Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Кольца косых рядов Лорана и условие максимальности для правых аннуляторов, *Дискрет. матем.*, 2008, том 20, выпуск 1, 80–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm991>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:55:54

Кольца косых рядов Лорана и условие максимальности для правых аннуляторов

© 2008 г. А. А. Туганбаев

Если φ — автоморфизм кольца A , то кольцо косых рядов Лорана $A((x, \varphi))$ является полуцепным справа кольцом с условием максимальнойности для правых аннуляторов тогда и только тогда, когда A — артиново справа полуцепное справа кольцо.

Работа выполнена при поддержке Российским фондом фундаментальных исследований, проект 05-01-01048.

1. Введение

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Если φ — автоморфизм кольца A , то через $A((x, \varphi))$ обозначается кольцо косых рядов Лорана над кольцом коэффициентов A , образованное рядами

$$f = \sum_{i=k}^{\infty} f_i x^i,$$

где x — переменная, k — целое (возможно, отрицательное) число, а все коэффициенты f_i лежат в кольце A . В кольце $A((x, \varphi))$ сложение задается естественным образом, а умножение задается с учетом правила $xa = \varphi(a)x$ для всех элементов $a \in A$. При $\varphi = 1_A$ получаем кольцо рядов Лорана $A((x))$. Модуль называется конечномерным, если он не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей. Модуль M называется цепным, если любые два его подмодуля сравнимы по включению. Прямая сумма цепных модулей называется полуцепным модулем. В [6] доказано, что кольцо косых рядов Лорана $A((x, \varphi))$ является артиновым справа полуцепным справа кольцом тогда и только тогда, когда A — артиново справа полуцепное справа кольцо. Основными результатами данной работы являются теоремы 1 и 2.

Теорема 1. Пусть A — кольцо с условием максимальнойности для правых аннуляторов, N — первичный радикал кольца A и φ — автоморфизм кольца A .

- (1) Если кольца A и A/N конечномерны справа, то радикал Джекобсона кольца $A((x, \varphi))$ нильпотентен и совпадает с $N((x, \varphi))$.
- (2) $A((x, \varphi))$ — артиново справа кольцо тогда и только тогда, когда $A((x, \varphi))$ — полулокальное кольцо, у которого все факторкольца конечномерны справа.

Теорема 2. Пусть A — кольцо и φ — автоморфизм кольца A . Тогда равносильны следующие условия:

- (1) $A((x, \varphi))$ — полуцепное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов;
- (2) $A((x, \varphi))$ — полуцепное справа артиново справа кольцо;
- (3) $A((x, \varphi))$ — полуцепное справа кольцо и A — кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов;
- (4) $A((x, \varphi))$ — полуцепное справа кольцо и правый сингулярный идеал кольца A нильпотентен;
- (5) A — полуцепное справа артиново справа кольцо.

В связи с утверждением 2 теоремы 1 заметим, что полулокальное кольцо, у которого все факторкольца конечномерны справа, не обязано быть артиновым справа. Например, таким кольцом является кольцо формальных степенных рядов $F[[x]]$ над любым полем F (заметим, что кольцо $F[[x]]$ нетерово).

Доказательство теорем 1 и 2 разбито на ряд утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес. Приведем необходимые обозначения и определения.

Пересечение всех первичных идеалов кольца A называется первичным радикалом кольца A .

Кольцо A называется полупервичным, если A не имеет ненулевых нильпотентных идеалов.

Конечномерное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов называется правым кольцом Голди.

Пусть M — правый модуль над кольцом A . Подмодуль N модуля M называется существенным, если для любого подмодуля X модуля M равенство $X \cap N = 0$ влечет равенство $X = 0$.

Через $\text{Sing}(M)$ обозначается вполне инвариантный подмодуль модуля M , образованный всеми элементами m модуля M такими, что аннулятор элемента m является существенным правым идеалом кольца A . Если $\text{Sing}(M) = 0$, то модуль M называется несингулярным. Идеал $\text{Sing}(A_A)$ кольца A называется правым сингулярным идеалом.

Пересечение всех максимальных подмодулей модуля M обозначается через $J(M)$ и называется радикалом Джекобсона модуля M . Модуль M называется полупрimitивным, если $J(M) = 0$. Кольцо A называется полулокальным, если $A/J(A)$ — полупростое артиново кольцо. Кольцо A называется полупрimary, если A — полулокальное кольцо, а идеал $J(A)$ нильпотентен.

Для любого подмножества N кольца A через $N((x, \varphi))$ обозначается подмножество кольца $A((x, \varphi))$, образованное рядами

$$f = \sum_{i=k}^{\infty} f_i x^i,$$

у которых все коэффициенты f_i лежат в множестве N . Пусть f — некоторый ряд из кольца косых рядов Лорана $A((x, \varphi))$ и $f = \sum_{i=k}^{\infty} f_i x^i$, где $f_k \neq 0$ и $f_i \in A$ для всех i . Тогда элементы $f_i \in A$ называются каноническими коэффициентами ряда f , элемент f_k кольца коэффициентов называется младшим коэффициентом ряда f , а число k называется младшей степенью ряда f . Считается, что младшая степень нулевого ряда равна ∞ .

2. Радикал Джекобсона кольца косых рядов Лорана

Для удобства приведем доказательство следующей известной леммы 1 (см. лемму 2 (3) в [5]).

Лемма 1. Пусть A — кольцо, φ — автоморфизм кольца A и $R = A((x, \varphi))$.

- (1) Если M — максимальный правый идеал кольца A , то $M((x, \varphi))$ — максимальный правый идеал кольца R .
- (2) $J(R) \subseteq (J(A))((x, \varphi))$, то есть для любого ряда $f = \sum_{i=m}^{\infty} f_i x^i \in J(R)$, $f_i \in A$, все канонические коэффициенты f_i лежат в $J(A)$.

Доказательство. Докажем первую часть леммы. Достаточно показать, что для каждого ряда $t \in R \setminus M((x, \varphi))$ существуют такие ряды $h \in M((x, \varphi))$ и $g \in R$, что $h + tg = 1$. Без ограничения общности можно считать, что $t = \sum_{i=0}^{\infty} t_i x^i$, где $0 \neq t_0 \in A \setminus M$ и $t_i \in A$ для всех i . Так как M — максимальный правый идеал кольца A , существуют такие элементы $m_0 \in M$ и $a_0 \in A$, что $m_0 + t_0 a_0 = 1$. Тогда $m_0 + t a_0 = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} t_i \varphi^i(a_0) x^i$. Поэтому существует такой ряд $f \in R$, что $(m_0 + t a_0) f = 1$. Положим $h \equiv m_0 f \in M$ и $g \equiv a_0 f \in R$. Тогда $h + tg = 1$.

Докажем вторую часть леммы. Пусть $\{M_i\}_{i \in I}$ — множество всех максимальных правых идеалов кольца A . Согласно (1), $M_i((x, \varphi))$ — максимальный правый идеал кольца R для любого i . Поэтому $J(R) \subseteq \bigcap_{i \in I} (M_i((x, \varphi))) = (J(A))((x, \varphi))$.

Лемма 2. Пусть A — кольцо, φ — автоморфизм кольца A и $R = A((x, \varphi))$. Пусть $J(R) \neq 0$ и B — ненулевой идеал кольца A , порожденный всеми младшими коэффициентами рядов из $J(R)$. Тогда для любого ненулевого элемента $b \in B$ существуют такие ненулевые элементы $b', b'' \in B$, что $bb' = b''b = 0$.

Доказательство. Пусть f — такой ненулевой ряд из $J(R)$, что b — младший коэффициент ряда f . Докажем существование такого элемента $b' \in B$, что $bb' = 0$. Так как $f x^n \in J(R)$ для всех n , можно считать, что младшая степень ряда f равна -1 (то есть $f - b x^{-1} \in A[[x, \varphi]]$). Так как $f \in J(R)$, ряд $1 - f$ обратим. Поэтому существует такой обратимый ряд $g \in R$, что $(1 - f)g = 1$ и $g = 1 + fg$. Пусть $g = \sum_{i=k}^{\infty} g_i x^i \in R$, где $g_k \neq 0$ и $g_i \in A$ для всех i . Так как $fg \in J(R)$, согласно утверждению (2) леммы 1 все канонические коэффициенты ряда fg лежат в $J(A)$. Поэтому из равенства $g = 1 + fg$ следует, что коэффициент g_0 обратим в кольце A и $bg_0 \neq 0$. Так как $g_0 \neq 0$, то $k \leq 0$. Поэтому либо $k = 0$, либо $k < 0$.

Допустим, что $k = 0$. Тогда ненулевой элемент bg_0 является младшим коэффициентом рядов fg и $1 + fg = g$. Поэтому младшая степень k ряда g равна -1 . Получено противоречие.

Допустим, что $k < 0$. Из равенства $g = 1 + fg$ следует, что $bg_k = 0$ и k — младшая степень ряда $fg \in J(R)$. Поэтому $g_k \in B$ и можно положить $b' = g_k$.

Существование такого элемента $b'' \in B$, что $b''b = 0$ доказывается аналогично.

Лемма 3. Пусть A — несингулярное справа конечномерное справа полупервичное кольцо и B — ненулевой идеал кольца A . Тогда существует такой ненулевой элемент $b \in B$, что $bb' \neq 0$ для любого ненулевого элемента $b' \in B$.

Доказательство. По лемме Цорна существует такой правый идеал C кольца A , что $B \cap C = 0$ и $B \oplus C$ — существенный правый идеал кольца A . Так как A — несингулярное справа конечномерное справа полупервичное кольцо, каждый существенный

правый идеал кольца A содержит делитель нуля [1]. Поэтому существенный правый идеал $B \oplus C$ содержит некоторый делитель нуля $b + c$, где $b \in B$ и $c \in C$. Пусть b' — такой элемент идеала B , что $bb' = 0$. Так как B — идеал, справедливо включение $cb' \in B \cap C = 0$. Тогда $(b + c)b' = bb' + cb' = 0$. Так как $b + c$ — делитель нуля, справедливо равенство $b' = 0$. Поэтому b — искомый элемент.

Предложение 1. Пусть A — несингулярное справа конечномерное справа полупервичное кольцо. Тогда для любого автоморфизма φ кольца A кольцо косых рядов Лорана $A((x, \varphi))$ полупримиитивно.

Предложение 1 вытекает из лемм 2 и 3.

Лемма 4. Пусть φ — автоморфизм кольца A , $R = A((x, \varphi))$, N — такой идеал кольца A , что $\varphi(N) = N$, и $\bar{\varphi}$ — автоморфизм факторкольца A/N , индуцированный автоморфизмом φ .

(1) Если B и C — произвольные правые идеалы кольца A , то

$$(B + C)((x, \varphi)) = B((x, \varphi)) + C((x, \varphi)),$$

$$B((x, \varphi)) \cap C((x, \varphi)) = (B \cap C)((x, \varphi)).$$

Следовательно, решетка правых идеалов кольца A изоморфна подрешетке решетки правых идеалов кольца R .

(2) Существует естественный кольцевой изоморфизм

$$R/(N((x, \varphi))) \cong (A/N)((x, \bar{\varphi})).$$

(3) Если идеал N кольца A нильпотентен, то $N((x, \varphi))$ — нильпотентный идеал кольца R , в частности, $N((x, \varphi)) \subseteq J(R)$.

(4) Если кольцо $(A/N)((x, \bar{\varphi}))$ полупримиитивно, то $J(R) \supseteq N((x, \varphi))$.

(5) Если кольцо $(A/N)((x, \bar{\varphi}))$ полупримиитивно и, кроме того, $N((x, \varphi)) \subseteq J(R)$, то $J(R) = N((x, \varphi))$.

(6) Если кольцо R конечномерно справа, то кольцо A конечномерно справа.

(7) Если кольца R и $(A/N)((x, \bar{\varphi}))$ конечномерны справа, то кольца A и A/N конечномерны справа.

Доказательство. Утверждения 1, 2 и 3 проверяются непосредственно.

Докажем утверждение 4. Согласно утверждению 2, полупримиитивность кольца $(A/N)((x, \bar{\varphi}))$ влечет полупримиитивность кольца $R/(N((x, \varphi)))$. Поэтому выполняется соотношение $N((x, \varphi)) \supseteq J(R)$.

Утверждение 5 следует из утверждения 4.

Утверждение 6 следует из утверждения 1.

Утверждение 7 следует из утверждений 6 и 2.

Лемма 5. Пусть A — кольцо, φ — автоморфизм кольца A , $R = A((x, \varphi))$ и N — первичный радикал кольца A .

(1) $\varphi(N) = N$.

- (2) Если A/N — конечномерное справа несингулярное справа кольцо и справедливо включение $N((x, \varphi)) \subseteq J(R)$, то $J(R) = N((x, \varphi))$.
- (3) Если первичный радикал N нильпотентен и A/N — конечномерное справа несингулярное справа кольцо, то радикал Джекобсона $J(R)$ кольца A нильпотентен и $J(R) = N((x, \varphi))$.
- (4) Пусть первичный радикал N нильпотентен, A — кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов и A/N — конечномерное справа кольцо. Тогда радикал Джекобсона $J(R)$ кольца R нильпотентен и $J(R) = N((x, \varphi))$.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Для любого первичного идеала P кольца A идеалы $\varphi(P)$ и $\varphi^{-1}(P)$ первичны и $P = \varphi(\varphi^{-1}(P))$. Кроме того, N — пересечение всех первичных идеалов кольца A . Поэтому $\varphi(N) = N$.

Докажем утверждение 2. Пусть $\bar{\varphi}$ — автоморфизм факторкольца A/N , индуцированный автоморфизмом φ . Так как A/N — конечномерное справа несингулярное справа полупервичное кольцо, по предложению 1 кольцо $(A/N)((x, \bar{\varphi}))$ полупрimitивно. По утверждению 5 леммы 4, $J(R) = N((x, \varphi))$.

Докажем утверждение 3. Согласно утверждению 3) леммы 4, $N((x, \varphi))$ — нильпотентный идеал кольца R . В частности, $N((x, \varphi)) \subseteq J(R)$. Согласно утверждению 2, $J(R) = N((x, \varphi))$.

Утверждение 4 вытекает из утверждения 3 и следующего факта: если A — произвольное кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, то его факторкольцо по первичному радикалу несингулярно справа [2].

Предложение 2. Пусть A — кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, φ — автоморфизм кольца A и N — первичный радикал кольца A .

- (1) Если кольца A и A/N конечномерны справа, то радикал Джекобсона кольца $A((x, \varphi))$ нильпотентен и совпадает с $N((x, \varphi))$.
- (2) Если все факторкольца кольца $A((x, \varphi))$ конечномерны справа, то радикал Джекобсона кольца $A((x, \varphi))$ нильпотентен и совпадает с $N((x, \varphi))$.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Так как A — конечномерное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, нильидеал N нильпотентен [3]. По утверждению 4 леммы 5 радикал Джекобсона кольца $A((x, \varphi))$ нильпотентен и совпадает с $N((x, \varphi))$.

Докажем утверждение 2. Согласно утверждению 7 леммы 4 и утверждению 2 леммы 4, кольца A и A/N конечномерны справа. Согласно утверждению 1, радикал Джекобсона кольца $A((x, \varphi))$ нильпотентен и совпадает с $N((x, \varphi))$.

3. Окончание доказательства теорем 1 и 2

Предложение 3. Если φ — автоморфизм кольца A , то равносильны следующие условия:

- (1) $A((x, \varphi))$ — артиново справа кольцо;
- (2) A — кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов и $A((x, \varphi))$ — полулокальное кольцо, у которого все факторкольца конечномерны справа.

Доказательство. Положим $R = A((x, \varphi))$.

Докажем, что (1) $\Rightarrow$ (2). Ясно, что R — полулокальное кольцо, у которого все факторкольца конечномерны справа. R — нетерово справа кольцо, поэтому R — кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов. Кроме того, любое подкольцо произвольного кольца с условием максимальности для правых аннуляторов обладает этим свойством.

Докажем, что (2) $\Rightarrow$ (1). Согласно утверждению 2 предложения 2, $J(R)$ — нильпотентный идеал кольца R . Из условия предложения следует, что $R/J(R)$ — полупростое кольцо и $J^n(R)/J^{n+1}(R)$ — полупростой артинов правый R -модуль для каждого натурального числа n . Поэтому R — артиново справа кольцо.

Замечание 1. Пусть R — полуцепное справа кольцо. Тогда R — полулокальное кольцо и любое факторкольцо кольца R является конечной прямой суммой цепных правых идеалов. Хорошо известно, что для произвольного кольца правая конечномерность равносильна тому, что это кольцо имеет существенный правый идеал, являющийся конечной прямой суммой равномерных правых идеалов. Поэтому каждое факторкольцо кольца R конечномерно справа.

Предложение 4. Если φ — автоморфизм кольца A , то равносильны следующие условия:

- (1) $A((x, \varphi))$ — артиново справа, полуцепное справа кольцо;
- (2) A — артиново справа, полуцепное справа кольцо;
- (3) $A((x, \varphi))$ — полуцепное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов;
- (4) $A((x, \varphi))$ — полуцепное справа кольцо и A — кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов;
- (5) $A((x, \varphi))$ — полуцепное справа кольцо и A — полупримальное кольцо.

Доказательство. Эквивалентность условий (1) и (2) доказана в [6].

Импликации (1) $\Rightarrow$ (3) и (2) $\Rightarrow$ (5) очевидны.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (4) следует из того, что каждое подкольцо кольца с условием максимальности для правых аннуляторов является кольцом с условием максимальности для правых аннуляторов.

Импликация (4) $\Rightarrow$ (3) следует из предложения 3 и замечания 1.

Докажем, что (5) $\Rightarrow$ (4). Пусть $J = J(A)$. По условию предложения, A/J — полупростое кольцо и идеал J нильпотентен. Возьмем любое натуральное число n . Непосредственно проверяется, что J^{n-1}/J^n — полупростой правый A -модуль, $\varphi(J^n) = J^n$, автоморфизм φ индуцирует автоморфизм φ_n факторкольца A/J^n и существует естественный кольцевой изоморфизм $(A/J_n)((x, \varphi_n)) \cong A((x, \varphi))/J_n((x, \varphi))$.

Кольцо $(A/J_n)((x, \varphi_n))$ изоморфно факторкольцу полуцепного справа кольца $A((x, \varphi))$, поэтому $(A/J_n)((x, \varphi_n))$ — полуцепное справа кольцо. Так как кольцо $A((x, \varphi))$ конечномерно справа, согласно утверждению 6 леммы 4 кольцо A конечномерно справа. Тогда для любого натурального числа n конечномерный полупростой правый A -модуль J^{n-1}/J^n является артиновым модулем. Кроме того, идеал J нильпотентен. Поэтому A — артиново справа кольцо. В частности, A — нетерово справа кольцо.

Следствие 1. Если φ — автоморфизм кольца A и $A((x, \varphi))$ — полуцепное справа кольцо, то $A/\text{Sing}(A_A)$ — артиново справа, полуцепное справа кольцо.

Доказательство. Положим $S = \text{Sing}(A_A)$ и $\bar{A} = A/S$. Так как кольцо $A((x, \varphi))$ конечномерно справа, согласно пункту (6) леммы 4 кольцо A конечномерно справа. Поэтому $\bar{A}$ — кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов [4]. Для любого существенно-го правого идеала B кольца A правый идеал $\varphi(B)$ тоже является существенным. Поэтому $\varphi S = S$ и φ индуцирует автоморфизм $\bar{\varphi}$ кольца $\bar{A}$. Так как существует естественный кольцевой изоморфизм $\bar{A}((x, \bar{\varphi})) \cong A((x, \varphi))/S((x, \varphi))$, кольцо $\bar{A}((x, \bar{\varphi}))$ изоморфно факторкольцу полуцепного справа кольца $A((x, \varphi))$. Поэтому $\bar{A}((x, \bar{\varphi}))$ — полуцепное справа кольцо. По предложению 4, $\bar{A}$ — артиново справа кольцо полуцепное справа кольцо.

Следствие 2. Пусть φ — автоморфизм кольца A и $S = \text{Sing}(A_A)$. Если $A((x, \varphi))$ — полуцепное справа кольцо, то равносильны следующие условия:

- (1) идеал S нильпотентен;
- (2) S — артинов правый A -модуль;
- (3) S — нетеров правый A -модуль;
- (4) A — артиново справа, полуцепное справа кольцо.

Доказательство. По следствию 1, A/S — артиново справа полуцепное справа кольцо. В частности, A/S — нетерово справа кольцо.

Докажем, что (1) $\Rightarrow$ (2). Идеал S нильпотентен и A/S — артиново справа кольцо, поэтому A — полупримарное кольцо. По предложению 4, A — артиново справа кольцо.

Докажем, что (2) $\Rightarrow$ (3). Правые A -модули A/S и S являются артиновыми, поэтому A — артиново справа кольцо. В частности, A — нетерово справа кольцо и S_A — нетеров модуль.

Докажем, что (3) $\Rightarrow$ (4). Правые A -модули A/S и S являются нетеровыми, поэтому A — нетерово справа кольцо. По предложению 4, A — артиново справа, полуцепное справа кольцо.

Импликация (4) $\Rightarrow$ (1) проверяется непосредственно.

Замечание 2. Теорема 1 вытекает из утверждения 1 предложения 2 и предложения 3. Теорема 2 вытекает из предложения 4 и следствия 2.

Список литературы

1. Faith C., *Algebra: rings, modules, and categories*, I. Springer, Berlin, 1973.
2. Johns B., Chain conditions and nil ideals. *J. Algebra* (1981) **73**, №2, 287–294.
3. Lanski Ch., Nil subrings of Goldie rings are nilpotent. *Canad. J. Math.* (1969) **21**, 904–907.
4. Shock R. C., Nil subrings in finiteness conditions. *Amer. Math. Monthly* (1971) **78**, 741–748.
5. Туганбаев Д. А., Полулокальные дистрибутивные кольца косых рядов Лорана. *Фундаментальная и прикладная математика* (2000) **6**, №3, 913–921.
6. Tuganbaev D. A., Laurent series rings and pseudo-differential operator rings. *J. Math. Sci.* (2005) **128**, №3, 2843–2893.

Статья поступила 23.12.2005.