1 & 4 & 7 & 8 & 5 \\ 10 & 3 & 1 & 11 & 4 & 7 & 6 & 2 & 5 & 8 & 9 & 12 \\ 11 & 4 & 2 & 6 & 5 & 8 & 7 & 3 & 12 & 9 & 10 & 1 \\ 12 & 11 & 9 & 1 & 6 & 3 & 2 & 10 & 7 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 & 11 & 6 & 5 & 9 & 12 & 4 & 2 & 7 & 10 \\ 2 & 9 & 4 & 6 & 7 & 12 & 10 & 1 & 5 & 3 & 8 & 11 \\ 3 & 10 & 5 & 7 & 8 & 1 & 11 & 2 & 12 & 4 & 9 & 6 \\ 4 & 11 & 12 & 8 & 9 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 10 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 9 & 10 & 3 & 7 & 4 & 2 & 12 & 11 & 8 \\ 6 & 1 & 8 & 4 & 5 & 10 & 2 & 11 & 9 & 7 & 12 & 3 \\ 7 & 2 & 9 & 5 & 12 & 11 & 3 & 6 & 10 & 8 & 1 & 4 \\ 8 & 3 & 10 & 12 & 1 & 6 & 4 & 7 & 11 & 9 & 2 & 5 \\ 9 & 4 & 11 & 1 & 2 & 7 & 5 & 8 & 6 & 10 & 3 & 12 \\ 10 & 5 & 6 & 2 & 3 & 8 & 12 & 9 & 7 & 11 & 4 & 1 \\ 11 & 12 & 7 & 3 & 4 & 9 & 1 & 10 & 8 & 6 & 5 & 2 \\ 12 & 7 & 2 & 10 & 11 & 4 & 8 & 5 & 3 & 1 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Рис. 2. Пять псевдоортогональных латинских квадратов порядка 12

4. Число пересечений полных r -дольных графов

Следующая теорема устанавливает связь между существованием семейства $r - 2$ псевдоортогональных латинских квадратов порядка n и числом пересечений полных r -дольных графов $r\bar{K}_n$.

Теорема 4. Пусть $n_1 = n_2 = \dots = n_r = n > 1$ и $r \geq 3$. Следующие утверждения равносильны.

(а) $\text{nin}(r\bar{K}_n) = n^2$.

(б) Существует $r - 2$ попарно псевдоортогональных латинских квадратов порядка n .

Доказательство. Докажем, что (а) $\Rightarrow$ (б). Для этого покажем, что вершины графа $r\bar{K}_n$

могут быть закодированы подмножествами множества U , где $U = \{1, 2, \dots, n^2\}$. Элементы множества U разместим в матрице

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & \dots & n^2 \end{pmatrix}.$$

Код каждой вершины графа $r\bar{K}_n$ должен содержать n элементов. Без потери общности можно считать, что вершины доли V_r закодированы множествами $\{1, 2, \dots, n\}$, $\{n+1, n+2, \dots, 2n\}$, $\dots$, $\{n(n-1)+1, n(n-1)+2, \dots, n^2\}$, образованными элементами строк матрицы M . Без потери общности можно считать, что вершины доли V_{r-1} закодированы множествами $\{1, n+1, \dots, n(n-1)+1\}$, $\{2, n+2, \dots, n(n-1)+2\}$, $\dots$, $\{n, 2n, \dots, n^2\}$, образованными элементами столбцов матрицы M .

Код каждой вершины из доли $V_i = \{v_{i1}, \dots, v_{in}\}$, $i = 1, 2, \dots, r-2$, должен пересекаться с каждой вершиной долей V_r и V_{r-1} так, что мощность каждого такого пересечения равна 1. Поэтому код вершины v_{is} определяет перестановку π_{is} степени n , $\pi_{is}(l)$ равно номеру того столбца матрицы M , в котором на месте $(l, \pi_{is}(l))$ в матрице M расположено число, принадлежащее коду вершины v_{is} . Определим $n \times n$ матрицу L_i так, что элементы s -й строки матрицы L_i образуют перестановку π_{is} , $s = 1, 2, \dots, n$. Матрицы L_i , $i = 1, 2, \dots, r-2$, являются латинскими квадратами, и $L_1, L_2, \dots, L_{r-2}$ — система попарно псевдоортогональных латинских квадратов.

Утверждение (б) $\Rightarrow$ (а) очевидно.

Из теоремы 4 следует, что

$$\text{nin}(2\bar{K}_n) = \text{nin}(3\bar{K}_n) = n^2, \quad n > 1.$$

Следствие 2. *Справедливы следующие утверждения.*

(а) Если $2 \leq r \leq \text{prols}(n) + 2$, то $\text{nin}(r\bar{K}_n) = n^2$.

(б) Если $r > \text{prols}(n) + 2$, то $\text{nin}(r\bar{K}_n) > n^2$.

Заметим, что в построенном в доказательстве теоремы 4 кодировании вершин графа $r\bar{K}_n$ мощность пересечения кодов смежных вершин равна единице.

Пример 4. Псевдоортогональные латинские квадраты порядка 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

дают следующее кодирование графа $4\bar{K}_3$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v_{11} = \{1, 5, 9\}, v_{12} = \{7, 2, 6\}, v_{13} = \{4, 8, 3\}\}, \\ V_2 &= \{v_{21} = \{1, 8, 6\}, v_{22} = \{4, 2, 9\}, v_{23} = \{7, 5, 3\}\}, \\ V_3 &= \{v_{31} = \{1, 2, 3\}, v_{32} = \{4, 5, 6\}, v_{33} = \{7, 8, 9\}\}, \\ V_4 &= \{v_{41} = \{1, 4, 7\}, v_{42} = \{2, 5, 8\}, v_{43} = \{3, 6, 9\}\}. \end{aligned}$$

Здесь вершины графа отождествлены с их кодами. Ясно, что $\text{nin}(4\bar{K}_3) = 9$, $\text{nin}(5\bar{K}_3) > 9$. Рассмотрим покрытие графа $4\bar{K}_3$ кликами. Клики графа $4\bar{K}_3$ изоморфны графу K_4 . На

основе двойственности, рассмотренной в [5], и построенного кодирования графа $4\bar{K}_3$, запишем (перечислением вершин) клики, покрывающие граф $4\bar{K}_3$:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{41}\}, & W_2 &= \{v_{12}, v_{22}, v_{31}, v_{42}\}, & W_3 &= \{v_{13}, v_{23}, v_{31}, v_{43}\}, \\ W_4 &= \{v_{13}, v_{22}, v_{32}, v_{41}\}, & W_5 &= \{v_{11}, v_{23}, v_{32}, v_{42}\}, & W_6 &= \{v_{12}, v_{21}, v_{32}, v_{43}\}, \\ W_7 &= \{v_{12}, v_{23}, v_{33}, v_{41}\}, & W_8 &= \{v_{13}, v_{21}, v_{33}, v_{42}\}, & W_9 &= \{v_{11}, v_{22}, v_{33}, v_{43}\}. \end{aligned}$$

5. Число пересечений $r\bar{K}_n + K_m$

Частично упорядоченное множество $\text{Bool}(U) = (2^U, \subseteq)$ называется булеаном множества U . Семейство A различных подмножеств множества U называется $\bar{R}$ -антицепью, если любые два множества, принадлежащие A , имеют непустое пересечение.

Семейство A подмножеств множества U называется фильтром булеана $\text{Bool}(U)$, если из включений $a \in A$ и $a \subseteq b$ следует, что $b \in A$. Легко проверить, что каждая максимальная $\bar{R}$ -антицепь в булеане $\text{Bool}(U)$ является фильтром и содержит $2^{|U|-1}$ множеств.

Пусть $F_1, \dots, F_r$ — фильтры булеана $\text{Bool}(U)$. Из [11] известно, что

$$|F_1| \dots |F_r| \leq 2^{(r-1)|U|} |F_1 \cap \dots \cap F_r|. \quad (1)$$

Теорема 5. Пусть $2 \leq r \leq \text{prols}(n) + 2$. Если $0 \leq m \leq 2^{n^2-n}$, то $\text{nin}(r\bar{K}_n + K_m) = n^2$.

Доказательство. Пусть $\Gamma(V, E) = r\bar{K}_n + K_m$. Рассмотрим порожденный подграф $\langle V' \rangle = r\bar{K}_n$ графа Γ и обозначим его доли $V_i = \{v_{i1}, \dots, v_{in}\}$, где $i = 1, 2, \dots, r$. Согласно теореме 4, $\text{nin}(\langle V' \rangle) = n^2 \leq \text{nin}(\Gamma)$, при ее доказательстве было построено кодирование φ графа $r\bar{K}_n$ n -элементными подмножествами множества $U = \{1, 2, \dots, n^2\}$. Докажем, что вершины графа Γ могут быть закодированы подмножествами множества U без изменения кодов вершин порожденного подграфа $\langle V' \rangle$. Рассмотрим семейства $A_j = \{\varphi(v_{1j}), \dots, \varphi(v_{nj})\}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Каждое из семейств A_j является $\bar{R}$ -антицепью. Никакие два семейства A_{j_1} и A_{j_2} , где $j_1 \neq j_2$, не имеют общих элементов. Каждое семейство A_j принадлежит некоторой максимальной $\bar{R}$ -антицепи F_j в булеане $\text{Bool}(U)$. Рассмотрим фильтр $F = F_1 \cap \dots \cap F_r$, являющийся $\bar{R}$ -антицепью. Применяя неравенство (1), находим, что $|F| \geq 2^{n^2-n} \geq m$.

Фильтр F не имеет общих элементов с семействами $A_1, \dots, A_n$. Каждое множество, принадлежащее фильтру F , пересекается с каждым из множеств семейств $A_1, \dots, A_n$. Поэтому множествами фильтра F можно закодировать вершины порожденного графа K_m , получив нужное кодирование графа Γ .

6. Примеры применения

Пусть v — вершина дерева T . Ветвь к вершине v дерева T — это максимальное поддереву, содержащее v в качестве висячей вершины.

Обозначим T_n дерево, содержащее вершину v степени n такую, что любая ветвь к вершине v есть $\text{Chain}(3)$. Дерево T_n имеет $2n + 1$ вершин и $2n$ ребер. Дерево T_3 изображено на рис. 3.

Теорема 6. Справедливы следующие утверждения.

- (а) Если $2 \leq r \leq \text{prols}(n + 1) + 2$, то $\text{nin}(rT_n) = (n + 1)^2$.

Рис. 3. Дерево T_3 и ветвь b_{ij} дерева T_n Рис. 4. Граф P_3 и граф P_4

(б) Если $r > \text{prols}(n+1) + 2$, то $\text{nin}(rT_n) > (n+1)^2$.

Доказательство. Докажем (а). Пусть $rT_n = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_r$, где каждый граф Γ_i изоморфен графу T_n . Пусть $\{v_i, v_{ij1}, v_{ij2}\}$ — множество вершин ветви b_{ij} к вершине v_i в графе Γ_i , $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, n$. Каждое множество $V_i = \bigcup_{j=1}^n \{v_i, v_{ij2}\}$ порождает подграф $\langle V_i \rangle$ графа rT_n , изоморфный графу $\bar{K}_{n+1}$, $i = 1, 2, \dots, r$. Множество $V' = V_1 \cup \dots \cup V_r$ порождает подграф $\langle V' \rangle = \langle V_1 \rangle + \dots + \langle V_r \rangle$ графа rT_n , изоморфный графу $r\bar{K}_{n+1}$. В силу теоремы 4, $\text{nin}(\langle V' \rangle) = (n+1)^2 \leq \text{nin}(rT_n)$, в ее доказательстве построено кодирование φ графа $r\bar{K}_{n+1}$ $(n+1)$ -элементными подмножествами множества $U = \{1, 2, \dots, (n+1)^2\}$. Докажем, что вершины графа rT_n могут быть закодированы подмножествами множества U , без изменения кодов вершин порожденного подграфа $\langle V' \rangle$.

Пусть $\varphi(v_i) = \{\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in+1}\}$, далее, положим $\varphi(v_{ij1}) = \varphi(v_{ij2}) \cup \{\alpha_{in+1}\}$, $|\varphi(v_{ij1})| = n+2$, $j = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, r$. Нетрудно убедиться, что таким образом получено кодирование графа rT_n .

Покажем, что все множества $\varphi(v_{ij1})$ попарно различны. Достаточно проверить, что $\varphi(v_{ij1}) \neq \varphi(v_{kl1})$ для всех $(i, j) \neq (k, l)$. Действительно, если $\varphi(v_{ij1}) = \varphi(v_{kl1})$ для некоторых $(i, j) \neq (k, l)$, то

$$\begin{aligned} \varphi(v_{ij1}) &= \varphi(v_{ij1}) \cap \varphi(v_{kl1}) = (\varphi(v_{ij2}) \cup \{\alpha_{in+1}\}) \cap (\varphi(v_{kl2}) \cup \{\alpha_{kn+1}\}) \\ &= (\varphi(v_{ij2}) \cap \varphi(v_{kl2})) \cup (\varphi(v_{ij2}) \cap \{\alpha_{kn+1}\}) \cup (\{\alpha_{in+1}\} \cap \varphi(v_{kl2})) \\ &\quad \cup (\{\alpha_{in+1}\} \cap \{\alpha_{kn+1}\}). \end{aligned}$$

Из правой части последнего равенства следует, что $|\varphi(v_{ij1})| \leq 4$. Если $|\varphi(v_{ij1})| = 4$, то $\alpha_{in+1} = \alpha_{kn+1}$ и $|\varphi(v_{ij1})| \leq 2$, получаем противоречие. Если $|\varphi(v_{ij1})| < 4$, то получаем противоречие с неравенством $|\varphi(v_{ij1})| = n+2 \geq 4$.

Таким образом, получено кодирование графа rT_n .

Пусть граф $P_n = (V, E)$ имеет $2n$ вершин $V = \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n\}$, где вершина v_i смежна только с вершинами $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n$, $i = 1, \dots, n$, порожденный подграф $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$ изоморфен графу K_n . Графы P_3 и P_4 изображены на рис. 4.

Теорема 7. Справедливы следующие утверждения.

(а) Если $2 \leq r \leq \text{prols}(n) + 2$, то $\text{nin}(rP_n) = n^2$.

(б) Если $r > \text{prols}(n) + 2$, то $\text{nin}(rP_n) > n^2$.

Доказательство. Докажем утверждение (а). Пусть $rP_n = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_r$, где каждый граф Γ_i изоморфен графу P_n . Обозначим $V_i = \{v_{i1}, \dots, v_{in}, u_{i1}, \dots, u_{in}\}$ вершины порожденного подграфа Γ_i , $i = 1, \dots, r$. Введем множества $V'_i = \{v_{i1}, \dots, v_{in}\}$, $i = 1, \dots, r$, и положим $V' = V'_1 \cup \dots \cup V'_r$. Порожденный подграф $\langle V'_i \rangle$ изоморфен графу $\bar{K}_n$, порожденный подграф $\langle V' \rangle$ изоморфен графу $r\bar{K}_n$.

В силу теоремы 4, $\text{nin}(\langle V' \rangle) = n^2 \leq \text{nin}(rP_n)$, в доказательстве этой теоремы построено кодирование φ графа $\bar{K}_n$ n -элементными подмножествами множества $U = \{1, 2, \dots, n\}$. Докажем, что вершины графа rP_n могут быть закодированы подмножествами множества U без изменения кодов вершин подграфа $\langle V' \rangle$.

Положим $\varphi(u_{ij}) = U - \varphi(v_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Нетрудно убедиться, что таким образом получено кодирование графа rP_n .

Аналогично получаем, что $\text{nin}(r \text{ Chain}(5)) = 9$, $r = 2, 3, 4$.

Список литературы

1. Харари Ф., *Теория графов*. Мир, Москва, 1973.
2. Szpilrajn-Marczewski E., Sur deux propriétés des classes d'ensembles. *Fundam. Math.* (1945) **33**, 303–307.
3. Erdős P., Goodman A. W., Pósa L., The representation of a graph by set intersections. *Canad. J. Math.* (1966) **18**, №1, 106–112.
4. Scheinerman E. R., Trenk A. N., On the fractional intersection number of graph. *Graph Comb.* (1999) **15**, №3, 341–351.
5. Маренич Е. Е., Большакова Н. С., Число пересечений графа. *Дискретная математика* (2007) **19**, №4, 97–107.
6. Bollobás B., Erdős P., Spencer J., West D. B., Clique covering of the edges of a random graph. *Combinatorica* (1993) **13**, 1–5.
7. Frieze A., Reed B., Covering the edges of a random graph by cliques. *Combinatorica* (1995) **15**, 489–497.
8. Райзер Г. Дж., *Комбинаторика*. Мир, Москва, 1966.
9. Холл М., *Комбинаторика*. Мир, Москва, 1970.
10. Denes J., Keedwell A. D., *Latin squares and their applications*. Akademiai Kiado, Budapest, 1974.
11. Kleitman D. J., Families of nondisjoint subsets. *J. Comb. Theory* (1966) **1**, 153–155.

Статья поступила 19.04.2005.