Я. В. Абрамов, Система результантов как набор коэффициентов одного результанта,
Функц. анализ и его прил., 2013, том 47, выпуск 3, 82–87

https://www.mathnet.ru/faa3120

УДК 512.718

Система результантов как набор коэффициентов одного результанта*

© 2013. Я. В. Абрамов

1. Введение. Пусть $\Bbbk$ — алгебраически замкнутое поле. Рассмотрим следующую классическую задачу.

Задача. Дана система однородных полиномиальных уравнений:

$$\begin{cases} f_0(x_0,\ldots,x_n)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_0,\ldots,x_n)=0, \end{cases} \tag{1}$$

$$m \geqslant n, \quad \deg f_i = N_i, \quad f_j(x) = \sum_{\sum_i s_i = N_j} a_{j,s_0,\ldots,s_n} x_0^{s_0}\cdots x_n^{s_n}, \quad a_{j,s_0,\ldots,s_n} \in \Bbbk.$$

Как определить, есть ли у нее ненулевое решение в $\Bbbk^{n+1}$?

В [5] доказано, что наборы многочленов $(f_0,\ldots,f_m)$ (каждый из которых рассматривается с точностью до умножения на ненулевую константу), для которых система (1) имеет ненулевое решение, составляют проективное алгебраическое подмногообразие в $\mathbb{P}(S^{N_0}(\Bbbk^{n+1}))\times\cdots\times\mathbb{P}(S^{N_m}(\Bbbk^{n+1}))$, а именно, существует конечный набор многочленов $\{R_l(a)\}$ с целыми коэффициентами от наборов коэффициентов $a=(\ldots,a_{j,s_0,s_1,\ldots,s_n},\ldots,a_{k,t_0,t_1,\ldots,t_n},\ldots)$ многочленов f_j, такой, что каждый многочлен $R_l(a)$ однороден по коэффициентам каждого многочлена f_j и у системы (1) есть ненулевое решение тогда и только тогда, когда $R_l(a)=0$ для любого l.

Мы будем называть это многообразие *результантным многообразием.*

Определение 1. Набор многочленов $\{R_l(a)\in\mathbb{Z}[a_{j,s}]_{j,s}\}$, множество общих нулей которого в $\mathbb{P}(S^{N_0}(\Bbbk^{n+1}))\times\cdots\times\mathbb{P}(S^{N_m}(\Bbbk^{n+1}))$ есть результантное подмногообразие, называется *однородной системой результантов.*

Пример 1.1. Пусть $\deg f_j=1$, $j=0,\ldots,m$, $f_j(x)=\sum_i a_{ji}x_i$. Тогда однородная система результантов — это множество максимальных миноров матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{00} & \ldots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m0} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В частном случае задачи (1), когда число уравнений равно числу неизвестных, $m=n$, известно (современное изложение см. в [3]), что результантное

*Работа была частично поддержана лабораторией алгебраической геометрии НИУ-ВШЭ, грант РФ 11.G34.31.0023, и грантами РФФИ 10-01-00836, 12-01-33101 и 12-01-31233.

многообразие неприводимо и задается как множество нулей одного неприводимого многочлена с целыми коэффициентами. Мы будем обозначать этот многочлен через $R(f_0, \ldots, f_n) \in \mathbb{Z}[a]$ и называть *однородным результантом* $n+1$ многочленов от $n+1$ переменных.

Пример 1.2. Пусть $f(x,y) = \sum_i a_i x^i y^{n-i}$, $g(x,y) = \sum_i b_i x^i y^{m-i}$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Тогда

$$R(f(x,y), g(x,y)) = \mathrm{Res}(f(1,z), g(1,z)),$$

где Res — это хорошо известный детерминант Сильвестра

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \ldots & a_n & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \ldots & b_m & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \ldots & b_m \end{pmatrix}}_{m+n} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a\\a\\ \ddots\\a \end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} b\\b\\ \ddots\\b \end{matrix}}\right\} n \end{array}$$

Пусть X — проективное многообразие размерности n. Пусть $L_0, \ldots, L_m$ $(m \geqslant n)$ — линейные расслоения на X. Пусть $F_j \in H^0(X, L_j)$, $j = 0, \ldots, m$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} F_0(x) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ F_m(x) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

В [3] доказано, что в случае, когда $m = n$ и все L_i очень обильны, наборы сечений $(F_0, \ldots, F_n)$ (каждое из которых рассматривается с точностью до умножения на ненулевую константу), для которых система (2) имеет решение, составляют неприводимую замкнутую гиперповерхность в $\mathbb{P}(H^0(X, L_0)) \times \cdots \times \mathbb{P}(H^0(X, L_n))$, т. е. существует неприводимый многочлен $\mathscr{R}(F_0, \ldots, F_n)$ (однородный по координатам на каждом $H^0(X, L_j)$) на $\bigoplus_{j=0}^n H^0(X, L_j)$, такой, что у системы (2) есть решение тогда и только тогда, когда $\mathscr{R}(F_0, \ldots, F_n) = 0$. Такой многочлен называется *смешанным результантом* сечений $F_0, \ldots, F_n$ расслоений $L_0, \ldots, L_n$ и обозначается через $R_{L_0, \ldots, L_n}(F_0, \ldots, F_n)$. По аналогии с однородной системой результантов вводится и *смешанная система результантов* сечений $F_0, \ldots, F_m$ расслоений $L_0, \ldots, L_m$, число $m+1$ которых больше $\dim X + 1$ (или системы (2)).

Следующие два примера показывают, почему важно изучать смешанные системы результантов.

Пример 1.3. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$, $Y \subset \mathbb{P}^m$ — квазипроективные многообразия и $f\colon X \to Y$ — регулярный морфизм. Обозначим через $R_1(y_0, \ldots, y_m), \ldots, R_N(y_0, \ldots, y_m)$ смешанную систему результантов набора сечений $y_j f^*(s_i) - y_i f^*(s_j) \in H^0(X, f^*\mathscr{O}_{\overline{Y}}(1))$, $0 \leqslant i < j \leqslant m$, для $\binom{m+1}{2}$ одинаковых расслоений $f^*\mathscr{O}_{\overline{Y}}(1)$ на многообразии X, где $s_0, \ldots, s_m$ — какой-нибудь базис в $H^0(\overline{Y}, \mathscr{O}_{\overline{Y}}(1))$, а $[y_0 : \cdots : y_m]$ — точка в $\mathbb{P}^m = \mathbb{P}(H^0(\overline{Y}, \mathscr{O}_{\overline{Y}}(1))^*)$. Тогда замыкание образа $\overline{f(X)} \subset \mathbb{P}^m$ является множеством нулей многочленов $R_k(y_0, \ldots, y_m)$, $k = 1, \ldots, N$.

Основным результатом настоящей работы является формула, выражающая однородную систему результантов общей системы (1) в виде коэффициентов разложения одного однородного результанта подходящей системы, у которой число уравнений равно числу неизвестных и которая явно строится по данной системе (1).

Благодарности. Я очень благодарен А. Л. Городенцеву и Б. Штурмфельсу за полезные обсуждения в связи с этой статьей.

2. Формулировки результатов о результантах. 2.1. *Смешанные системы результантов линейных систем сечений расслоений.*

Определение 2. Будем говорить, что расслоение E на X *имеет достаточно много сечений*, если отображение вычисления $H^0(X,E)\to E\,|_x$ сюръективно для каждой точки $x\in X$.

Пусть $L_0,\dots,L_m$ и $F_0,\dots,F_m$ — те же, что и выше. Рассмотрим такие очень обильные линейные расслоения $B_0,\dots,B_n$, что при всех i, j линейные расслоения $C_{ij}=L_j^*\otimes B_i$ имеют достаточно много сечений. Такая система всегда существует, если все L_i очень обильны, например $C_{ij}=\bigotimes_{k\neq j}L_k$, $B_i=\bigotimes_k L_k$.

Тогда мы имеем следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть для каждого* $i=0,\dots,n$ *задано подпространство*

$$V_i\subset \operatorname{Hom}\Bigl(\bigoplus_j L_j,B_i\Bigr)=\bigoplus_j H^0(X,C_{ij}),$$

такое, что каноническое отображение свертки $V_i\otimes\mathcal{O}_X\to\bigoplus_j C_{ij}$ *сюръективно. Тогда набор коэффициентов* $r_\omega(F_0,\dots,F_m)$ *смешанного результанта сечений расслоений* $B_0,\dots,B_n$

$$R=R_{B_0,\dots,B_n}(\varphi_0(F_0,\dots,F_m),\dots,\varphi_n(F_0,\dots,F_m))=\sum_\omega r_\omega(F_0,\dots,F_m)\varphi^\omega,$$

рассматриваемого как многочлен от $(\varphi_0,\dots,\varphi_n)\in V_0\oplus\dots\oplus V_n$, *является смешанной системой результантов системы* (2).

2.2. *Однородные системы результантов полиномиальных систем.* Применительно к исходной задаче (1) теорема 1 приводит к следующим результатам. Зафиксируем некоторые неотрицательные целые числа m_i и k_{ij}, такие, что $m_i=k_{ij}+N_j$, где $i=0,\dots,n$, $j=0,\dots,m$. Рассмотрим однородные многочлены

$$A_{ij}(x)=\sum_{\sum_l s_l=k_{ij}} b_{i,j,s_0,\dots,s_n}x_0^{s_0}\cdots x_n^{s_n}$$

степени k_{ij} с коэффициентами в поле $\mathbb{K}=\Bbbk(\dots,b_{i,j,s_0,\dots,s_n},\dots,b_{k,l,t_0,\dots,t_n},\dots)$. Обозначим набор коэффициентов многочленов A_{ij} через $b=(\dots,b_{i,j,s_0,\dots,s_n},\dots,b_{k,l,t_0,\dots,t_n},\dots)$

Рассмотрим следующий однородный результант $n+1$ многочленов степеней $m_0,\dots,m_n$ от $n+1$ неизвестных $x_0,\dots,x_n$ с коэффициентами в поле $\mathbb{K}=\Bbbk(b)$:

$$R\Bigl(\sum_{j=0}^m A_{0j}f_j,\sum_{j=0}^m A_{1j}f_j,\dots,\sum_{j=0}^m A_{nj}f_j\Bigr)=\sum_\omega \ell_\omega(a)b^\omega, \tag{3}$$

где $\ell_\omega(a)$ — коэффициенты этого многочлена при одночленах b^ω.

Теорема 2. *Коэффициенты* $\ell_\omega(a)$ *составляют однородную систему результантов системы* (1).

Количество результантных уравнений в этой системе равно количеству различных одночленов от переменных b в разложении (3), и этот набор результантных уравнений заведомо избыточен. Его можно уменьшить при помощи следующего обобщения теоремы 2:

Теорема 3. *Пусть для каждого* $i = 0, \ldots, n$ *в* $\bigoplus_{j=0}^{m} S^{k_{ij}}(\Bbbk^{n+1})$ *задано подпространство* V_i, *такое, что для любого* $x \in \Bbbk^{n+1} \setminus 0$ *отображение вычисления, переводящее набор многочленов* $(A_{i0}, A_{i1}, \ldots, A_{im})$ *в точку* $(A_{i0}(x), A_{i1}(x), \ldots, A_{im}(x)) \in \Bbbk^{m+1}$, *сюръективно отображает* V_i *на* $\Bbbk^{m+1}$. *Тогда система* (1) *имеет ненулевое решение в* $\Bbbk^{n+1}$, *если и только если*

$$R = R\left(\sum_{j=0}^{m} A_{0j} f_j, \sum_{j=0}^{m} A_{1j} f_j, \ldots, \sum_{j=0}^{m} A_{nj} f_j\right) \equiv 0$$

как многочлен на $\bigoplus_{i=0}^{n} V_i$. *Таким образом, коэффициенты многочлена* R *в каком-либо базисе пространства* $\bigoplus_{i=0}^{n} V_i$ *образуют однородную систему результантов системы* (1).

Пример 2.1. Примером набора V_i, удовлетворяющего условию теоремы 3, является $V_i = \bigoplus_j \{\sum_l a_l x_l^{k_{ij}} \mid a_l \in \Bbbk\}$.

Следствие. *Пусть* $\deg f_0 \geqslant \deg f_1 \geqslant \cdots \geqslant \deg f_m$ *и* $k_{ij} = \deg f_i - \deg f_j$, *и пусть для каждого* $i = 0, \ldots, n$ *в* $\bigoplus_{j=n+1}^{m} S^{k_{ij}}(\Bbbk^{n+1})$ *задано подпространство* V_i, *такое, что для любого* $x \in \Bbbk^{n+1} \setminus 0$ *отображение вычисления, переводящее набор многочленов* $(A_{i,n+1}, A_{i,n+2}, \ldots, A_{i,m})$ *в точку* $(A_{i,n+1}(x), A_{i,n+2}(x), \ldots, A_{i,m}(x)) \in \Bbbk^{m-n}$, *сюръективно отображает* V_i *на* $\Bbbk^{m-n}$. *Тогда система* (1) *имеет ненулевое решение, если и только если*

$$R\left(f_0 + \sum_{j=n+1}^{m} A_{0j} f_j, f_1 + \sum_{j=n+1}^{m} A_{1j} f_j, \ldots, f_n + \sum_{j=n+1}^{m} A_{nj} f_j\right) \equiv 0$$

как многочлен на $\bigoplus_{i=0}^{n} V_i$.

Замечание. В работе [2] рассмотрен аналогичный метод построения однородных систем результантов как набора коэффициентов одного результанта для случая двух однородных переменных. Получаемая система результантов состоит из меньшего количества многочленов, чем получилось у нас.

3. Доказательства. Теоремы 2 и 3 следуют из теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Предположим противное. Для $x \in X$ положим

$$H_{i,x} = \left\{(A_{ij})_j \in V_i \;\middle|\; \sum_{j=0}^{m} A_{ij}(x) \otimes f_j(x) = 0\right\} \tag{4}$$

и $H_x = \bigoplus_{i=0}^{n} H_{i,x}$. Условие $R \equiv 0$ равносильно тому, что $\bigoplus_{i=0}^{n} V_i = \bigcup_{x \in X} H_x$. Если x не является решением системы (2), то $H_{i,x}$ — это гиперплоскость, задаваемая одним ненулевым линейным уравнением (см. (4)) в V_i и H_x имеет коразмерность $n+1$ как линейное подпространство в $V = \bigoplus_{i=0}^{n} V_i$. Если система (2) не имеет решения, то V является объединением n-параметрического семейства подпространств коразмерности $n+1$. Противоречие.

4. Задача о том, когда одна орбита лежит в замыкании другой. Пусть G — неприводимая аффинная алгебраическая группа, $X \subset \Bbbk^l$ — квазиаффинное алгебраическое многообразие и имеется действие $G : X$.

В работе [4] представлен алгоритм выяснения, когда одна орбита действия группы G лежит в замыкании другой, для случая, когда X — конечномерное линейное представление группы G. Здесь мы представим аналогичный алгоритм для общего случая. Этот алгоритм, например, позволяет определить, когда две точки лежат на одной орбите. В самом деле, $y \in Gx$ тогда и только тогда, когда $y \in \overline{Gx}$ и $x \in \overline{Gy}$.

Как следует из существования разложения Леви, G как многообразие изоморфно $G_{\mathrm{red}} \times \Bbbk^r$, где G_{red} — редуктивная группа. Из разложения Брюа следует, что G_{red} содержит в себе открытое плотное подмножество, изоморфное $(\Bbbk^*)^n \times \Bbbk^p$. Таким образом, G содержит открытое плотное подмножество U, изоморфное $(\Bbbk^*)^n \times \Bbbk^m$. Пусть x — точка на X. Тогда замыкание $\overline{Gx}$ орбиты Gx совпадает с замыканием множества $Ux = \{g \cdot x \mid g \in U\}$. Если $u \in U$, то будем использовать для вектора $u \cdot x \in X \subset \Bbbk^l$ обозначение $u \cdot x = F(u) = (F_1(u), \ldots, F_l(u))$. Тогда $F_i(u)$ — многочлен Лорана от $u \in U \cong (\Bbbk^*)^n \times \Bbbk^m$.

Пусть A — выпуклый многогранник с целыми вершинами в $\mathbb{Z}^{n+m}$ и $M = \{m_1, \ldots, m_T\}$ — множество всех целых точек внутри него. Рассмотрим в $\mathbb{P}^{T-1}$ отображение $f_A \colon u \mapsto [u^{m_1} : \cdots : u^{m_T}]$. Замыкание его образа $f_A(U)$ является торическим многообразием, которое мы обозначим через X_A. Сечения пучка $\mathscr{O}_{X_A}(1)$ можно отождествить с многочленами Лорана с носителями в A. Тогда для $\dim A + 1$ многочленов Лорана $s_0, \ldots, s_{\dim A}$ с носителями в A можно рассмотреть их смешанный результант $R_A(s_0, \ldots, s_{\dim A})$.

Положим $F_0(u) = 1$. Пусть A_i — носитель многочлена $F_i(u)$ в $\mathbb{Z}^{n+m}$. Обозначим через Δ_{ij} для $0 \leqslant i < j \leqslant l$ выпуклую оболочку множества $A_i \cup A_j$. Пусть Σ_{ij} для $0 \leqslant i < j \leqslant l$ — сумма Минковского, $\Sigma_{ij} = \sum_{(s,t)\neq(i,j)} \Delta_{st}$. Положим $\Delta = \sum_{i<j} \Delta_{ij}$.

Рассмотрим многочлены Лорана $A_{ij,k}(u) = \sum_{t\in\Sigma_{ij}} a_{ijk,t} u^t$ для $0 \leqslant i < j \leqslant l$, $k = 0, \ldots, \dim\Delta$ с коэффициентами в поле $\Bbbk(\ldots, a_{ijk,t}, \ldots, a_{pqr,w}, \ldots)$.

Положим $y_0 = 1$. Тогда, согласно примеру 1.3 и теореме 1, замыкание множества Ux задается системой уравнений на $y_1, \ldots, y_l$

$$R_\Delta\Biggl(\sum_{0\leqslant i<j\leqslant l} A_{ij,0}(u)(y_iF_j(u) - y_jF_i(u)), \sum_{0\leqslant i<j\leqslant l} A_{ij,1}(u)(y_iF_j(u) - y_jF_i(u)), \ldots, \sum_{0\leqslant i<j\leqslant l} A_{ij,\dim\Delta}(u)(y_iF_j(u) - y_jF_i(u))\Biggr) = \sum_\omega S_\omega(y) a^\omega \equiv 0.$$

5. Пример получаемой однородной системы результантов. Будем считать, что характеристика поля равна 0 или больше 12. Пусть $n = 2$. Для системы вида (1), где все $N_i = 2$, можно положить $k_{ij} = 0$. Тогда однородная система результантов — это набор коэффициентов многочлена

$$R\Bigl(\sum_i a_i f_i, \sum_i b_i f_i, \sum_i c_i f_i\Bigr) = \sum_{\nu_a,\nu_b,\nu_c} \lambda_{\nu_a,\nu_b,\nu_c}(f) a^{\nu_a} b^{\nu_b} c^{\nu_c}.$$

Однородный результант трех квадратичных многочленов трех однородных переменных имеет мультистепень $(4, 4, 4)$, т. е. суммарная его степень равна 12.

Обозначим его полную поляризацию через $\widetilde{R}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots, \xi_{12})$. Тогда однородная система результантов состоит из всевозможных подстановок векторов $\xi_i = (f_{p_i}, f_{q_i}, f_{r_i})$ в полную поляризацию однородного результанта.

В статье [1] приведено несколько явных выражений для однородного результанта трех многочленов второй степени от трех однородных переменных. Таким образом, в нашем случае можно выписать в явном виде соответствующую систему результантов.

Литература

[**1**] A. Morozov, Sh. Shakirov, *New and old results in resultant theory*, `http://arxiv.org/abs/0911.5278`. [**2**] M. J. Encarnacion, Appl. Algebra Eng. Comm. Comput., **9**:3 (1998), 243–245. [**3**] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinskiy, *Discriminants*, *Resultants*, *and Multidimensional Determinants*, Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser, Boston, 1994. [**4**] V. L. Popov, *Two orbits*: *When is one in the closure of the other*? `http://arxiv.org/abs/0808.2735v7`. [**5**] Б. Л. Ван дер Варден, *Алгебра*, Наука, М., 1979.

Лаборатория алгебраической геометрии НИУ ВШЭ
e-mail: zroslav@gmail.com

Поступило в редакцию
30 апреля 2012 г.

УДК 517.956

Об экстремумах зонных функций в периодических волноводах*

© 2013. Д. И. Борисов, К. В. Панкрашкин

Одним их важных вопросов теории периодических дифференциальных операторов является вопрос о наличии лакун в их спектре. Помимо математического интереса, это мотивировано, в частности, приложениями таких операторов к изучению распространения волн в периодических средах. В случае периодических операторов Штурма–Лиувилля классическим является результат о том, что концами спектральных лакун могут служить только периодические и антипериодические собственные значения. В многомерном случае аналогичное свойство часто предполагалось выполненным по умолчанию, более точно, часто подразумевалось, что края лакун должны являться значениями зонных функций при особых значениях квазиимпульса, лежащих на границе либо в центре зоны Бриллюэна. Вместе с тем общая теория не исключает наличия экстремумов зонных функций и при промежуточных значениях квазиимпульса, более того, имеется большое количество физических работ, изучающих так называемый эффект расщепления концов зон (split band edge), т. е. достижение зонными функциями своих экстремальных значений в нескольких внутренних точках зоны Бриллюэна. Это свойство играет важную роль в замедлении волн в фотонных кристаллах, см., например, [2], [4], [5]. Недавно появились работы, обсуждающие расположение экстремумов зонных функций на строгом математическом уровне и содержащие построения соответствующих примеров с привлечением

*Работа первого автора была частично поддержана грантом РФФИ 10-01-00118, Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.», контракт 02.740.11.0612, и грантом FCT No. ptdc/mat/101007/2008.