А. В. Лебедев, Топологически свободные частичные действия и точные представления скрещенных произведений,
Функц. анализ и его прил., 2005, том 39, выпуск 3, 54–63

Функциональный анализ и его приложения
2005, т. 39, вып. 3, с. 54–63

УДК 517.9

Топологически свободные частичные действия и точные представления скрещенных произведений

© 2005. А. В. Лебедев

§1. Введение

Понятие скрещенного произведения C^*-алгебры на частичное действие группы $\mathbb{Z}$ частичными автоморфизмами введено Экселем [1]. Оно было распространено Мак-Кланаханом [2] на случай частичных действий дискретных групп. В последнее время скрещенные произведения находят все новые приложения как в анализе, так и в других разделах математики и математической физики. Интересное обсуждение этих и связанных с ними объектов можно найти, например, в [3]. Для исследования универсальных объектов такого типа важно иметь информацию об их точных представлениях. Описание характеристических свойств этих представлений и является темой данной статьи. Одними из основных условий, при выполнении которых можно получить такие представления, являются существование не увеличивающего норму условного ожидания на «алгебру коэффициентов» (свойство $(*)$, см. §2) и топологическая свобода частичного действия. В работе показано, что топологическая свобода частичного действия влечет за собой свойство $(*)$.

В этом вводном параграфе приведены необходимые сведения о частичных действиях и соответствующих скрещенных произведениях. В следующем параграфе вводится понятие топологически свободного частичного действия и доказывается основной результат статьи (теорема 2.7), связывающий топологическую свободу действия и свойство $(*)$. Далее, в §3, на основе этих результатов мы описываем условия существования точных представлений скрещенных произведений и приведенных скрещенных произведений.

Пусть A есть C^*-алгебра и G — дискретная группа.

Определение. *Частичным действием группы G на A* называется набор $\alpha = \{\alpha_g\}_{g\in G}$ изоморфизмов $\alpha_g\colon D_{g^{-1}} \to D_g$ замкнутых двусторонних *-идеалов C^*-алгебры A, для которых

(1) $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subset D_{gh}$, $g, h \in G$;

(2) $\alpha_{hg}(d) = \alpha_h(\alpha_g(d))$, $d \in D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}h^{-1}}$;

(3) $D_e = A$, $\alpha_e = \mathrm{Id}_A$.

Тройка (A, G, α) называется *частичной динамической системой.*

Ковариантным представлением частичной динамической системы (A, G, α) называется тройка (π, u, H), где $\pi\colon A \to B(H)$ — представление алгебры A в гильбертовом пространстве H (здесь $B(H)$ — алгебра всех линейных ограниченных операторов в H), $u\colon G \to B(H)$ — функция, $u(g) = u_g$, $g \in G$, где u_g — частичная изометрия в H с начальным подпространством $[\pi(D_{g^{-1}})H]$ и финальным подпространством $[\pi(D_g)H]$, такая, что

(1) $u_g\pi(d)u_{g^{-1}} = \pi(\alpha_g(d))$, $d \in D_{g^{-1}}$,

(2) $\pi(d)(u_g u_h - u_{gh}) = 0$, $d \in D_g \cap D_{gh}$,
(3) $u_g^* = u_{g^{-1}}$.

Пусть
$$L = \{a \in l^1(G, A) : a(g) \in D_g\}$$
с обычной нормой $\|a\|_1 = \sum \|a(g)\|$. Определим (сверточное) умножение и инволюцию на L следующим образом:
$$(a * b)(g) = \sum_{h \in G} \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a(h))b(h^{-1}g)), \qquad a^*(g) = \alpha_g(a(g^{-1})^*).$$
С этими операциями L становится банаховой *-алгеброй.

Определение. *Скрещенное произведение*, ассоциированное с частичной динамической системой (A, G, α), — это обертывающая C^*-алгебра для L, обозначаемая через $A \times_\alpha G$.

Пусть (π, u, H) — ковариантное представление системы (A, G, α). Зададим представление $\pi \times u \colon L \to B(H)$ формулой
$$(\pi \times u)(a) = \sum \pi(a(g))u_g.$$
Из определения скрещенного произведения $A \times_\alpha G$ следует, что $\pi \times u$ продолжается до *-представления этого произведения.

Приведенное частичное скрещенное произведение. Среди ковариантных представлений системы (A, G, α) одно из важнейших — так называемое *приведенное скрещенное произведение*, которое определяется следующим образом (см. [2, Sec. 3]).

Прежде всего, по каждому представлению $\pi \colon A \to B(H)$ мы строим представление $\tilde{\pi}$ (так называемое регулярное представление) алгебры A в $l^2(G, H)$. Пусть $\pi_g \colon D_g \to B(H)$ задается формулой $\pi_g(d) = \pi(\alpha_{g^{-1}}(d))$. Согласно п. 2.10.4 из [4], существует единственное продолжение π'_g представления π_g на A, аннулирующее $[\pi_g(D_g)H]^\perp$. Оно имеет вид
$$\pi'_g(d) = s \lim_\gamma \pi_g(v_\gamma d),$$
где $\{v_\gamma\}_\gamma$ — аппроксимативная единица для D_g. Теперь мы определяем представление $\tilde{\pi} \colon A \to B(l^2(G, H))$ формулой
$$\tilde{\pi}(d)\xi(g) = \pi'_g(d)\xi(g), \qquad \xi \in l^2(G, H),\ g \in G,\ d \in A.$$
Для регулярного представления λ группы G, $\lambda \colon G \to B(l^2(G, H))$, $(\lambda_g \xi)(h) = \xi(g^{-1}h)$, имеем [2, Proposition 3.1]
$$\lambda_g \tilde{\pi}(d) \lambda_{g^{-1}} = \tilde{\pi}(\alpha_g(d)), \qquad g \in G,\ d \in D_{g^{-1}}.$$
Если мы положим $\widetilde{\lambda}_g = \lambda_g P_{g^{-1}}$, где P_g — ортогональный проектор на гильбертово пространство $[\tilde{\pi}(D_g) l^2(G, H)]$, то $(\tilde{\pi}, \widetilde{\lambda}, l^2(G, H))$ станет ковариантным представлением системы (A, G, α).

Пусть $\|\cdot\|_r$ — норма в $l^1(G, A)$ вида $\|a\|_r = \sup\{\|(\tilde{\pi} \times \lambda)(a)\| (\pi, H) \in \mathrm{Rep}(A)\}$, где $\mathrm{Rep}(A)$ — множество всех представлений алгебры A.

Приведенное скрещенное произведение $A \times_{\alpha r} G$, ассоциированное с (A, G, α), — это пополнение пространства $l^1(G, A)$ относительно нормы $\|\cdot\|_r$.

В действительности, для того чтобы задать приведенное скрещенное произведение, не обязательно использовать все представления алгебры A. Как показывает следующий результат, достаточно любого ее точного представления.

Теорема 1.1 [2, Proposition 3.4]. *Пусть* $\pi\colon A \to B(H)$ *— представление. Тогда* $\tilde{\pi}$ *является точным в том и только том случае, когда* $\tilde{\pi} \times \lambda$ *является точным представлением алгебры* $A \times_{\alpha r} G$.

§2. Свойство $(*)$ и топологически свободное частичное действие

Определение. Пусть (π, u, H) — ковариантное представление системы (A, G, α). Будем говорить, что $\pi \times u$ обладает *свойством* $(*)$, если для любой конечной суммы $\sum \pi(a(g))u_g$ выполняется неравенство $\|\sum \pi(a(g))u_g\| \geqslant \|a(e)\|$.

Замечание 2.1. Из [2, Proposition 3.5] следует, что $A \times_{\alpha r} G$ и $A \times_{\alpha} G$ обладают свойством $(*)$.

Если $\pi \times u$ обладает свойством $(*)$, то определенное на конечных суммах отображение $\mathscr{N}(\sum_{g\in F} \pi(a(g))u_g) = a(e)$ единственным образом продолжается до (положительного, не увеличивающего норму условного ожидания) отображения $\mathscr{N}\colon (\pi \times u)(A \times_{\alpha} G) \to A$.

Переходим к одному из основных понятий статьи — топологически свободному частичному действию.

Для любого идеала $J \subset A$ мы полагаем $\operatorname{supp} J = \{x \in \operatorname{Prim} A : x \not\supset J\}$. Известно [4, 3.2.1], что отображение $x \to x \cap J$ устанавливает гомеоморфизм $\operatorname{supp} J \leftrightarrow \operatorname{Prim} J$ (относительно топологии Джекобсона) и $\operatorname{supp} J$ является открытым множеством в $\operatorname{Prim} A$. Положим также $\widehat{A}^J = \{\pi \in \widehat{A} : \pi(J) \neq 0\}$ (здесь $\widehat{A}$ — спектр алгебры A). Отображение $\pi \to \pi|_J$ устанавливает гомеоморфизм $\widehat{A}^J \leftrightarrow \widehat{J}$ (относительно топологии Джекобсона), и $\widehat{A}^J$ — открытое множество в $\widehat{A}$ [4, 3.2.1].

Определение. Зададим отображение $\tau_g\colon \widehat{A}^{D_{g^{-1}}} \to \widehat{A}^{D_g}$ следующим образом: для каждого $\pi \in \widehat{A}^{D_{g^{-1}}}$ полагаем $\tau_g(\pi)(j) = \pi(\alpha_g^{-1}(j))$, $j \in D_g$. Из приведенных выше наблюдений следует, что τ_g — гомеоморфизм.

Зададим также отображение $t_g\colon \operatorname{supp} D_{g^{-1}} \to \operatorname{supp} D_g$ по следующему правилу: для каждой точки $x \in \operatorname{supp} D_{g^{-1}}$, такой, что $x = \ker \pi$, где $\pi \in \widehat{A}^{D_{g^{-1}}}$, полагаем $t_g(x) = \ker \tau_g(\pi)$. Ясно, что t_g — гомеоморфизм.

Тогда $\{\tau_g\}_{g\in G}$ определяет *частичное действие* группы G *частичными гомеоморфизмами* на $\widehat{A}$, а $\{t_g\}_{g\in G}$ определяет *частичное действие* группы G *частичными гомеоморфизмами* на $\operatorname{Prim} A$.

Определение. Будем говорить, что частичное действие $\{\alpha_g\}_{g\in G}$ *топологически свободно*, если для каждого конечного множества $\{g_1, \dots, g_k\} \subset G$ и любого непустого открытого множества $U \subset \operatorname{supp} D_{g_1^{-1}} \cap \dots \cap \operatorname{supp} D_{g_k^{-1}}$ существует точка $x \in U$, такая, что все точки $t_{g_i}(x)$, $i = 1, \dots, k$, различны.

Это условие можно также сформулировать следующим образом: для каждого конечного множества $\{g_1, \dots, g_k\} \subset G$ и любого непустого открытого множества U существует точка $x \in U$, такая, что все точки $t_{g_i}(x)$, $i = 1, \dots, k$, которые определены (т. е. $x \in \operatorname{supp} D_{g_i^{-1}}$), различны.

Если для каждого $g \in G$ мы введем в рассмотрение множество $X_g = \{x \in \operatorname{supp} D_{g^{-1}} : t_g(x) = x\}$, то упомянутое выше условие может быть переписано так: для любого конечного множества $\{g_1, \dots, g_n\}$, $g_i \neq e$, внутренность множества $\bigcup_{i=1}^n X_{g_i}$ пуста.

Основным утверждением данного параграфа является теорема 2.4, а техническим результатом — лемма 2.3. Одним из технических инструментов доказательства этой леммы служит следующая лемма 2.2, которая полезная и сама по себе.

Лемма 2.2 [5, Lemma 12.15]. *Пусть D есть C^*-подалгебра алгебры $B(H)$ линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H и D' — коммутант алгебры D. Если $P_1, P_2 \in D'$ — два ортогональных проектора, таких, что сужения $D|_{H_{P_1}}$ и $D|_{H_{P_2}}$ (где $H_{P_1} = P_1(H)$, $H_{P_2} = P_2(H)$) являются неприводимыми и различными представлениями, то $H_{P_1} \perp H_{P_2}$.*

Лемма 2.3. *Пусть частичное действие $\{\alpha_g\}_{g\in G}$ топологически свободно и $\pi \times u$ — представление, такое, что π является точным представлением алгебры A. Пусть F — конечное подмножество в G, $a \in L$ — любая функция, такая, что $a(g) = 0$, $g \notin F$, и $c \in (\pi \times u)(L)$ — оператор вида*

$$c = \sum_{g\in F} \pi(a(g))u_g. \tag{2.1}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует неприводимое представление π' алгебры $\pi(A)$, такое, что для любого неприводимого представления ν алгебры $(\pi \times u)(A \times_\alpha G)$, являющегося продолжением представления π', выполняются условия

(i) *$\|\pi'(\pi(a(e)))\| \geqslant \|a(e)\| - \varepsilon$,*

(ii) *$P_{\pi'}\pi'(\pi(a(e)))P_{\pi'} = P_{\pi'}\nu(c)P_{\pi'}$, где $P_{\pi'}$ — ортогональный проектор на $H_{\pi'}$ в H_ν, а $H_{\pi'}$ и H_ν — пространства представлений π' и ν соответственно.*

Доказательство. Так как $\pi(A) \cong A$, то в дальнейшем мы будем их отождествлять.

Для любого $d \in A$ и $x \in \operatorname{Prim} A$ через $\check{d}(x)$ обозначается число $\inf_{j\in x} \|d + j\|$. Для каждого $d \in A$ функция $\check{d}(x)$ полунепрерывна снизу на $\operatorname{Prim} A$ и достигает своей верхней грани, равной $\|d\|$ [4, 3.3.2, 3.3.6].

Пусть $x_0 \in \operatorname{Prim} A$ — точка, в которой $\check{a}(e)(x_0) = \|a(e)\|$, и π_0 — неприводимое представление алгебры A, такое, что $x_0 = \ker \pi_0$ (т. е. $\|\pi_0(a(e))\| = \|a(e)\|$). Так как функция $\check{a}(e)(x)$ полунепрерывна снизу, то для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $U \subset \operatorname{Prim} A$, такое, что

$$\check{a}(e)(x) > \|a(e)\| - \varepsilon \quad \text{для каждого } x \in U. \tag{2.2}$$

Из топологической свободы частичного действия $\{\alpha_g\}_{g\in G}$ вытекает существование точки $x' \in U$, такой, что все точки $t_{g_i}(x')$, $i = 1, \dots, k$, различны (если они определены, т. е. $x' \in \operatorname{supp} D_{g_i^{-1}}$).

Пусть π' — неприводимое представление алгебры A, такое, что $\ker \pi' = x'$, и пусть ν — произвольное продолжение представления π' до неприводимого представления алгебры $(\pi \times u)(A \times_\alpha G)$. Мы будем обозначать той же буквой ν продолжение упомянутого представления до неприводимого представления C^*-алгебры C, порожденной алгеброй $(\pi \times u)(A \times_\alpha G)$ и элементами $\{u_g\}_{g\in G}$ (см. [4, 2.10.2]). Для этого представления ν имеет место включение $H_{\pi'} \subset H_\nu$.

Из выбора представления π' и неравенства (2.2) мы заключаем, что существует вектор $\xi \in H_{\pi'}$, такой, что $\|\xi\| = 1$ и $\|\pi'(a(e))\xi\| > \|a(e)\| - \varepsilon$. Итак, п. (i) доказан.

Для доказательства п. (ii) установим, что для любых векторов $\xi, \eta \in H_{\pi'}$

$$\langle \pi'(d_1)\eta, \nu(d_2u_g)\xi\rangle = 0, \qquad d_1 \in A,\ d_2 \in D_g,\ g \in F,\ g \neq e. \tag{2.3}$$

Из этого, в свою очередь, следует, что

$$P_{\pi'}\nu(d_2u_g)P_{\pi'} = 0, \qquad g \in F,\ d_2 \in D_g,\ g \neq e. \tag{2.4}$$

Чтобы проверить равенство (2.3), рассмотрим следующие положения точки x':

1) $x' \notin \operatorname{supp} D_g$. В этом случае $\pi'(d_2^*) = 0$ и

$$\langle \pi'(d_1)\eta, \nu(d_2)\nu(u_g)\xi\rangle = \langle \nu(d_2^*)\pi'(d_1)\eta, \nu(u_g)\xi\rangle = \langle \pi'(d_2^*)\pi'(d_1)\eta, \nu(u_g)\xi\rangle = 0.$$

2) $x' \notin \operatorname{supp} D_{g^{-1}}$. Замечая, что $\nu(u_g^*u_g)$ — проектор на существенное пространство для $\nu(D_{g^{-1}})$, мы заключаем, что $\nu(u_g^*u_g)\xi = 0$ и поэтому

$$\begin{aligned}\langle \pi'(d_1)\eta, \nu(d_2)\nu(u_g)\xi\rangle &= \langle \pi'(d_1)\eta, \nu(d_2)\nu(u_gu_g^*u_g)\xi\rangle\\ &= \langle \pi'(d_1)\eta, \nu(d_2)\nu(u_g)\nu(u_g^*u_g)\xi\rangle = 0.\end{aligned}$$

3) Наконец, пусть $x' \in \operatorname{supp} D_g \cap \operatorname{supp} D_{g^{-1}}$. В этом случае π' — неприводимое представление как для D_g, так и для $D_{g^{-1}}$, и $t_g(x') \in \operatorname{supp} D_g$ (в соответствии с определением t_g в начале параграфа). Более того, мы имеем

$$\nu(u_g^*u_g)\eta = \eta, \quad \nu(u_gu_g^*)\eta = \eta \quad \text{для любого } \eta \in H_{\pi'}. \tag{2.5}$$

Так как $\nu(u_g)$ — частичная изометрия, то из формул (2.5) следует, что $H_{\pi'}$ принадлежит как начальному, так и финальному подпространствам частичных изометрий $\nu(u_g)$, а также начальному и финальному подпространствам для $\nu(u_g^*)$ и отображения $\nu(u_g)\colon H_{\pi'} \to \nu(u_g)(H_{\pi'})$ и $\nu(u_g^*)\colon H_{\pi'} \to \nu(u_g^*)(H_{\pi'})$ являются изоморфизмами.

Пусть P_1 — ортогональный проектор в H_ν на $H_{\pi'}$. Согласно определению представления ν, мы имеем $P_1 \in \nu(A)'$. Равенства (2.5) означают, что

$$P_1 = P_1\nu(u_g^*u_g) = P_1\nu(u_gu_g^*). \tag{2.6}$$

Положим $P_2 = \nu(u_g)P_1\nu(u_g^*)$. Из приведенных выше наблюдений следует, что $\nu(u_g)\colon P_1(H_{\pi'}) \to P_2(H_{\pi'})$ является изоморфизмом. Заметим также, что

$$P_2 \in (\nu(D_g))'. \tag{2.7}$$

Действительно, для любого $d \in D_g$ имеем

$$\begin{gathered}\nu(d) = \nu(u_gu_g^*)\nu(d) = \nu(d)\nu(u_gu_g^*),\\ \nu(\alpha_{g^{-1}}(d)) = \nu(u_g^*u_g)\nu(\alpha_{g^{-1}}(d)) = \nu(\alpha_{g^{-1}}(d))\nu(u_g^*u_g),\\ \nu(u_g^*)\nu(d)\nu(u_g) = \nu(\alpha_{g^{-1}}(d)), \qquad \nu(\alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}}(d)) = \nu(a).\end{gathered}$$

Пользуясь этими равенствами, мы для каждого $d \in D_g$ получаем $P_2\nu(d) = \nu(d)P_2$.

Кроме того, неприводимость представления $\nu(D_g)|_{H_{P_1}}$ влечет за собой неприводимость представления $\nu(D_g)|_{H_{P_2}}$ (здесь $H_{P_1} = P_1(H_\nu) = H_{\pi'}$ и $H_{P_2} = P_2(H_\nu)$).

Заметим теперь, что для $d \in D_g$

$$P_1\nu(d) = 0 \iff \breve{d}(x') = 0, \qquad P_2\nu(d) = 0 \iff \breve{d}(t_g(x')) = 0.$$

Таким образом (так как точки x' и $t_g(x')$ различны), мы заключаем, что представления $\nu(D_g)|_{H_{P_1}}$ и $\nu(D_g)|_{H_{P_2}}$ различны. Применяя лемму 2.2, мы получаем

$$P_1 \cdot P_2 = 0. \tag{2.8}$$

Из формул (2.8), (2.5), (2.6) и (2.7) следует (2.3).

Возвращаясь теперь к оператору (2.1) (напомним, что мы отождествляем A и $\pi(A)$) и используя равенство (2.4), мы получаем

$$P_{\pi'}\nu\biggl(\sum_{g\in F} a(g)u_g\biggr)P_{\pi'} = P_{\pi'}\nu(a(e))P_{\pi'} = P_{\pi'}\pi'(a(e))P_{\pi'};$$

таким образом, условие (ii) выполняется, и доказательство леммы закончено.

Теорема 2.4. *Пусть частичное действие $\{\alpha_g\}_{g\in G}$ топологически свободно. Если представление $\pi \times u$ таково, что π является точным представлением алгебры A, то $\pi \times u$ обладает свойством $(*)$.*

Доказательство. Пусть c — оператор вида (2.1). Возьмем π', упомянутое в утверждении леммы 2.3. Тогда из (ii) и (i) вытекает, что

$$\|c\| \geqslant \|\nu(c)\| \geqslant \|P_{\pi'}\nu(c)P_{\pi'}\| \geqslant \|a(e)\| - \varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, отсюда следует $(*)$.

Лемма 2.5. *Пусть частичное действие $\{\alpha_g\}_{g\in G}$ топологически свободно и представление $\pi \times u$ таково, что π — точное представление алгебры A. Тогда для любого $c \in (\pi \times u)(A \times_\alpha G)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует неприводимое представление π' алгебры $\pi(A)$, такое, что для любого неприводимого представления ν алгебры $(\pi \times u)(A \times_\alpha G)$, являющегося продолжением π',*

(i) $\|\pi'(\mathscr{N}(c))\| \geqslant \|\mathscr{N}(c)\| - \varepsilon$,

(ii) $\|P_{\pi'}\pi'(\mathscr{N}(c))P_{\pi'} - P_{\pi'}\nu(c)P_{\pi'}\| \leqslant \varepsilon$.

Доказательство получается стандартным аппроксимационным рассуждением ввиду плотности конечных сумм вида (2.1) в $(\pi\times u)(A\times_\alpha G)$ и того факта, что $\pi \times u$ обладает свойством $(*)$.

§3. Скрещенные произведения и приведенные скрещенные произведения

Скрещенное произведение $A\times_\alpha G$ естественно рассматривать как *максимальную* C^*-алгебру, обладающую свойством $(*)$ (это следует из конструкции $A\times_\alpha G$ и замечания 2.1). С другой стороны, Эксель показал, что приведенное скрещенное произведение $A \times_{\alpha r} G$ является *минимальной* C^*-алгеброй, обладающей этим свойством. Точное значение «минимальности» дается в следующем утверждении, которое является переформулировкой для рассматриваемой ситуации теоремы 3.3 из [6] (напомним при этом, что, согласно теореме 1.1 настоящей статьи, $\tilde{\pi}\times\lambda$ для любого точного представления π алгебры A является точным представлением алгебры $A \times_{\alpha r} G$).

Теорема 3.1. *Пусть $\pi \times u$ — представление, для которого π — точное представление алгебры A. Если $\pi\times u$ обладает свойством $(*)$, то отображение*

$$(\pi \times u)(A \times_\alpha G) \ni \sum \pi(a(g))u_g \mapsto \sum \tilde{\pi}(a(g))\widetilde{\lambda}_g \in (\tilde{\pi} \times \lambda)(A \times_{\alpha r} G)$$

продолжается до эпиморфизма C^*-алгебр (здесь $(\tilde{\pi}\times\lambda)$ — представление, упомянутое в теореме 1.1*).*

Замечание 3.2. Известно также, что если G — аменабельная группа, то каноническая сюръекция $\Lambda\colon A \times_\alpha G \to A \times_{\alpha r} G$ является изоморфизмом (см., например, [2, Proposition 4.2]).

Это замечание вместе с теоремой 3.1 приводит к следующему результату.

Теорема 3.3. *Пусть G — аменабельная группа и (π^i, u^i, H^i), $i = 1, 2$, — два ковариантных представления системы (A, G, α), таких, что оба представления $\pi^i \times u^i$, $i = 1, 2$, обладают свойством $(*)$. Тогда отображение*

$$\sum \pi^1(a(g))u_g^1 \mapsto \sum \pi^2(a(g))u_g^2$$

задает изоморфизм алгебр $(\pi^1 \times u^1)(A \times_\alpha G)$ и $(\pi^2 \times u^2)(A \times_\alpha G)$.

Замечание 3.4. Важность свойства $(*)$ впервые (по-видимому) была выявлена О'Донованом [7] в связи с описанием C^*-алгебр, порожденных взвешенными сдвигами. Наиболее общий результат (типа теоремы 3.3), устанавливающий принципиальную роль этого свойства в теории скрещенных произведений C^*-алгебр на дискретные группы *автоморфизмов*, был получен в [8] для *произвольной* C^*-алгебры и *аменабельной* дискретной группы (см. также [5, Chap. 2, 3] по поводу полных доказательств и различных приложений). Взаимосвязи соответствующего свойства со скрещенными произведениями на *эндоморфизмы*, порожденные *изометриями*, исследовались в [9, 10].

Следует отметить, что в [5] теорема 12.8 (аналог нашей теоремы 3.3) доказана прямым способом, *не* использующим приведенного скрещенного произведения. Таким образом, в частности, изоморфизм $\Lambda\colon A\times_\alpha G \to A\times_{\alpha r} G$ для аменабельных групп может быть выведен из этого результата (доказательство теоремы 12.8 из [5] легко переносится на ситуацию скрещенного произведения, ассоциированного с частичной динамической системой).

Теорема 3.5. *Пусть частичное действие $\{\alpha_g\}_{g\in G}$ топологически свободно и представление $\pi \times u$ таково, что π является точным представлением алгебры A. Тогда отображение*

$$(\pi \times u)(A \times_\alpha G) \ni \sum \pi(a(g))u_g \mapsto \sum \tilde{\pi}(a(g))\widetilde{\lambda}_g \in (\tilde{\pi} \times \lambda)(A \times_{\alpha r} G)$$

продолжается до эпиморфизма C^*-алгебр (здесь $\tilde{\pi} \times \lambda$ — представление, упомянутое в теореме 1.1*).*

Для доказательства применяем теорему 2.4 и теорему 3.1.

Теорема 3.6. *Пусть G — аменабельная группа и частичное действие $\{\alpha_g\}_{g\in G}$ топологически свободно. Если (π^i, u^i, H^i), $i = 1, 2$, — два ковариантных представления для (A, G, α), таких, что оба представления π^i, $i = 1, 2$, являются точными представлениями алгебры A, то отображение*

$$\sum \pi^1(a(g))u_g^1 \mapsto \sum \pi^2(a(g))u_g^2$$

задает изоморфизм алгебр $(\pi^1 \times u^1)(A \times_\alpha G)$ и $(\pi^2 \times u^2)(A \times_\alpha G)$.

Применяем теорему 2.4 и теорему 3.3.

Следующие теорема 3.7 и следствие 3.8 в некотором смысле противоположны теореме 3.1. Они составляют также обобщение теоремы 2.6 из [11] (где $A = C_0(X)$).

Теорема 3.7. *Пусть частичное действие $\{\alpha_g\}_{g\in G}$ топологически свободно. Если I — идеал в $A\times_{\alpha r} G$, то $I = \{0\}$ тогда и только тогда, когда $I\cap A = \{0\}$.*

Доказательство. Пусть $I\cap A = \{0\}$. Обозначим через $\pi\colon A\times_{\alpha r} G \to (A\times_{\alpha r} G)/I$ факторотображение, и пусть $c \in I$ — любой элемент, такой, что $c \geqslant 0$ и $\pi(c) = 0$. Для доказательства равенства $I = \{0\}$ достаточно проверить, что

$$c = 0. \tag{3.1}$$

Так как отображение $\mathscr{N}\colon A \times_{\alpha r} G \to A$, определенное после замечания 2.1, является точным (см., например, [6, Proposition 2.12]), то равенство (3.1) будет доказано, если мы установим, что

$$\mathscr{N}(c) = 0. \tag{3.2}$$

Поэтому проверим это равенство.

Из равенства $I \cap A = \{0\}$ вытекает, что $\pi(A) \cong A$. Задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, возьмем представление π' из утверждения леммы 2.5 (мы можем считать его представлением как алгебры $\pi(A)$, так и алгебры A) и продолжим его до неприводимого представления ν алгебры $\pi(A \times_{\alpha r} G)$ (здесь мы считаем π представлением $\pi \times u$ из утверждения леммы 2.5). Очевидно, что $\nu \circ \pi$ — неприводимое представление алгебры $A \times_{\alpha r} G$.

Теперь из условия $\pi(c) = 0$ и свойства (ii) в утверждении леммы 2.5 следует, что

$$\varepsilon \geqslant \|P_{\pi'}\pi'(\mathscr{N}(\pi(c)))P_{\pi'} - P_{\pi'}\nu(\pi(c))P_{\pi'}\| = \|\pi'(\mathscr{N}(\pi(c)))\| = \|\pi'(\mathscr{N}(c))\|.$$

Это вместе со свойством (i) влечет за собой неравенство

$$\|\mathscr{N}(c)\| \leqslant 2\varepsilon.$$

Тем самым (ввиду произвольности ε) равенство (3.2) установлено и доказательство завершено.

Следствие 3.8. *Пусть частичное действие $\{\alpha_g\}_{g\in G}$ топологически свободно. Представление π приведенного скрещенного произведения $A\times_{\alpha r}G$ является точным тогда и только тогда, когда оно точно на A.*

Доказательство. Достаточно в утверждении теоремы 3.7 взять $I = \ker\pi$.

Замечание 3.9. Взаимосвязи между топологической свободой действия и свойством $(*)$, а также приложения этих свойств к различным результатам, связанным со скрещенными произведениями, интенсивно эксплуатировались многими авторами. Начало использования топологической свободы как инструмента исследования идеалов в скрещенных произведениях положено (по-видимому) О'Донованом в [7, Theorem 1.2.1]. Теорема 3.6 в случае коммутативной алгебры A и действия группы $\mathbb{Z}$ *автоморфизмами* была доказана в [12, 13]. Развитие этого направления и его многочисленные (не только чисто C^*-алгебраические) приложения, такие, как, например, конструкция символического исчисления и построение теории разрешимости функционально-дифференциальных уравнений, представлены в [14, 5, 15, 16]. Для общей ситуации *автоморфизмов* теорема 3.6 была получена в [8] (см. также в этой связи [5, Chap. 2, 3]). В [17] для C^*-алгебр с «большим» центром введено понятие топологически свободного действия в терминах сужения действия автоморфизмов на центр и получен соответствующий аналог теоремы 3.6. Среди уже упомянутых «чисто» C^*-алгебраических источников необходимо отметить фундаментальный вклад в данную тематику, внесенный в [6]. Для случая $A = C_0(X)$ в [11] исследован ряд структурных проблем теории скрещенных произведений, ассоциированных с топологически свободным частичным действием.

В случае лебеговых пространств топологической свободе действия соответствует так называемая *метрическая свобода.* Взаимосвязь между этим свойством, свойством $(*)$ и соответствующими результатами для скрещенных произведений (для случая *автоморфизмов*) была исследована и применена к решению проблемы классификации сохраняющих меру автоморфизмов Арвесоном и Джозефсоном в [18, 19].

В ситуации *эндоморфизмов*, а именно, в случае, когда эндоморфизм C^*-алгебры порождается *одной* изометрией, взаимосвязи между топологической свободой действия и свойством $(*)$ исследованы в [20, 8, 21], где, в частности, получены аналоги теорем 2.4, 3.3, 3.6 для рассматриваемой ситуации. В действительности это исследование было инспирировано пионерскими работами Арзуманяна и Вершика [22–25], в которых были введены и изучены соответствующие объекты в лебеговых пространствах. В последнее время данная тематика получила новое развитие в работах Экселя [26, 27] и Экселя и Вершика [28].

Литература

1. *Exel R.* Circle actions on C^*-algebras, partial automorphisms and generalized Pimsner–Voiculescu exact sequence. J. Funct. Anal., **122**, 361–401 (1994).
2. *McClanahan K.* K-theory for partial crossed products by discrete groups. J. Funct. Anal., **130**, 77–117 (1995).
3. *Paterson Alan L. T.* Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras. Progr. Math., Vol. 170, Birkhäuser, 1999.
4. *Dixmier J.* Les C^*-algebres et leurs representations. Gauthier-Villars Editeur, 1969.
5. *Antonevich A., Lebedev A.* Functional differential equations: I. C^*-theory. Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math., Vol. 70, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1994.
6. *Exel R.* Amenability for Fell bundles. J. Reine Angew. Math., **492**, 41–73 (1997).
7. *O'Donovan D. P.* Weighted shifts and covariance algebras. Trans. Amer. Math. Soc., **208**, 1–25 (1975).
8. *Лебедев А. В.* О некоторых C^*-методах, применяемых при исследовании алгебр, ассоциированных с автоморфизмами и эндоморфизмами. Деп. в ВИНИТИ, №5351-В 87, 1987.
9. *Boyd S., Keswani N., Raeburn I.* Faithful representations of crossed products by endomorphisms. Proc. Amer. Math. Soc., **118**, No. 2, 427–436 (1993).
10. *Adji S., Laca M., Nilsen M., Raeburn I.* Crossed products by semigroups of endomorphisms and the Toeplitz algebras of ordered groups. Proc. Amer. Math. Soc., **122**, No. 4, 1133–1141 (1994).
11. *Exel R., Laca M., Quigg J.* Partial dynamical systems and C^*-algebras generated by partial isometries. J. Operator Theory, **47**, 169–186 (2002).
12. *Лебедев А. В.* Об обратимости элементов в C^*-алгебрах, порожденных динамическими системами. УМН, **34**, No. 4, 199–200 (1979).
13. *Лебедев А. В.* Операторы типа взвешенного сдвига. Дис. канд. физ.-мат. наук, Минск, 1980.

14. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. Университетское, Минск, 1988.
15. *Antonevich A., Belousov M., Lebedev A.* Functional differential equations: II. C^*-applications. Part 1. Equations with continuous coefficients. Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math., Vol. 94, Longman, Harlow, 1998.
16. *Antonevich A., Belousov M., Lebedev A.* Functional differential equations: II. C^*-applications. Part 2. Equations with discontinuous coefficients and boundary value problems. Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math., Vol. 95, Longman, Harlow, 1998.
17. *Карлович Ю. И.* Локально-траекторный метод исследования обратимости в C^*-алгебрах операторов с дискретными группами сдвигов. ДАН СССР, **299**, No. 3, 546–550 (1988).
18. *Arveson W. B.* Operator algebras and measure preserving automorphisms. Acta Math., **118**, 95–109 (1967).
19. *Arveson W. B., Josephson K. B.* Operator algebras and measure preserving automorphisms. II. J. Funct. Anal., **4**, No. 1, 100–134 (1969).
20. *Лебедев А. В.* О расширении операторных алгебр с помощью изометрических операторов, порождающих эндоморфизмы. УМН, **39**, вып. 5, 247–248 (1984).
21. *Лебедев А. В.* Конструкции и объекты, ассоциированные с C^*-динамическими системами, порожденными эндоморфизмами. Труды ИМ НАН Беларуси, **1**, 133–142 (1998).
22. *Арзуманян В. А., Вершик А. М.* Фактор-представления скрещенного произведения коммутативной C^*-алгебры и полугруппы ее эндоморфизмов. Докл. АН СССР, **238**, №3, 513–517 (1978).
23. *Арзуманян В. А.*, Структура и представления инволютивных алгебр, ассоциированных с полугруппами эндоморфизмов: Дис. канд. физ.-мат. наук, Ленинград, 1978.
24. *Arzumanian V. A., Vershik A. M.* Star algebras associated with endomorphisms. In: Operator Algebras and Group Representations, Proc. Int. Conf. Neptun/Rom., 1980, Vol. I, Monographs Stud. Math., Vol. 17, 1984, pp. 17–27.
25. *Арзуманян В. А.* Операторные алгебры, ассоциированные с несингулярными эндоморфизмами пространств Лебега. Изв. АН АрмССР, **20**, №6, 596–616 (1986).
26. *Exel R.* A new look at the crossed-product of a C^*-algebra by an endomorphism. arXiv:math.OA/0012084 v1 12 Dec 2000.
27. *Exel R.* Crossed-products by finite index endomorphisms and KMS states. arXiv:math. OA/0105195 v1 24 May 2001.
28. *Exel R., Vershik A.* C^*-algebras of irreversible dynamical systems. arXiv:math.OA/ 0203185 v1 19 May 2002.

Белорусский государственный университет, Минск
University of Bialystok, Bialystok
e-mail: lebedev@bsu.by

Поступила в редакцию
2 октября 2003 г.