Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Черухина, О сложности реализации одного класса почти симметрических функций формулами глубины 3, *Дискрет. матем.*, 2008, том 20, выпуск 1, 120–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm995>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:15:15

О сложности реализации одного класса почти симметрических функций формулами глубины 3

© 2008 г. С. Е. Черухина

В работе рассматривается класс почти симметрических булевых функций. Для любой функции из этого класса значения на любом слое, кроме второго, совпадают со значениями монотонной симметрической функции с порогом 3. Значения на втором слое произвольны. Изучается реализация функций из этого класса $\& \vee \&$ -формулами в базисе $\{\&, \vee\}$.

Получены точная оценка минимальной сложности функций данного класса (функция минимальной сложности указана явно) и асимптотически точная оценка сложности монотонной симметрической функции с порогом 3, максимальной по порядку сложности в исследуемом классе.

Данная работа относится к теории синтеза и сложности булевых функций. Для так или иначе заданной функции (или целого класса функций) ставится вопрос, насколько сложно (или просто) функция реализуема в выбранном классе вычисляющих устройств.

Одним из естественно задаваемых классов булевых функций является класс симметрических функций. Для отдельных симметрических функций при реализации их формулами различного вида были найдены точные либо асимптотические значения сложности при точной конструкции формулы.

В. К. Коробковым [1] в 1956 г. для монотонной симметрической функции с порогом 2 (S_n^2) был предложен метод деления пополам, минимальность которого была затем доказана в [2] и [3]. Ими были получены следующие точные значения сложности в классе монотонных контактных и П-схем (формул в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$):

$$L_K^+(S_n^2) = L_n(S_n^2) = n \lfloor \log n \rfloor + 2(n - 2^{\lfloor \log n \rfloor}).$$

Отметим, что минимальная сложность достигается на формулах вида $\vee \& \vee$.

В [4] и [5] в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ в классе формул вида $\& \vee \&$ были получены асимптотические оценки сложности, равные $2n^{3/2}$ и n^2 для отрицания монотонной симметрической функции с порогом 1 и для отрицания монотонной симметрической функции с порогом 2 соответственно.

Сложность реализации функции S_n^2 формулами вида $\& \vee \&$ над базисом $\{\&, \vee\}$ рассмотрена в [6], была получена точная оценка сложности и точный вид минимальной формулы.

В данной работе мы будем рассматривать класс формул вида $\&\vee\&$ над базисом $\{\&, \vee\}$. В качестве меры сложности формулы берется число вхождений символов переменных. Все недостающие определения можно найти в [7, 8].

Пусть S_n^i — монотонная симметрическая функция с порогом i , то есть принимающая значение 1 на всех наборах с i и более единицами и значение 0 — в остальных случаях. Рассмотрим класс $\mathcal{F}^n$ функций f от n переменных таких, что $S_n^2 \geq f \geq S_n^3$. Обозначим $M(f)$ число наборов, содержащих ровно две единицы, на которых функция f обращается в 0. Эти наборы будем называть нулями функции f .

Теорема 1. Пусть $f \in \mathcal{F}^n$, тогда

$$L(f) \geq 2M(f) - 7n. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть F — минимальная формула вида $\&\vee\&$ для функции f . Тогда F представима в виде $F = F_1 \& \dots \& F_k$, где F_i — дизъюнктивная нормальная форма, $i = 1, \dots, k$. Пусть F_i реализует функцию f_i . Заметим, что f_i обращается в 1 на всех наборах, содержащих три и более единицы. Легко видеть, что

$$\sum_{i=1}^k M(f_i) \geq M(f). \quad (2)$$

Каждую из формул F_i представим в виде $F_i = G_i \vee H_i$, где G_i — дизъюнкция переменных, а каждое слагаемое в H_i содержит не менее двух переменных. Возможно, $H_i = 0$ или $G_i = 0$. Считаем, что $L(0) = 0$. В силу минимальности формулы F множества переменных из G_i и H_i не пересекаются. Обозначим через m_i число переменных функции f , то есть $x_1, \dots, x_n$, не входящих в G_i (возможен случай, когда переменная функции f не входит ни в G_i , ни в H_i). Тогда

$$L(F_i) = L(G_i) + L(H_i) = n - m_i + L(H_i). \quad (3)$$

Обозначим g_i функцию, реализуемую формулой G_i , а h_i функцию от m_i переменных, реализуемую формулой H_i . Тогда $h_i \in \mathcal{F}^{m_i}$.

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Предложение 1. Пусть H — минимальная монотонная дизъюнктивная нормальная форма, реализующая функцию $h \in \mathcal{F}^m$. Тогда

$$L(H) \geq 2M(h) - m, \quad (4)$$

$$L(H) \geq m^2 - m - 2M(h). \quad (5)$$

Доказательство. Заметим, что в силу минимальности в H не входят слагаемые, содержащие четыре и более переменных. Действительно, удалив из таких слагаемых все переменные, кроме трех, получим эквивалентную дизъюнктивную нормальную форму меньшей сложности. Кроме того, из определения класса $\mathcal{F}^m$ следует, что в H не могут содержаться слагаемые из одной переменной. Таким образом, в H имеются только слагаемые из двух и трех переменных.

Неравенство (5) очевидно. Действительно, если x и y — переменные функции h , то пара (x, y) дает нуль тогда и только тогда, когда конъюнкция xu не входит в H . Поэтому

$$L(H) \geq 2 \left(\binom{m}{2} - M(h) \right) = m^2 - m - 2M(h).$$

Доказательство неравенства (4) проведем индукцией по m .

Пусть $m \leq 2$. Ясно, что $M(h) = 0$ при $m < 2$, и утверждение очевидно. При $m = 2$ справедливо неравенство $M(h) \leq 1$, поэтому $L(H) \geq 0 = 2 \cdot 1 - 2 \geq 2M(h) - m$.

Проведем индуктивный переход. Пусть $m \geq 3$. Можно считать, что $M(h) > 0$, так как если $M(h) = 0$, то утверждение очевидно. Тогда найдется пара переменных x и y таких, что при подстановке вместо них единиц, а вместо остальных переменных нулей, функция h обратится в 0. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Существует переменная z такая, что конъюнкция xuz входит в дизъюнктивную нормальную форму H . Все переменные, отличные от x, y, z , разобьем на три множества A, B, C . Пусть переменная w отлична от x, y, z . Если в H входят все три конъюнкции xuw, xzw, yzw , то w отнесем к множеству A ; если только одна из них, то к B , если ни одной, то к C . Покажем, что ровно две из этих конъюнкций в H входить не могут. Действительно, пусть в H входят xuw, xzw , а yzw не входит. В силу минимальности H , в нее не входят конъюнкции yz (так как входит xuz), uw (поскольку входит xuw) и zw (так как входит xzw). Поэтому при подстановке 1 вместо y, z, w и 0 вместо остальных переменных функция h обратится в 0, но по условию она должна равняться 1. Получаем противоречие.

Обозначим через L_w суммарную сложность тех конъюнкций из H , которые содержат w , хотя бы одну из переменных x, y, z и не содержат переменных, отличных от x, y, z, w . Пусть H' — дизъюнктивная нормальная форма, полученная из H подстановкой $x = y = z = 0$. Тогда

$$L(H) - L(H') \geq \sum_{w \in A \cup B \cup C} L_w + 3. \quad (6)$$

Обозначим M_w число нулей функции h среди наборов вида $(0 \dots 01 \ 0 \dots 010 \dots 0)$, где одна единица стоит на месте с номером, соответствующим переменной w , а другая на месте одной из переменных x, y, z .

Пусть h' — функция, реализуемая формулой H' . Тогда

$$M(h) - M(h') = \sum_{w \in A \cup B \cup C} M_w + 3, \quad (7)$$

так как пары $(x, y), (z, y), (z, x)$ дают нули функции h .

Рассмотрим отдельно случаи, когда w принадлежит A, B, C .

Если $w \in A$, то $L_w \geq L(xuw \vee xzw \vee yzw) = 9$; пары $(x, w), (y, w), (z, w)$ дают нули, поэтому $M_w = 3$.

Пусть $w \in B$ и в H имеется конъюнкция xuw . Тогда в H должна присутствовать конъюнкция zw . Действительно, в противном случае при подстановке 1 вместо x, z, w и 0 вместо остальных переменных получим 0, так как в H отсутствуют xzw, xz (поскольку есть xuz), xw (так как есть xuw) и zw . Получаем противоречие.

Таким образом, $L_w \geq L(xuw \vee zw) = 5$. Кроме того, $M_w = 2$, поскольку xw и yw дают нули, а zw нет.

Наконец, пусть $w \in C$. Тогда в H должны присутствовать не менее двух из трех конъюнкций xw, yw и zw . Действительно, пусть в H присутствует не более одной из них, например, нет ни xw , ни yw . Тогда при подстановке $x = y = w = 1$ и вместо остальных 0, мы получим 0, так как ни xuw , ни xu не присутствуют. Получаем противоречие. Следовательно, $L_w \geq 4$, а $M_w \leq 1$.

Объединяя полученные оценки, а также используя (6) и (7), находим, что

$$L(H) - L(H') \geq 3 + 9|A| + 5|B| + 4|C|, \quad (8)$$

$$M(h) - M(h') \leq 3 + 3|A| + 2|B| + |C|. \quad (9)$$

Применив к H' и h' предположение индукции, получим, что

$$L(H') \geq 2M(h') - (m - 3). \quad (10)$$

Наконец, из (8)–(10) следует, что

$$\begin{aligned} L(H) &\geq L(H') + 3 + 9|A| + 5|B| + 4|C| \geq 2M(h') - (m - 3) + 3 + 9|A| + 5|B| + 4|C| \\ &\geq 2M(h) - 6 - 6|A| - 4|B| - 2|C| - (m - 3) + 3 + 9|A| + 5|B| + 4|C| \\ &= 2M(h) - m + 3|A| + |B| + 2|C| \geq 2M(h) - m. \end{aligned}$$

В случае 1 утверждение доказано.

Случай 2. Не существует переменной z такой, что xuz входит в H . Пара (x, y) дает нуль, поэтому xu не входит в H . Подставив $x = y = 0$ в H и h , получим, соответственно, H' и h' . Пусть w — переменная, отличная от x и y . Тогда либо xw , либо uw входит в H . Действительно, если ни xw , ни uw не входят в H , то при подстановке $x = y = w = 1$ и вместо остальных 0, функция принимает значение 0. Получаем противоречие. Итак, число всевозможных конъюнкций в H , имеющих вид xw или uw , не меньше, чем число переменных, отличных от x и y , то есть $m - 2$. Следовательно,

$$L(H) - L(H') \geq 2(m - 2). \quad (11)$$

Пара (x, w) (или (y, w)) дает нуль тогда и только тогда, когда соответствующая конъюнкция отсутствует в H , то есть количество таких пар не превосходит числа $2(m - 2) - (m - 2) = m - 2$. Кроме того, пара (x, y) дает нуль. Отсюда следует, что

$$M(h) - M(h') \leq m - 1. \quad (12)$$

По предположению индукции

$$L(H') \geq 2M(h') - (m - 2). \quad (13)$$

Наконец, из (11)–(13) следует, что

$$\begin{aligned} L(H) &\geq L(H') + 2(m - 2) \geq 2M(h') - (m - 2) + 2(m - 2) \\ &\geq 2M(h) - (2m - 2) - (m - 2) + 2(m - 2) = 2M(h) - m. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Продолжим доказательство теоремы 1. Заметим, что к дизъюнктивным нормальным формам H_i и функциям h_i применимо доказанное утверждение. Отсюда с учетом (3) и равенства $M(f_i) = M(h_i)$ следует, что

$$\begin{aligned} L(F_i) &\geq n - m_i + \begin{cases} 2M(h_i) - m_i \\ m_i^2 - m_i - 2M(h_i) \end{cases} \\ &= n - 2m_i + \begin{cases} 2M(f_i), \\ m_i^2 - 2M(f_i). \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Покажем, что если

$$M(f_i) \leq n^2/16, \quad (15)$$

то $L(F_i) \geq 2M(f_i)$.

Действительно, если $n \geq 2m_i$, то неравенство $L(F_i) \geq 2M(f_i)$ справедливо в силу верхней части неравенства (14).

В случае, если $n < 2m_i$, то есть $m_i > n/2$, в силу (14)

$$4M(f_i) \leq n^2/4 = n - 2(n/2) + (n/2)^2 < n - 2m_i + m_i^2.$$

Здесь используется свойство возрастания функции $\varphi(x) = x^2 - 2x$ для $x \geq 1$. Следовательно, используя нижнюю часть неравенства (14), получаем, что

$$L(F_i) \geq n - 2m_i + m_i^2 - 2M(f_i) \geq 2M(f_i).$$

Пусть I — множество индексов i таких, что $M(f_i) > n^2/16$.

Если $|I| \geq 8$, то с использованием верхнего неравенства в (14) и неравенства $m_i \leq n$ получаем, что

$$\begin{aligned} L(F) &= \sum_i L(F_i) \geq \sum_{i \in I} L(F_i) \geq \sum_{i \in I} (2M(f_i) + n - 2m_i) > 8(n^2/8 - n) \\ &= n^2 - 8n \geq 2M(f) - 7n, \end{aligned}$$

поскольку $M(f) \leq \binom{n}{2}$, а если $|I| \leq 7$, то для каждого $i \notin I$ выполняется неравенство $L(F_i) \geq 2M(f_i)$, а для любого i — неравенство $L(F_i) \geq 2M(f_i) - n$, следующее из (14). Тогда, используя (2), находим, что

$$\begin{aligned} L(F) &= \sum_{i \in I} L(F_i) + \sum_{i \notin I} L(F_i) \geq \sum_{i \in I} (2M(f_i) - n) + \sum_{i \notin I} 2M(f_i) \\ &= 2 \sum_i M(f_i) - |I|n \geq 2M(f) - 7n. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Справедливо неравенство $L(S_n^3) \geq n^2 - 8n$.

Доказательство. Действительно, если в качестве f взять функцию S_n^3 , то поскольку $M(S_n^3) = \binom{n}{2}$, из теоремы 1 следует, что $L(S_n^3) \geq 2M(S_n^3) - 7n = n^2 - n - 7n = n^2 - 8n$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Если $n \rightarrow \infty$, то $L(S_n^3) \sim n^2$.

Доказательство. Конструкция формулы, реализующей S_n^3 , использует метод деления пополам, примененный в [1] при нахождении формулы для S_n^2 .

Опишем алгоритм построения формулы для S_n^3 . Нулями функции S_n^3 являются всевозможные наборы с двумя единицами. Каждый нуль соответствует паре переменных. Формулу для S_n^3 составим из дизъюнктивных нормальных форм, каждая из которых представляет свое множество нулей, причем каждый нуль содержится хотя бы в одном из этих множеств.

Пусть $k = \lfloor (1/2) \log n \rfloor$, $q = 2^k$. Разобьем множество $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ переменных функции S_n^3 на q непересекающихся подмножеств $M_1, \dots, M_q$ таких, что $||M_i| - |M_j|| \leq 1$ для любых i, j . Будем считать, что $|M_1| \geq \dots \geq |M_q|$. Положим $m = |M_1|$. Тогда $m = \lceil n/q \rceil$. Отметим, что $\sqrt{n} \leq m \leq 2\sqrt{n} + 1$.

Построение формулы проведем в два этапа. На первом этапе учтем все нули, соответствующие парам (x_i, x_j) таким, что для некоторых s, r справедливы соотношения $x_i \in M_s, x_j \in M_r$ и $M_s \neq M_r$; а на втором этапе — соответствующие парам (x_i, x_j) , $i \neq j$, таким, что $x_i \in M_s, x_j \in M_s$ для некоторого s .

1. Введем для удобства вычислений две функции

$$G(M) = \bigvee_{x_i \in M} x_i, \quad H(M) = \bigvee_{x_i, x_j \in M, i < j} x_i x_j,$$

а также обозначения

$$H(p; r) = H\left(\bigcup_{i=p}^r M_i\right), \quad G(p; r) = G\left(\bigcup_{i=p}^r M_i\right).$$

Мы будем использовать дизъюнктивные нормальные формы вида

$$H(M') \vee H(M'') \vee G(X \setminus (M' \cup M'')), \quad (16)$$

где множества M', M'' не пересекаются. Заметим, что нулями дизъюнктивных нормальных форм (16) являются все пары переменных (x_i, x_j) такие, что $x_i \in M', x_j \in M''$.

Рассмотрим формулы

$$\begin{aligned} D_{1,1} &= H(1; q/2) \vee H(q/2 + 1; q), \\ D_{2,1} &= H(1; q/4) \vee H(q/4 + 1; q/2) \vee G(q/2 + 1; q), \\ D_{2,2} &= G(1; q/2) \vee H(q/2 + 1; 3q/4) \vee H(3q/4 + 1; q), \\ &\dots \\ D_{i,1} &= H(1; q/2^i) \vee H(q/2^i + 1; q/2^{i-1}) \vee G(q/2^{i-1} + 1; q), \\ &\dots \\ D_{i,2^{i-1}} &= G(1; q - q/2^{i-1}) \vee H(q - q/2^{i-1} + 1; q - q/2^i) \vee H(q - q/2^i + 1; q), \\ &\dots \\ D_{k,1} &= H(1; 1) \vee H(2; 2) \vee G(3; q), \\ &\dots \\ D_{k,q/2} &= G(1; q - 2) \vee H(q - 1; q - 1) \vee H(q; q). \end{aligned}$$

Положим $F = \bigwedge_{i,j} D_{i,j}$. С учетом соотношения

$$L(D_{i,1}) \leq 4 \binom{mq/2^i}{2} + n - \frac{2mq}{2^i} < \frac{2m^2q^2}{2^{2i}} + n = \frac{2n^2}{2^{2i}} + O(n)$$

получаем

$$\begin{aligned} L(F) &= \sum_{i,j} L(D_{i,j}) \leq \sum_{i=1}^k 2^{i-1} L(D_{i,1}) \\ &< \sum_{i=1}^k 2^{i-1} \frac{2n^2}{2^{2i}} + O(n^{3/2}) = n^2 \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} + O(n^{3/2}) < n^2 + O(n^{3/2}) \lesssim n^2. \end{aligned}$$

2. Теперь для каждого множества M_i рассмотрим функцию

$$f_i = H(M_i) \vee G(X \setminus M_i).$$

Введем дополнительные переменные (с целью упрощения доказательства), образующие новое множество M'_i , $M'_i \supseteq M_i$, так, чтобы $|M'_i| = 2^{k_i}$, $2^{k_i-1} < |M_i| \leq 2^{k_i}$. Для новой функции

$$f'_i = H(M'_i) \vee G(X \setminus M'_i)$$

будем строить реализующую ее формулу следующим образом. Множество M'_i разобьем на две равные части k_i независимыми способами, а именно, j -е из этих разбиений имеет вид $M'_i = M'_{i,j} \cup M''_{i,j}$, $|M'_{i,j}| = |M''_{i,j}| = 2^{k_i-1}$, где $M'_{i,j}$ содержит все переменные, в двоичном номере которых $(j-1)$ -й бит, $1 \leq j \leq k_i$, равен 0. Тогда формула для f'_i будет иметь вид

$$F'_i = \bigwedge_{j=1}^{k_i} D_j, \quad D_j = H(M'_{i,j}) \vee H(M''_{i,j}) \vee G(X \setminus M'_i).$$

Учитывая, что $2^{k_i-1} < |M_i| \leq 2\sqrt{n} + 1$, получаем оценку

$$\begin{aligned} L(F'_i) &= \sum_{j=1}^{k_i} L(D_j) = k_i L(D_1) = k_i \left(4 \binom{2^{k_i-1}}{2} + n - 2 \cdot 2^{k_i} \right) \\ &\lesssim k_i (2 \cdot 2^{2(k_i-1)} + n) \lesssim 9nk_i \lesssim (9/2)n \log n. \end{aligned}$$

Подстановкой нулей вместо $2^{k_i} - |M_i|$ переменных, не входящих в множество M_i , получим формулу для F_i , реализующую нашу функцию f_i . Пусть $F' = \bigwedge_{i=1}^q F'_i$. Тогда

$$L(F') \lesssim qL(F'_1) \lesssim (9/2)n^{3/2} \log n.$$

Окончательно, формула, реализующая S_n^3 , имеет вид

$$S_n^3 = F \& F', \quad L(S_n^3) = n^2 + O(n^{3/2} \log n).$$

Теорема 3 доказана.

Если задаться вопросом о сложности самой простой и самой сложной функций в рассматриваемом классе почти симметрических функций, то самую простую предъявить просто. Более того, можно получить точную оценку ее сложности.

Теорема 4. *Справедливы равенства*

$$\min_{f \in \mathcal{F}^n} L(f) = 2n(\lfloor \sqrt{n/2} \rfloor - 1) + \lceil \sqrt{n/2} \rceil (n - 2\lfloor \sqrt{n/2} \rfloor^2),$$

если $n/2 \leq \lfloor \sqrt{n/2} \rfloor \lceil \sqrt{n/2} \rceil$,

$$\min_{f \in \mathbb{F}^n} L(f) = 2n(\lceil \sqrt{n/2} \rceil - 1) + \lfloor \sqrt{n/2} \rfloor (2\lceil \sqrt{n/2} \rceil^2 - n),$$

если $n/2 > \lfloor \sqrt{n/2} \rfloor \lceil \sqrt{n/2} \rceil$.

Доказательство. Доказательство схоже с доказательством в работе [6].

Пусть F — минимальная формула для функции минимальной сложности из нашего класса. Тогда (в обозначениях из доказательства теоремы 1)

(1) H_i не содержит конъюнкций длины 3.

Действительно, пусть $H_i = xyz \vee H'$. Тогда, удалив из конъюнкции xyz , например, переменную z , получим формулу, реализующую функцию (возможно, другую) из того же класса.

(2) H_i можно заменить формулой вида $(\bigvee_{l,j \in M'} x_l x_j) \vee (\bigvee_{l,j \in M''} x_l x_j)$, где $l < j$, $M' \cap M'' = \emptyset$, $||M'| - |M''|| \leq 1$, не увеличивая сложности и не выходя за пределы нашего класса.

Для обоснования этого докажем следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть H — минимальная монотонная дизъюнктивная нормальная форма, реализующая функцию $h \in \mathbb{F}^m$. Пусть также каждое слагаемое в H содержит ровно две переменные, (возможно, $H = 0$). Тогда

$$\begin{aligned} L(H) &\geq 4 \binom{m/2}{2}, & \text{если } m = 2k, \\ L(H) &\geq 2 \binom{(m-1)/2}{2} + \binom{(m+1)/2}{2}, & \text{если } m = 2k + 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Доказательство. Рассмотрим случай $m = 2k$.

Доказательство проведем индукцией по m .

При $m = 2$ утверждение очевидно, поскольку считаем, что $\binom{m}{2} = m(m-1)/2$ для любого действительного m , поэтому $\binom{0}{2} = \binom{1}{2} = 0$.

Рассмотрим индуктивный переход $m \rightarrow m + 2$. Заметим, что для любой тройки переменных x, y, z в H должна присутствовать хотя бы одна из трех конъюнкций xy, xz, yz . В противном случае, на наборе, в котором $x = y = z = 1$, а остальные компоненты равны 0, функция h обращается в 0.

Возможны два случая.

Если для любой пары переменных (x, y) конъюнкция xy входит в H , то

$$L(H) \geq 2 \binom{m+2}{2} > 4 \binom{(m+2)/2}{2}.$$

Если найдется такая пара (x, y) , что xy не содержится в H , то в силу замечания, приведенного выше, для любого z по крайней мере одна из двух конъюнкций xz или yz входит в H .

Удалим из H конъюнкции, содержащие переменные x и y . Применяя к полученной функции h' предположение индукции, получаем, что

$$L(H') \geq 4 \binom{m/2}{2}.$$

Оценивая сложность H , получаем, что

$$\begin{aligned} L(H) &\geq 2m + L(H') \geq 2 \left(m + 2 \binom{m/2}{2} \right) \\ &= m^2/2 + m = (m+2)m/2 = 4 \binom{(m+2)/2}{2}. \end{aligned}$$

Случай $m = 2k + 1$ рассматривается аналогично:

$$\begin{aligned} L(H') &\geq k(k-1) + (k+1)k = 2k^2, \\ L(H) &\geq 2m + L(H') \geq 2(2k+1) + 2k^2 = 2(k+1)^2 \\ &= 2 \left(\binom{k+1}{2} + \binom{k+2}{2} \right). \end{aligned}$$

Предложение 2 доказано.

Из предложения 2 следует, что достаточно рассматривать только конъюнкции дизъюнктивных нормальных форм, имеющих вид

$$F'_i = \left(\bigvee_{j \in M_i} x_j \right) \vee \left(\bigvee_{l, j \in M_i^0} x_l x_j \right) \vee \left(\bigvee_{l, j \in M_i^1} x_l x_j \right), \quad (18)$$

где $M_i \sqcup M_i^0 \sqcup M_i^1 = \{1, \dots, n\}$, $|M_i^0| = \lfloor m_i/2 \rfloor$, $|M_i^1| = \lceil m_i/2 \rceil$, $|M_i| = n - m_i$. Действительно, дизъюнктивную нормальную форму F_i можно заменить формулой F'_i вида (18) без увеличения сложности, поскольку сложность формулы

$$H'_i = \left(\bigvee_{l, j \in M_i^0} x_l x_j \right) \vee \left(\bigvee_{l, j \in M_i^1} x_l x_j \right)$$

в точности равна правой части неравенства (17), а значит, в силу предложения 2 справедливо неравенство $L(H_i) \leq L(H'_i)$.

Заметим, что различные множества M_i^σ и M_j^τ не пересекаются. Если это не так, удалим у одного из них общую переменную y и добавим в соответствующую дизъюнктивную нормальную форму конъюнкцию y . Из этого следует, что $\sum_{i=1}^{N_1/2} m_i = n$, где N_1 — число множеств вида M_i^σ .

Далее, число переменных в любых двух множествах M_i^σ и M_j^τ , взятых из различных дизъюнктивных нормальных форм, также отличается не более чем на 1. Действительно,

пусть, например $|M_1^\sigma| = k_1$, $|M_2^\tau| = k_2$ и $k_2 + 1 < k_1$. Тогда формулы

$$F_1 = \left(\bigvee_{j \in M_1} x_j \right) \vee \left(\bigvee_{l, j \in M_1^\sigma} x_l x_j \right) \vee \dots,$$

$$F_2 = \left(\bigvee_{j \in M_2} x_j \right) \vee \left(\bigvee_{l, j \in M_2^\tau} x_l x_j \right) \vee \dots$$

преобразуем в

$$F'_1 = \left(\bigvee_{j \in M_1 \cup \{j_0\}} x_j \right) \vee \left(\bigvee_{l, j \in M_1^\sigma \setminus \{j_0\}} x_l x_j \right) \vee \dots,$$

$$F'_2 = \left(\bigvee_{j \in M_2 \setminus \{j_0\}} x_j \right) \vee \left(\bigvee_{l, j \in M_2^\tau \cup \{j_0\}} x_l x_j \right) \vee \dots,$$

где j_0 — некоторый элемент множества M_1^σ .

Ясно, что

$$L(F_1 \& F_2) - L(F'_1 \& F'_2) = 2 \left(\binom{k_1}{2} + \binom{k_2}{2} - \binom{k_1 - 1}{2} - \binom{k_2 + 1}{2} \right) > 0,$$

поскольку

$$(k_1 - 1)(k_1 - 2) + k_2(k_2 + 1) = k_1^2 + k_2^2 - 3k_1 + k_2 + 2$$

$$< k_1^2 + k_2^2 - k_1 - k_2 = k_1(k_1 - 1) + k_2(k_2 - 1).$$

Получаем противоречие с минимальностью формулы.

Пусть k — минимальная из мощностей множеств M_i^σ , число множеств M_i^σ мощности k обозначим через T . Тогда

$$L(F) = n(N_1/2 - 1) + 2 \binom{k}{2} T + 2 \binom{k+1}{2} (N_1 - T). \quad (19)$$

При этом, как было показано выше, $Tk + (N_1 - T)(k + 1) = n$. Отсюда следует, что $T = N_1(k + 1) - n$ и $N_1 - T = n - N_1k$. Подставляя эти выражения в (19), получаем, что $L(F) = n(2k - 1) + N_1(n/2 - k(k + 1))$. Вводя обозначения $N = N_1/2$, $n' = n/2$ и поделив обе части полученного равенства на 2, находим, что

$$L(F)/2 = n'(2k - 1) + N(n' - k(k + 1)). \quad (20)$$

Правая часть (20) практически идентична правой части формулы (5) из работы [6]; ограничения, соответствующие неравенствам (6) в [6], доказываются аналогично.

Заметим, что в [6] при поиске минимума для $L(S)$ фактически не использовалось то, что n — целое число. Таким образом, минимум сложности в данной задаче равен минимуму из [6], примененному к $n/2$ вместо n и умноженному на 2.

Теорема доказана.

Верхняя оценка сложности для всех функций из данного класса извлекается из построения формулы для функции S_n^3 и имеет вид

$$L(f) \lesssim 2n^2.$$

Используя теорему 3, можно получить асимптотические оценки сложности для отдельных значений $M(f)$. Так, если $M(f) \sim n^2/2$, то

$$L(f) \sim n^2;$$

если $M(f) = \alpha \binom{n}{2}$, где $0 \leq \alpha \leq 1$, то

$$\alpha n^2 \lesssim L(f) \lesssim (2 - \alpha)n^2.$$

Список литературы

1. Коробков В. К., Реализация симметрических функций в классе π -схем. *Докл. АН СССР* (1956) **109**, №2, 260–263.
2. Кричевский Р. Е., Минимальная схема из замыкающих контактов для одной булевой функции от n аргументов. *Методы дискретного анализа в синтезе управляющих систем* (1965) **5**, 89–92.
3. Hansel G., Nombre de lettres nécessaire pour écrire une fonction symétrique de n variables. *C. R. Acad. Sci., Paris* (1965) **261**, 4297–4300.
4. Кузнецов С. Е., О сложности реализации одной последовательности булевых функций формулами глубины 3 в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$. *Вероятностные методы и кибернетика* (1983) **19**, 40–43.
5. Кузнецов С. Е., Нигматуллин Н. Р., О сложности реализации некоторых симметрических функций формулами глубины 3 в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$. *Вероятностные методы и кибернетика* (1985) **21**, 36–54.
6. Шумилина С. Е., О реализации одной симметрической функции формулами специального вида. В сб.: *Комбинаторно-алгебраические методы и их применение*. ГГУ, Горький, 1987, с. 164–169.
7. Лупанов О. Б., О реализации функций алгебры логики формулами из конечных классов (формулами ограниченной глубины) в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$. *Пробл. киберн.* (1961) **6**, 5–14.
8. Лупанов О. Б., О синтезе некоторых классов управляющих систем. *Пробл. киберн.* (1963) **10**, 63–97.

Статья поступила 19.12.2005.